SỞ GD&ĐT TP. ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm có 4 trang)

KỲ THI THỬ TN THPT NĂM 2026 - LẦN 3
Môn: TOÁN
Thời gian: 90 phút
(không kể thời gian giao đề)

MÃ ĐỀ: 1016

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{3}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích bằng

A. $\pi\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{3}$. **B.** $\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}$. **C.** $\pi\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

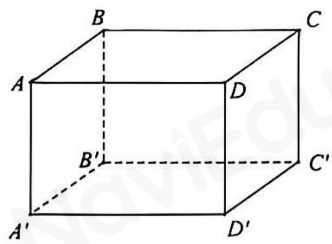
Câu 2. Tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\log_{0,3} x}$ là

A. $D=(-\infty;1]$. **B.** $D=[0;1]$. **C.** $D=(0;1]$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAC vuông cân tại A, có diện tích bằng a^2 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích V của khối chóp $S.ABD$ bằng

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2,\ BC=4,\ CC'=5$. Độ dài của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}$ bằng



A. $\sqrt{41}$.
B. $3\sqrt{5}$.
C. $\sqrt{29}$.
D. $2\sqrt{5}$.

Câu 5. Biết $\int f(x)\,dx=2026^x+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(x)=2026^x.\ln 2026$. **B.** $f(x)=x.2026^{x-1}$.

C. $f(x)=\frac{2026^{x+1}}{x+1}$. **D.** $f(x)=\frac{2026^x}{\ln 2026}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Tiêu cự của elip (E) bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\tan x=0$ là

A. $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\{k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $S=\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Cho A, B là hai biến cố thỏa mãn $P(A)=0,4$; $P(B)=0,5$ và $P(A\cup B)=0,76$. Tính $P(A|B)$.

A. $P(A|B)=0,28$. **B.** $P(A|B)=0,7$.

C. $P(A|B)=0,14$. **D.** $P(A|B)=0,35$.

Câu 9. Cho biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-5}{x+3}$ có đường tiệm cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị $a-b$ bằng

A. -3. **B.** -7. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 10. Thư viện ghi lại số giờ đọc sách của 50 sinh viên trong một ngày và thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm giờ	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
Số sinh viên	0	15	20	9	6

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_2=4u_1$ và $u_3=14$. Tính u_{2026}.

A. $u_{2026}=4058$. **B.** $u_{2026}=4056$. **C.** $u_{2026}=12158$. **D.** $u_{2026}=12152$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (Oyz). Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\overrightarrow{u_2}=(1;0;0)$. **B.** $\overrightarrow{u_4}=(0;1;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_1}=(0;1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_3}=(0;0;1)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một trung tâm y tế được cấp một lô 10000 liều vắc-xin viêm não Nhật Bản để tiêm cho người dân trong vòng 30 ngày. Gọi $M(t)$ là số liều vắc-xin còn lại chưa sử dụng sau t ngày, với $0\le t\le 30$. Sau đúng 30 ngày, trung tâm còn lại 280 liều vắc-xin để dự phòng. Qua thống kê, tốc độ tiêm chủng tại thời điểm t tỉ lệ thuận với bình phương thời gian còn lại, tức là $-M'(t)=k(30-t)^2$, $k>0$.

a) Hàm số $M(t)$ có dạng $M(t)=\dfrac{k}{3}(30-t)^3+C$.

b) $k=1,08$.

c) Sau 20 ngày, trung tâm còn lại 460 liều vắc-xin chưa sử dụng.

d) Tốc độ tiêm chủng trung bình trong 15 ngày đầu tiên là 567 liều/ngày.

Câu 2. Lớp 12/1 có 25 bạn nam và 10 bạn nữ; lớp 12/2 có 20 bạn nam và 15 bạn nữ. Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt giao lưu với đơn vị kết nghĩa, Đoàn trường chọn ngẫu nhiên từ hai lớp trên mỗi lớp 2 học sinh. Sau khi nhóm 4 bạn đã tập hợp, cả nhóm bầu ngẫu nhiên một bạn trong số đó làm nhóm trưởng.

