SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **THANH HÓA**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT** **NĂM HỌC 2026 - 2027**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN CHUYÊN** *(Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)* ***Thời gian làm bài: 150 phút** (không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 06/6/2026** *(Đề thi gồm 01 trang)*

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a) Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{8+a^2+b^2}=ab+2$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $Q=a^3+b^3$.

b) Xét đa thức $P(x)=ax^2+bx+2$ với a,b là các hệ số thực. Biết rằng với mọi số thực x thỏa mãn $|x|\le 1$ thì $|P(x)|\le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=|a|+|b|$.

Câu 2: *(1,0 điểm)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-3\sqrt{2x-1}=71-2(y^2+2y) \\ \sqrt{x^2-x-1-y}=\dfrac{y+1}{\sqrt[3]{x-1-y}} \end{cases}$.

Câu 3: *(1,0 điểm)* Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất chọn được số có tổng tất cả các chữ số là một số chẵn.

Câu 4: *(2,0 điểm)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $(x+y)^2+4x=4(y^2-3y+9)$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $(p+q)^p=(q-p)^{2q-1}$.

Câu 5: *(3,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$) có đường tròn ngoại tiếp (O), đường cao AH (H thuộc cạnh BC) và tâm đường tròn nội tiếp là I. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (khác điểm A). Gọi F là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MF cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K.

a) Chứng minh rằng các tam giác INF và IMC là các tam giác cân.

b) Chứng minh rằng tứ giác $NHIK$ nội tiếp đường tròn.

c) Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D (khác điểm F), hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S. Chứng minh rằng nếu $AB+AC=2BC$ thì tứ giác $SIKM$ là hình bình hành.

Câu 6: *(1,0 điểm)* Một thuật toán được lập trình trên máy tính như sau: ban đầu, một số số nguyên dương (nhiều hơn một số) được hiện lên màn hình. Sau đó, cứ mỗi giây, một số bằng tổng bình phương của tất cả các số đã hiện trên màn hình lại được hiện lên (ví dụ, nếu ban đầu có các số 1 và 3 được hiện trên màn hình, thì ở giây đầu tiên, số $10=1^2+3^2$ sẽ được hiện lên; ở giây thứ hai, số $110=1^2+3^2+10^2$ sẽ được hiện lên;...). Gọi n_k là số ước nguyên tố phân biệt của số hiện trên màn hình ở giây thứ k ($k\ge 1$). Chứng minh rằng $n_1+n_2+...+n_{2026}\ge 2053351$.

------------ **HẾT** ------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

a) Ta có a, b là các số thực dương, nên $a+b>0$ và $ab>0$. Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2}$, ta biến đổi được

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\left(a+b\right)=3ab\Leftrightarrow ab=\frac{2}{3}\left(a+b\right).$$

Đặt $S=a+b$ và $P=ab$ với điều kiện $S^2\geq 4P$. Khi đó $P=\dfrac{2}{3}S$. Do $S^2\geq 4P$ nên ta có

$$S^2\geq 4\cdot\frac{2}{3}S\Leftrightarrow S^2-\frac{8}{3}S\geq 0.$$

Vì a, b dương nên $S>0$, suy ra $S\geq\dfrac{8}{3}$. Từ giả thiết $\sqrt{8+a^2+b^2}=ab+2$, tiến hành bình phương hai vế do $ab+2>0$, ta được

$$\begin{aligned}
&8+a^2+b^2=(ab+2)^2\\
\Leftrightarrow\ &8+(a+b)^2-2ab=(ab)^2+4ab+4\\
\Leftrightarrow\ &8+S^2-2P=P^2+4P+4\\
\Leftrightarrow\ &S^2-P^2-6P+4=0.
\end{aligned}$$

Thay $P=\dfrac{2}{3}S$ vào phương trình trên, ta có

$$\begin{aligned}
&S^2-\left(\frac{2}{3}S\right)^2-6\left(\frac{2}{3}S\right)+4=0\\
\Leftrightarrow\ &S^2-\frac{4}{9}S^2-4S+4=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{5}{9}S^2-4S+4=0\\
\Leftrightarrow\ &5S^2-36S+36=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}S=6\\ S=\dfrac{6}{5}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện $S\geq\dfrac{8}{3}$, ta nhận $S=6$. Suy ra $P=\dfrac{2}{3}\cdot 6=4$. Giá trị của biểu thức $Q=a^3+b^3$ là

$$\begin{aligned}
Q&=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\\
&=(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\\
&=S\left(S^2-3P\right)\\
&=6\left(6^2-3\cdot 4\right)\\
&=6\left(36-12\right)\\
&=6\cdot 24\\
&=144.
\end{aligned}$$