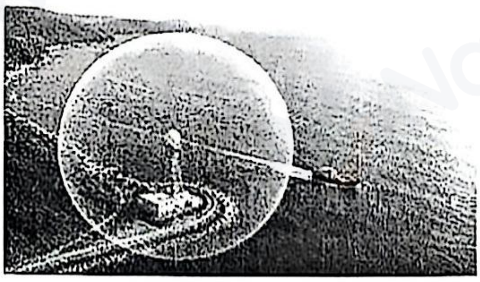
a) Biết rằng nhóm trưởng là học sinh lớp 12/1, xác suất để bạn đó là nữ bằng $\dfrac{3}{7}$.

b) Xác suất để bạn nhóm trưởng được bầu là một bạn nữ bằng $\dfrac{5}{14}$.

c) Biết rằng nhóm trưởng là một bạn nữ, xác suất để bạn đó đến từ lớp 12/1 bằng $\dfrac{2}{5}$.

d) Biết rằng nhóm trưởng là một bạn nữ, xác suất để ba bạn còn lại đều là nam bằng $\dfrac{550}{2023}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tương ứng với $100\,\text{m}$. Một trạm kiểm soát ven biển có vùng nhận diện tín hiệu là một khối cầu bán kính $800\,\text{m}$, tâm của trạm đặt tại $I(1;2;1,2)$. Vào lúc 8 giờ 00 phút sáng, một tàu đánh cá di chuyển thẳng đều từ vị trí $A(16;-13;0)$ đến vị trí $B(-14;17;0)$ và đến nơi lúc 8 giờ 30 phút sáng cùng ngày.



a) Phương trình mặt cầu ranh giới vùng tín hiệu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1,2)^2=640000$.

b) Tại thời điểm 8 giờ 10 phút sáng, tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm.

c) Vào lúc 8 giờ 20 phút, tàu ở vị trí gần trạm kiểm soát nhất.

d) Khoảng thời gian tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm không quá 12 phút.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(2;-3)$.

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

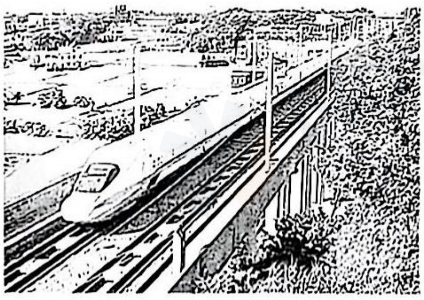
b) Đồ thị (C) có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục tung không đi qua điểm A.

d) Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nhưng luôn đi qua tâm đối xứng của (C) và cắt (C) tại hai điểm M, N. Diện tích nhỏ nhất của tam giác AMN bằng $4\sqrt{3}$ (đvdt).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

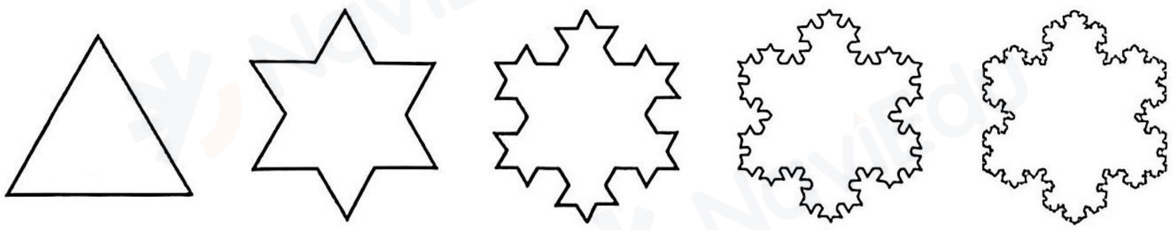
Câu 1. Tuyến đường sắt cao tốc sau khi đưa vào hoạt động đã đem lại nhiều thuận lợi, thúc đẩy phát triển kinh tế - xã hội của khu vực. Biết rằng sau khi khai trương, thời gian giữa hai chuyến tàu liên tiếp là t (đơn vị: phút), với $2\le t\le 20$, $t\in\mathbb{N}^*$. Sức chở của tàu cao tốc có liên hệ với t như sau:



- Khi $10\le t\le 20$, tàu ở trạng thái đầy, sức chở là 1200 người.
- Khi $2\le t<10$, sức chở giảm so với mức đầy; số người giảm tỉ lệ thuận với $(10-t)^2$. Biết rằng khi $t=5$ phút thì sức chở là 950 người.

Gọi $P(t)$ (người) là sức chở của tàu khi thời gian giữa hai chuyến là t phút. Giả sử lợi nhuận ròng của tuyến khi đó là $Q(t)=\dfrac{t}{5}P(t)-40t^2+660t-1372$ (triệu đồng). Hỏi khi t bằng bao nhiêu phút thì lợi nhuận ròng trung bình mỗi phút $\dfrac{Q(t)}{t}$ đạt giá trị lớn nhất?

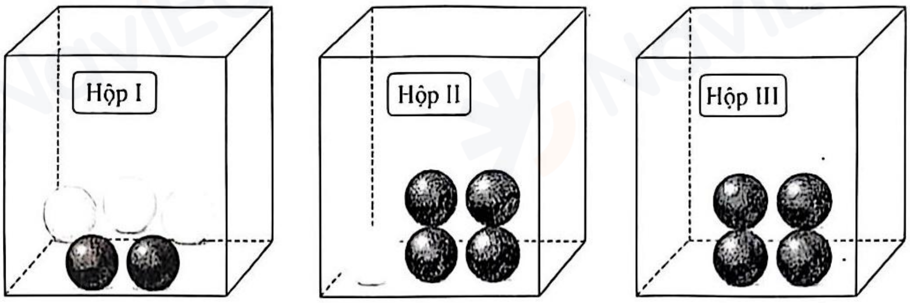
Câu 2. Cho một hình tam giác đều cạnh $a=40$ cm (Hình a). Chia mỗi cạnh của tam giác đó thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau và vẽ ra phía ngoài một tam giác đều nhận đoạn ở giữa làm cạnh đồng thời bỏ đi đoạn ở giữa đó, ta được Hình b). Tiếp tục chia mỗi cạnh của Hình b) thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau và vẽ ra phía ngoài một tam giác đều nhận đoạn ở giữa làm cạnh đồng thời bỏ đi đoạn ở giữa đó, ta được Hình c). Lặp lại quá trình trên; từ Hình c) ta tạo nên Hình d); từ Hình d) ta tạo nên Hình e); … và cứ thế ta sẽ được một dãy các hình, được gọi là dãy hình **Bông tuyết Koch**.



a) b) c) d) e) …

Gọi S_n là diện tích của hình ở bước thứ n (S_0 là diện tích tam giác đều ban đầu). Tính giới hạn của diện tích hình thu được khi quá trình trên lặp lại vô hạn lần, tức là tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 3. Có 3 hộp đựng bi: Hộp I có 3 bi trắng và 2 bi đen. Hộp II có 1 bi trắng và 4 bi đen. Hộp III có 4 bi đen.

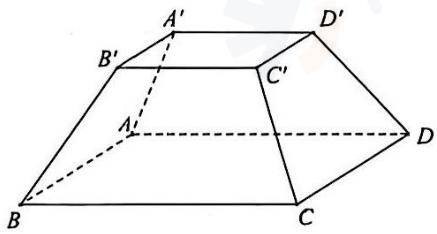


Người ta gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất.

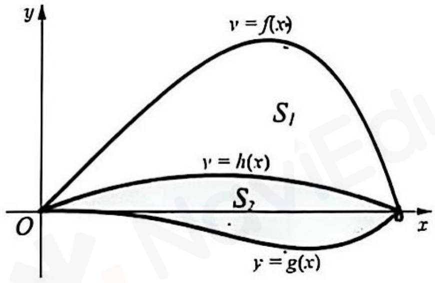
- Nếu con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn thì lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp I bỏ vào hộp II; sau đó lắc đều hộp II và lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 2 viên bi.
- Nếu con xúc xắc xuất hiện mặt lẻ thì lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp I bỏ vào hộp III; sau đó lắc đều hộp III và lấy ngẫu nhiên đồng thời ra 2 viên bi.

Biết rằng 2 viên bi lấy ra ở bước cuối cùng là 2 viên bi màu đen. Tính xác suất để con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

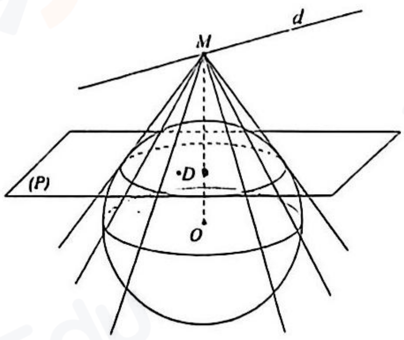
Câu 4. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh $AB = 8,\ A'B' = 4$ và $AA' = 5$. Hỏi khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và CD bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục) ?