Vậy $Q=144$.

b) Ta có $P(x) = ax^2 + bx + 2$. Theo giả thiết, $|P(x)| \le 4$ đúng với mọi x thỏa mãn $|x| \le 1$.
Thay $x = 1$, ta có $|P(1)| \le 4 \Leftrightarrow |a + b + 2| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le a + b + 2 \le 4 \Leftrightarrow -6 \le a + b \le 2$.
Thay $x = -1$, ta có
$|P(-1)| \le 4 \Leftrightarrow |a - b + 2| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le a - b + 2 \le 4 \Leftrightarrow -6 \le a - b \le 2$.
Ta xét tính chất giá trị tuyệt đối:
$|a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|)$.
Thật vậy, bình phương hai vế ta được:
$(|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|ab|$ và $\max\left(|a + b|^2, |a - b|^2\right) = \max\left(a^2 + b^2 + 2ab, a^2 + b^2 - 2ab\right) = a^2 + b^2 + 2|ab|$.
Từ bất phương trình $-6 \le a + b \le 2$, suy ra $|a + b| \le 6$.
Từ bất phương trình $-6 \le a - b \le 2$, suy ra $|a - b| \le 6$. Do đó, $S = |a| + |b| = \max(|a + b|, |a - b|) \le 6$.
Dấu "$=$" xảy ra khi $\begin{cases} a + b = -6 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \end{cases}$.
Thử lại với $a = -3, b = -3$, ta có $P(x) = -3x^2 - 3x + 2$. Đỉnh của parabol là $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2} \in [-1; 1]$.
Ta tính các giá trị: $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4} \le 4$; $P(1) = -4 \ge -4$; $P(-1) = 2 \le 4$.
Nên $|P(x)| \le 4$ với mọi $x \in [-1; 1]$, thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 6.

Câu 2. Điều kiện xác định là $\begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ x^2 - x - 1 - y \ge 0 \\ x - 1 - y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x - 1 - y \ge 0 \\ x - 1 - y \ne 0. \end{cases}$ Xét phương trình thứ hai của hệ

$$\sqrt{x^2 - x - 1 - y} = \frac{y + 1}{\sqrt[3]{x - 1 - y}} (1)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x - y - 1}$. Suy ra $x - y - 1 = t^3 \Leftrightarrow y + 1 = x - t^3$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$\sqrt{x^2 - x - (x - t^3)} = \frac{x - t^3}{t}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + t^3} = \frac{x}{t} - t^2 (2)$$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là $\dfrac{x}{t} - t^2 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x - t^3}{t} \ge 0$. Bình phương hai vế phương trình (2) ta được

$$\begin{aligned}
& x^2-2x+t^3=\frac{x^2}{t^2}-2xt+t^4 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-\frac{x^2}{t^2}-2x+2xt+t^3-t^4=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2\frac{t^2-1}{t^2}+2x(t-1)-t^3(t-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (t-1)\left[\frac{x^2(t+1)}{t^2}+2x-t^3\right]=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ \dfrac{x^2(t+1)}{t^2}+2x-t^3=0. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $t-1=0 \Leftrightarrow t=1$. Khi đó $\sqrt[3]{x-y-1}=1 \Leftrightarrow x-y-1=1 \Leftrightarrow y=x-2$. Trường hợp 2: $\dfrac{x^2(t+1)}{t^2}+2x-t^3=0 \Leftrightarrow x^2(t+1)+2xt^2-t^5=0$. Nếu $t<0$ thì $t^3<0$. Từ điều kiện $\dfrac{x-t^3}{t}\geq 0$ suy ra $x-t^3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq t^3<0$. Điều này mâu thuẫn với điều kiện $x\geq\dfrac{1}{2}$. Do đó $t>0$. Với $t>0$, từ $\dfrac{x-t^3}{t}\geq 0$ suy ra $x\geq t^3$. Khi đó

$$x^2(t+1)+2xt^2-t^5\geq\left(t^3\right)^2(t+1)+2\left(t^3\right)t^2-t^5=t^7+t^6+t^5>0.$$