Câu 5. Cho đồ thị của các hàm số $f(x) = -x^4 + x$, $g(x) = x^4 - x^3$ và $h(x) = a(x - x^2)$ $(a \in \mathbb{R})$ tạo thành hai miền hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ (S_1 là phần màu trắng, S_2 là phần được tô màu). Biết $S_1 = 2S_2$, hỏi giá trị của biểu thức $1 - 30a$ bằng bao nhiêu?



Câu 6. Trong sảnh một trung tâm hội nghị, các kiến trúc sư lắp đặt một khối cầu trang trí phản quang có mặt ngoài được mô phỏng bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (đơn vị: mét). Một đèn chiếu điểm (spotlight) di chuyển dọc theo trục ray thẳng có phương trình $d: x - 1 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$. Khi đèn ở vị trí M, các tia sáng phát ra tiếp xúc với khối cầu. Tập hợp các tiếp điểm tạo thành một đường tròn nằm trên mặt phẳng (P), là ranh giới giữa vùng sáng và vùng tối (tham khảo hình vẽ bên).



Khi đèn M di chuyển đến vị trí sao cho mặt phẳng (P) đi qua mắt cảm biến cố định tại $D(2; 0; 1)$, hãy tính khoảng cách từ đèn M đến tâm khối cầu (làm tròn đến hàng phần chục của mét).

----------- **HẾT** ---------

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

1016
B
C
D
B
A
A
D
A
D
C
D
A
ĐĐSĐ
SĐĐĐ
SĐSĐ
SĐĐĐ
7
1109
0,42
7,2
-11
19,6

HƯỚNG DẪN GIẢI

Được thực hiện bởi AI Gemini Pro

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Công thức thể tích khối tròn xoay xoay quanh trục hoành:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{3}$$

→ Chọn B.

Câu 2. Hàm số $y=\sqrt{\log_{0.3} x}$ xác định khi biểu thức dưới căn không âm và biểu thức trong logarit dương:

$$\begin{cases} x>0 \\ \log_{0.3} x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\le 0.3^0=1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 1 \Rightarrow D=(0;1]$$

→ Chọn C.

Câu 3. Tam giác SAC vuông cân tại A có diện tích $a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}SA\cdot AC=\frac{1}{2}AC^2=a^2 \Rightarrow AC=a\sqrt{2}$ và $SA=a\sqrt{2}$.

Mặt phẳng $(SAC)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AC mà $SA\perp AC \Rightarrow SA\perp(ABCD)$. Vậy SA là đường cao hình chóp.

Đáy $ABCD$ hình vuông có đường chéo $AC=a\sqrt{2} \Rightarrow$ Cạnh hình vuông bằng a. Diện tích $\Delta ABD=\frac{1}{2}a^2$.

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABD}=\frac{1}{3}\cdot SA\cdot S_{ABD}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

→ Chọn D.

Câu 4. Biến đổi biểu thức vectơ:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$$

Độ dài vectơ $\vec{u}$ chính là độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật:
$|\vec{u}|=AC'=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

→ Chọn B.

Câu 5. Theo định nghĩa nguyên hàm, lấy đạo hàm hai vế:

$$f(x)=(2026^x+C)'=2026^x\cdot\ln 2026$$

$\rightarrow$ Chọn A.

Câu 6. Từ phương trình elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, ta có $a^2=16, b^2=4$.

Mối liên hệ hình học elip: $c^2=a^2-b^2=16-4=12 \Rightarrow c=2\sqrt{3}$.

Tiêu cự của elip bằng $2c=4\sqrt{3}$.

$\rightarrow$ Chọn A.

Câu 7. Phương trình lượng giác cơ bản: $\tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi (k\in\mathbb{Z})$.

$\rightarrow$ Chọn D.

Câu 8. Theo công thức cộng xác suất:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \Rightarrow 0.76=0.4+0.5-P(AB) \Rightarrow P(AB)=0.14$$

Xác suất có điều kiện: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.14}{0.5}=0.28$.

$\rightarrow$ Chọn A.

Câu 9. Thực hiện phép chia đa thức ở tử số cho mẫu số:

$$y=\frac{2x^2+x-5}{x+3}=2x-5+\frac{10}{x+3}$$

Khi $x\rightarrow\pm\infty$, phần dư tiến tới 0, đồ thị có đường tiệm cận xiên là $y=2x-5 \Rightarrow a=2, b=-5$.

Giá trị biểu thức: $a-b=2-(-5)=7$.

$\rightarrow$ Chọn D.