Suy ra phương trình $x^2(t+1)+2xt^2-t^5=0$ vô nghiệm. Vậy ta có $y=x-2$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\begin{aligned}
& 2x^2-3\sqrt{2x-1}=71-2\left[(x-2)^2+2(x-2)\right] \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2-3\sqrt{2x-1}=71-2\left(x^2-4x+4+2x-4\right) \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2-3\sqrt{2x-1}=71-2\left(x^2-2x\right) \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2-4x-3\sqrt{2x-1}-71=0.(3)
\end{aligned}$$

Đặt $u=\sqrt{2x-1}$ với $u\geq 0$. Suy ra $u^2=2x-1 \Leftrightarrow 2x=u^2+1 \Rightarrow 4x^2=\left(u^2+1\right)^2=u^4+2u^2+1$ và $4x=2u^2+2$. Thay vào phương trình (3) ta được

$$\begin{aligned}
& \left(u^4+2u^2+1\right)-\left(2u^2+2\right)-3u-71=0 \\
\Leftrightarrow\ & u^4-3u-72=0 \\
\Leftrightarrow\ & (u-3)\left(u^3+3u^2+9u+24\right)=0.
\end{aligned}$$

Do $u\geq 0$ nên $u^3+3u^2+9u+24>0$. Suy ra $u-3=0 \Leftrightarrow u=3$ (thỏa mãn). Với $u=3$, ta có $\sqrt{2x-1}=3 \Leftrightarrow 2x-1=9 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện). Với $x=5$, ta có $y=5-2=3$. Thử lại với các điều kiện ban đầu của hệ, ta thấy cặp nghiệm $(x;y)=(5;3)$ thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)$.

Câu 3. Tập hợp các chữ số đã cho là $X=\{4;5;6;7;8;9\}$ gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ. Số các số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được lập từ X là $\mathrm{A}_6^4=360$ số. Suy ra số phần tử của tập hợp S là 360. Không gian mẫu của phép thử chọn ngẫu nhiên một số từ tập S có số phần tử là $n(\Omega)=360$. Gọi A là biến cố "Số được chọn có tổng tất cả các chữ số là một số chẵn". Để tổng 4 chữ số phân biệt là một số chẵn, ta có các trường hợp có thể xảy ra:

1. Trường hợp 1: 4 chữ số đều chẵn (loại vì chỉ có 3 chữ số chẵn).

2. Trường hợp 2: 4 chữ số đều lẻ (loại vì chỉ có 3 chữ số lẻ).

3. Trường hợp 3: 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.
   Ta tính số các số thỏa mãn trường hợp 3:

   (a) Chọn 2 chữ số chẵn từ 3 chữ số chẵn có C_3^2 cách.

   (b) Chọn 2 chữ số lẻ từ 3 chữ số lẻ có C_3^2 cách.

   (c) Xếp 4 chữ số vừa chọn vào 4 vị trí có 4! cách.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_3^2 \cdot 4! = 216$.
Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{216}{360} = \dfrac{3}{5}$.

Câu 4.

a) Ta có phương trình $(x+y)^2 + 4x = 4\left(y^2 - 3y + 9\right)$.

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 4y^2 - 12y + 36 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 2x(y+2) - 3y^2 + 12y - 36 = 0(1) \end{aligned}$$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x, tham số y. Ta có $\Delta' = (y+2)^2 - \left(-3y^2 + 12y - 36\right) = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y + 36 = 4y^2 - 8y + 40 = 4\left(y^2 - 2y + 10\right) = 4\left[(y-1)^2 + 9\right]$. Để phương trình có nghiệm nguyên x thì Δ' phải là một số chính phương. Đặt $\Delta' = 4k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $4\left[(y-1)^2 + 9\right] = 4k^2 \Leftrightarrow (y-1)^2 + 9 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (y-1)^2 = 9 \Leftrightarrow (k-y+1)(k+y-1) = 9$. Vì $y \geq 1$ nên $k+y-1 > 0$. Do tích của hai thừa số bằng 9 nên $k-y+1 > 0$. Hơn nữa, ta có $(k+y-1) - (k-y+1) = 2y - 2 \geq 0 \Rightarrow k-y+1 \leq k+y-1$.
Do $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$, ta xét các trường hợp sau:

(a) Trường hợp 1: $\begin{cases} k - y + 1 = 1 \\ k + y - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2 = 8 \\ 2k = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ k = 5. \end{cases}$
Với $y = 5$, ta có $\Delta' = 4 \cdot 5^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 10$.
Thay vào công thức nghiệm của phương trình (1), ta được $\left[\begin{array}{l} x = -(5+2) + 10 = 3 \text{ (thỏa m} \\ x = -(5+2) - 10 = -17 \text{ (loại} \end{array}\right.$

(b) Trường hợp 2: $\begin{cases} k - y + 1 = 3 \\ k + y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2 = 0 \\ 2k = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ k = 3. \end{cases}$ Với $y = 1$, ta có $\Delta' = 4 \cdot 3^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 6$. Thay vào công thức nghiệm của phương trình (1), ta được
$\left[\begin{array}{l} x = -(1+2) + 6 = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -(1+2) - 6 = -9 \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $(3; 5)$ và $(3; 1)$.

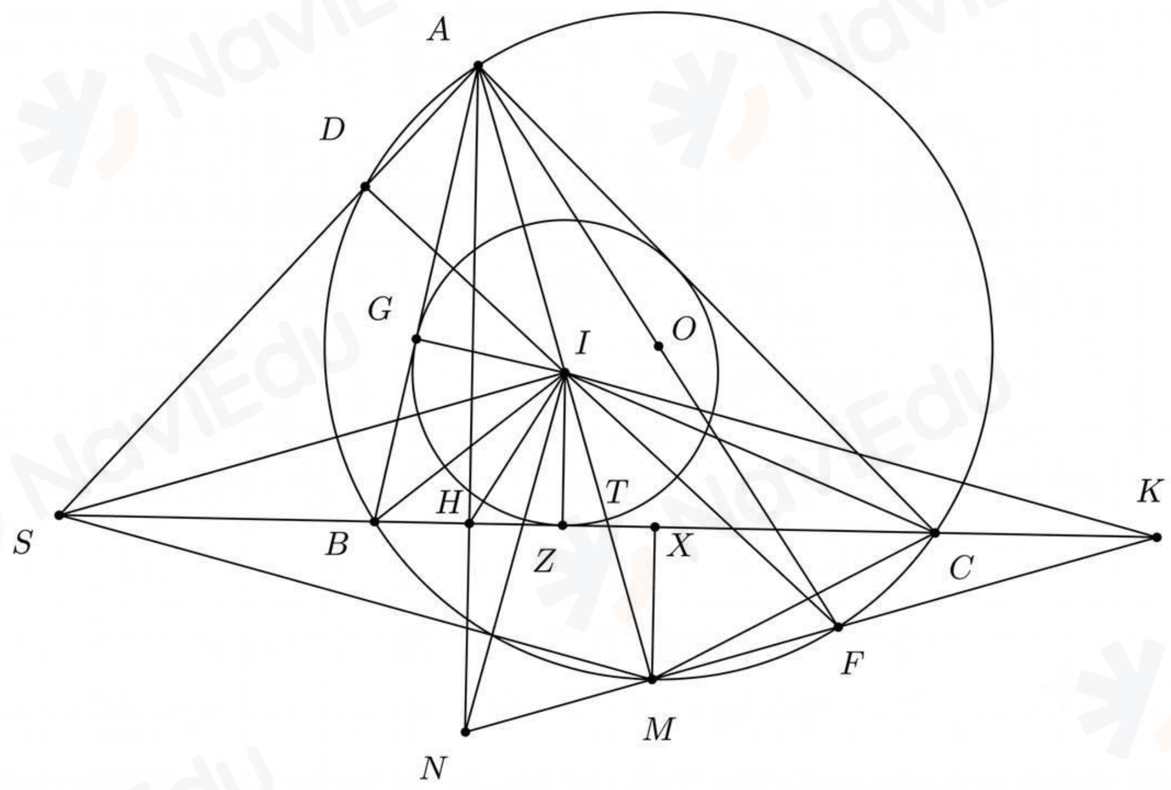
b) Ta có phương trình $(p+q)^p = (q-p)^{2q-1}$. Vì p, q là các số nguyên tố dương nên $p + q > 0$, suy ra $q - p > 0 \Rightarrow q > p$.
Gọi d là một ước nguyên tố của $q - p$. Suy ra $q - p$ chia hết cho $d \Rightarrow q \equiv p \pmod{d}$.