Câu 10. Phân tích bảng số liệu:

Nhóm đầu tiên $[0;1)$ có số sinh viên là 0, nghĩa là không có dữ liệu thực tế nào xuất hiện trong nhóm này.

Đầu mút trái nhỏ nhất của nhóm chứa dữ liệu thực tế (tần số >0) là nhóm $[1;2) \rightarrow$ giá trị đầu mút trái là 1.

Đầu mút phải lớn nhất của nhóm chứa dữ liệu thực tế là nhóm $[4;5) \rightarrow$ giá trị đầu mút phải là 5.

Khoảng biến thiên thực tế của mẫu số liệu được tính bằng hiệu giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng có dữ liệu và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có dữ liệu: $R=5-1=4$.

$\rightarrow$ Chọn C.

Câu 11. Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d:

$$\begin{cases} u_2 = 4u_1 \\ u_3 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 4u_1 \Rightarrow d = 3u_1 \\ u_1 + 2d = 14 \end{cases}$$

Thay thế $d = 3u_1$ vào phương trình dưới: $u_1 + 2(3u_1) = 14 \Leftrightarrow 7u_1 = 14 \Rightarrow u_1 = 2$, suy ra $d = 6$.

Số hạng thứ 2026 là: $u_{2026} = u_1 + 2025d = 2 + 2025 \cdot 6 = 12152$.

$\rightarrow$ Chọn D.

Câu 12. Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là vectơ đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$ thuộc trục Ox.

Vì đường thẳng $d \perp (Oyz)$ nên đường thẳng d song song hoặc trùng với trục Ox. Do đó, vectơ chỉ phương của đường thẳng d cùng phương với $\vec{i}$. Một vectơ chỉ phương hợp lệ là $\overrightarrow{u_2} = (1;0;0)$.

$\rightarrow$ Chọn A.

PHẦN 2. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1.

Một trung tâm y tế được cấp một lô 10000 liều vắc-xin. Gọi $M(t)$ là số liều vắc-xin còn lại sau t ngày ($0 \le t \le 30$). Tốc độ biến thiên số liều vắc-xin là $-M'(t) = k(30-t)^2$ với $k > 0$.

a) Hàm số $M(t)$ có dạng $M(t) = \dfrac{k}{3}(30-t)^3 + C$.

Lời giải: Từ giả thiết, ta có: $M'(t) = -k(30-t)^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế theo biến t:

$$M(t) = \int -k(30-t)^2 dt = \int k(30-t)^2 d(30-t) = \frac{k}{3}(30-t)^3 + C$$

Mệnh đề này ĐÚNG.

b) $k = 1,08$.

Lời giải: Tại thời điểm ban đầu $t = 0$: $M(0) = 10000 \Rightarrow \dfrac{k}{3}(30)^3 + C = 10000 \Rightarrow 9000k + C = 10000$.

Sau đúng 30 ngày ($t = 30$): $M(30) = 280 \Rightarrow \dfrac{k}{3}(0)^3 + C = 280 \Rightarrow C = 280$.

Thay $C = 280$ vào phương trình đầu: $9000k + 280 = 10000 \Rightarrow 9000k = 9720 \Rightarrow k = 1,08$.

Mệnh đề này ĐÚNG.

c) Sau 20 ngày, trung tâm còn lại 460 liều vắc-xin chưa sử dụng.

Lời giải: Hàm số hoàn chỉnh là $M(t) = 0,36(30-t)^3 + 280$.

Tại thời điểm $t=20$: $M(20)=0,36(30-20)^3+280=0,36\cdot 10^3+280=360+280=640$ (liều).

Mệnh đề này SAI (vì đề bài ghi 460 liều).

d) Tốc độ tiêm chủng trung bình trong 15 ngày đầu tiên là 567 liều/ngày.

<u>Lời giải</u>: Tại thời điểm $t=15$: $M(15)=0,36(30-15)^3+280=0,36\cdot 3375+280=1495$ (liều).

Số liều vắc-xin đã tiêm trong 15 ngày đầu: $M(0)-M(15)=10000-1495=8505$ (liều).

Tốc độ tiêm chủng trung bình: $\dfrac{8505}{15}=567$ (liều/ngày).

Mệnh đề này ĐÚNG.

Câu 2.