Mà $q-p$ là ước của $(q-p)^{2q-1}$ nên d là ước của $(p+q)^p$.
Do d nguyên tố nên d là ước của $p+q$. Ta có d là ước của tổng $(p+q)+(q-p)=2q$ và d là ước của hiệu $(p+q)-(q-p)=2p$.
Vì p,q là các số nguyên tố phân biệt (do $q>p$) nên ước chung lớn nhất của $2p$ và $2q$ là 2.
Suy ra d là ước của $2 \Rightarrow d=2$. Điều này chứng tỏ $q-p$ chỉ có ước nguyên tố duy nhất là 2, do đó $q-p=2^k$ với $k\in\mathbb{N}^*$.
Mặt khác, do $p+q$ cũng chỉ có ước nguyên tố là 2, nên $p+q=2^m$ với $m\in\mathbb{N}^*$, $m>k$.
Thay vào phương trình ban đầu ta được: $(2^m)^p=\left(2^k\right)^{2q-1} \Leftrightarrow 2^{mp}=2^{k(2q-1)} \Leftrightarrow mp=k\left(2q-1\right)$.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} q-p=2^k \\ p+q=2^m \end{cases} \Rightarrow 2q=2^m+2^k=2^k\left(2^{m-k}+1\right) \Rightarrow q=2^{k-1}\left(2^{m-k}+1\right).$$

Do q là số nguyên tố và $2^{m-k}+1>1$ (vì $m>k$), nên ta phải có $2^{k-1}=1 \Leftrightarrow k-1=0 \Leftrightarrow k=1$.
Với $k=1$, ta có $q-p=2^1=2 \Rightarrow q=p+2$.
Thay $k=1$ vào phương trình $mp=k\left(2q-1\right)$, ta được:
$mp=2q-1=2\left(p+2\right)-1 \Leftrightarrow mp=2p+3 \Leftrightarrow p\left(m-2\right)=3$.
Vì p là số nguyên tố và m nguyên dương nên p phải là ước nguyên tố của 3. Suy ra $p=3$.
Khi đó $m-2=1 \Leftrightarrow m=3$. Với $p=3$, ta có $q=3+2=5$ (thỏa mãn là số nguyên tố).
Thử lại: $(3+5)^3=8^3=512$; $(5-3)^{2\cdot 5-1}=2^9=512$ (thỏa mãn).
Vậy hai số nguyên tố cần tìm là $p=3$ và $q=5$.

Câu 5.



a) Ta có $\widehat{OAC} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABH} = \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{HAI} = \widehat{BAI} - \widehat{BAH} = \widehat{CAI} - \widehat{CAO} = \widehat{FAI}$.

Xét tam giác ANF có đường cao AM đồng thời là phân giác $\Rightarrow AM$ là trung trực NF có I nằm trên $AM \Rightarrow IN = IF$.

Ta có $\widehat{MIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{IAB} + \widehat{ICB} = \widehat{BCM} + \widehat{ICB} = \widehat{MCI} \Rightarrow \triangle IMC$ cân tại M.

b) Ta có $\widehat{KCM} = 180^\circ - \widehat{MCB} = 180^\circ - \widehat{MBC} = \widehat{MFC} \Rightarrow \triangle MFC \sim \triangle MCK$ (g.g) $\Rightarrow MF \cdot MK = MC^2 = MI^2 \Rightarrow MN \cdot MK = MI^2$.

Vì $MF = MN \Rightarrow \widehat{NIK} = 90^\circ$ (do có $\widehat{IMK} = 90^\circ$) $\Rightarrow NHIK$ nội tiếp.

c) Gọi G, Z lần lượt là hình chiếu của I trên AB, BC và X là trung điểm BC. Ta dễ có $AG = \dfrac{AB + AC - BC}{2} = \dfrac{BC}{2} = CX \Rightarrow \triangle AGI = \triangle CXM$ (cgv - gn) $\Rightarrow XM = IG = IZ$, mà $IZ \parallel XM \Rightarrow T$ là trung điểm IM.

Gọi đường thẳng qua I vuông góc với IA cắt BC tại S', $S'A$ cắt (O) tại $D' \Rightarrow \widehat{S'IB} = 90^\circ - \widehat{BIM} = 90^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = \widehat{S'CI} \Rightarrow \triangle S'IB \sim \triangle S'CI$ (g.g) $\Rightarrow S'I^2 = S'B \cdot S'C = S'D' \cdot S'A$. Mà $\widehat{S'IA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ID'A} = 90^\circ \Rightarrow D'$ trùng $D \Rightarrow S'$ trùng S.

$\Rightarrow SI \parallel MK$ do cùng vuông góc với AM, mà T là trung điểm $IM \Rightarrow SIKM$ là hình bình hành.

Câu 6. Gọi x_k là số hiện trên màn hình ở giây thứ k với $k \in \mathbb{N}^*$. Giả sử ban đầu có m số nguyên dương được hiện lên màn hình là $a_1, a_2, \ldots, a_m$ với $m \geq 2$. Theo giả thiết, ở giây đầu tiên, số được hiện lên bằng tổng bình phương của các số ban đầu nên

$$x_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2.$$

Vì $a_i \geq 1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ và $m \geq 2$ nên $x_1 \geq 1^2 + 1^2 = 2$. Ở giây thứ 2, số được hiện lên bằng tổng bình phương của tất cả các số đã hiện trên màn hình nên

$$x_2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 + x_1^2 = x_1 + x_1^2 = x_1 (x_1 + 1).$$

Tương tự, ở giây thứ $k+1$, số được hiện lên bằng tổng bình phương của tất cả các số đã hiện trên màn hình (bao gồm các số ban đầu và các số từ x_1 đến x_k). Tổng bình phương của tất cả các số hiện trên màn hình trước giây thứ k chính là x_k. Do đó, số hiện lên ở giây thứ $k+1$ là

$$x_{k+1} = x_k + x_k^2 = x_k (x_k + 1) \quad \forall k \geq 1.$$

Từ $x_1 \geq 2$ và $x_{k+1} = x_k (x_k + 1)$, bằng quy nạp ta dễ dàng suy ra $x_k \geq 2$ với mọi $k \geq 1$. Ta có n_k là số ước nguyên tố phân biệt của x_k. Vì $x_{k+1} = x_k (x_k + 1)$ và $x_k, x_k + 1$ là hai số nguyên dương liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau, tức là $(x_k, x_k + 1) = 1$. Do đó, tập hợp các ước nguyên tố của x_{k+1} là hợp rời rạc của tập hợp các ước nguyên tố của x_k và tập hợp các ước nguyên tố của $x_k + 1$. Suy ra số ước nguyên tố phân biệt của x_{k+1} bằng tổng số ước nguyên tố phân biệt của x_k và số ước nguyên tố phân biệt của $x_k + 1$. Hay $n_{k+1} = n_k + m_k$, trong đó m_k là số ước nguyên tố phân biệt của $x_k + 1$. Vì $x_k \geq 2$ nên $x_k + 1 \geq 3$, suy ra $x_k + 1$ có ít nhất một ước nguyên tố. Do đó $m_k \geq 1$. Suy ra $n_{k+1} \geq n_k + 1$ với mọi $k \geq 1$. Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned}
&n_k \geq n_{k-1} + 1\\
&n_{k-1} \geq n_{k-2} + 1\\
&\ldots\\
&n_2 \geq n_1 + 1.
\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có $n_k \geq n_1 + k - 1$. Vì $x_1 \geq 2$ nên x_1 có ít nhất một ước nguyên tố, suy ra $n_1 \geq 1$. Do đó $n_k \geq 1 + k - 1 = k$ với mọi $k \geq 1$. Khi đó, tổng cần chứng minh thỏa mãn

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{2026} \geq 1 + 2 + \cdots + 2026.$$

Ta có $1 + 2 + \cdots + 2026 = \dfrac{2026\,(2026 + 1)}{2} = 1013 \cdot 2027 = 2053351$. Vậy $n_1 + n_2 + \cdots + n_{2026} \geq 2053351$ (điều phải chứng minh).