Lớp 12/1 có 25 nam, 10 nữ (tổng 35). Lớp 12/2 có 20 nam, 15 nữ (tổng 35). Chọn ngẫu nhiên mỗi lớp 2 học sinh để tạo thành nhóm 4 người, sau đó chọn ngẫu nhiên 1 bạn làm nhóm trưởng.

a) Biết rằng nhóm trưởng là học sinh lớp 12/1, xác suất để bạn đó là nữ bằng $\dfrac{3}{7}$.

<u>Lời giải</u>: Vì quy trình chọn đồng đều từ mỗi lớp 2 bạn, việc "nhóm trưởng thuộc lớp 12/1" tương đương với việc chọn ngẫu nhiên có điều kiện 1 học sinh trong số các học sinh lớp 12/1 được chọn. Do tính chất đối xứng, xác suất nhóm trưởng là nữ chính bằng tỉ lệ nữ của lớp 12/1: $P=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$.

Mệnh đề này SAI.

b) Xác suất để bạn nhóm trưởng được bầu là một bạn nữ bằng $\dfrac{5}{14}$.

<u>Lời giải</u>: Xác suất chọn được nhóm trưởng nữ là tổng xác suất nhóm trưởng nữ đến từ lớp 12/1 hoặc lớp 12/2:

$$P(\text{Nữ})=P(\text{Trưởng thuộc 12/1})\cdot P(\text{Nữ}|\ 12/1)+P(\text{Trưởng thuộc 12/2})\cdot P(\text{Nữ}|\ 12/2)$$

$$P(\text{Nữ})=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{35}+\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{35}=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{35}=\frac{5}{14}$$

Mệnh đề này ĐÚNG.

c) Biết rằng nhóm trưởng là một bạn nữ, xác suất để bạn đó đến từ lớp 12/1 bằng $\dfrac{2}{5}$.

<u>Lời giải</u>: Áp dụng công thức xác suất có điều kiện (Bayes):

$$P(12/1|\ \text{Nữ})=\frac{P(\text{Trưởng thuộc 12/1 và là Nữ})}{P(\text{Nữ})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{35}}{\frac{5}{14}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{2}{5}$$

Mệnh đề này ĐÚNG.

d) Biết rằng nhóm trưởng là một bạn nữ, xác suất để ba bạn còn lại đều là nam bằng $\frac{550}{2023}$.

Lời giải: Biến cố "Nhóm trưởng là nữ và 3 bạn còn lại đều là nam" gồm hai trường hợp:

Trường hợp 1: Chọn được 1 nữ, 1 nam từ lớp 12/1 và 2 nam từ lớp 12/2. Sau đó chọn bạn nữ làm trưởng nhóm.

$$P_1=\frac{C_{10}^1\cdot C_{25}^1}{C_{35}^2}\cdot\frac{C_{20}^2}{C_{35}^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{250}{595}\cdot\frac{190}{595}\cdot\frac{1}{4}=\frac{47500}{4\cdot 595^2}$$

Trường hợp 2: Chọn được 2 nam từ lớp 12/1 và 1 nữ, 1 nam từ lớp 12/2. Sau đó chọn bạn nữ làm trưởng nhóm.

$$P_2=\frac{C_{25}^2}{C_{35}^2}\cdot\frac{C_{15}^1\cdot C_{20}^1}{C_{35}^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{300}{595}\cdot\frac{300}{595}\cdot\frac{1}{4}=\frac{90000}{4\cdot 595^2}$$

Xác suất đồng thời: $P(\text{Trưởng Nữ}\cap 3\text{ Nam})=P_1+P_2=\frac{137500}{4\cdot 595^2}=\frac{34375}{595^2}=\frac{1375}{14161}$.

Xác suất có điều kiện cần tìm:

$$P=\frac{\frac{1375}{14161}}{\frac{5}{14}}=\frac{550}{2023}$$

Mệnh đề này ĐÚNG.

Câu 3.

Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị ứng với 100 m. Trạm kiểm soát có vùng nhận diện là khối cầu bán kính $800\text{ m}=8$ đơn vị, tâm $I(1;2;1,2)$. Tàu đi thẳng đều từ $A(16;-13;0)$ lúc 8h00 đến $B(-14;17;0)$ lúc 8h30.

a) Phương trình mặt cầu ranh giới vùng tín hiệu là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1,2)^2=640000$.

Lời giải: Vì hệ trục tọa độ quy ước 1 đơn vị $=100\text{ m}$, nên bán kính mặt cầu tương ứng là $R=\frac{800}{100}=8$. Phương trình mặt cầu đúng phải là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1,2)^2=8^2=64$.

Mệnh đề này SAI.

b) Tại thời điểm 8 giờ 10 phút sáng, tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm.

Lời giải: Thời gian tàu đi từ A đến B là 30 phút. Vecto dịch chuyển $\overrightarrow{AB}=(-30;30;0)$.

Vectơ vận tốc của tàu mỗi phút là: $\vec{v} = \frac{1}{30}\overrightarrow{AB} = (-1;1;0)$.

Tại thời điểm 8h10 (sau $t = 10$ phút), vị trí của tàu là điểm M :

$M = A + 10\vec{v} = (16-10;-13+10;0) = (6;-3;0)$

Khoảng cách từ tàu đến tâm trạm I :

$IM^2 = (6-1)^2 + (-3-2)^2 + (0-1,2)^2 = 5^2 + (-5)^2 + (-1,2)^2 = 51,44$

Vì $IM^2 = 51,44 < R^2 = 64$, tàu nằm bên trong mặt cầu nhận diện.

Mệnh đề này ĐÚNG.

c) Vào lúc 8 giờ 20 phút, tàu ở vị trí gần trạm kiểm soát nhất.

Lời giải: Vị trí tổng quát của tàu theo thời gian t (phút) là: $M(t) = (16-t;-13+t;0)$.

Khoảng cách bình phương từ $M(t)$ tới tâm I :

$IM^2(t) = (16-t-1)^2 + (-13+t-2)^2 + (0-1,2)^2 = 2(t-15)^2 + 1,44$

Biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất khi $t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 15$ phút (tức là vào lúc 8 giờ 15 phút).

Mệnh đề này SAI (vì đề bài ghi 8 giờ 20 phút).

d) Khoảng thời gian tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm không quá 12 phút.

Lời giải: Tàu nằm trong vùng nhận diện khi $IM^2(t) \le 64$:

$2(t-15)^2 + 1,44 \le 64 \Leftrightarrow 2(t-15)^2 \le 62,56 \Leftrightarrow (t-15)^2 \le 31,28 \Leftrightarrow |t-15| \le \sqrt{31,28} \approx 5,59$

Thời gian tàu ở trong vùng nhận diện là: $\Delta t = 2 \cdot 5,59 = 11,18$ phút ≤ 12 phút.

Mệnh đề này ĐÚNG.

Câu 4.

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(2;-3)$.

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số phân thức bậc nhất không bao giờ liên tục và nghịch biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, hàm số chỉ nghịch biến trên từng khoảng xác định $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Mệnh đề này SAI.

b) Đồ thị (C) có tâm đối xứng là điểm $I(1;1)$.

Lời giải: Đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=1$. Giao điểm của hai đường tiệm cận chính là tâm đối xứng $I(1;1)$.

Mệnh đề này ĐÚNG.

c) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) và trục tung không đi qua điểm A.

Lời giải: Giao điểm của (C) với trục tung thu được khi $x=0 \Rightarrow y=-2$, ta có điểm $M(0;-2)$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại M: $y'(0)=\dfrac{-3}{(0-1)^2}=-3$.

Phương trình tiếp tuyến d: $y=-3(x-0)-2 \Leftrightarrow y=-3x-2$.

Thay tọa độ điểm $A(2;-3)$ vào phương trình d: $-3 \neq -3(2)-2=-8$ (không thỏa mãn, đường thẳng d không đi qua A).

Mệnh đề này ĐÚNG.

d) Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nhưng luôn đi qua tâm đối xứng của (C) và cắt (C) tại hai điểm M,N. Diện tích nhỏ nhất của tam giác AMN bằng $4\sqrt{3}$ (đvdt).

Lời giải: Để đơn giản hóa bài toán, ta thực hiện tịnh tiến hệ trục tọa độ về tâm đối xứng $I(1;1)$ bằng cách đặt $X=x-1, Y=y-1$.

Hàm số trở thành: $Y+1=\dfrac{X+3}{X} \Leftrightarrow Y=\dfrac{3}{X}$. Tọa độ điểm A trong hệ trục mới là $A(1;-4)$.

Đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ $I(0;0)$ có dạng $Y=kX$. Để Δ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt M,N thì phương trình hoành độ giao điểm $kX=\dfrac{3}{X} \Leftrightarrow kX^2=3$ phải có nghiệm, suy ra $k>0$.

Tọa độ hai giao điểm đối xứng qua I: $M\left(\sqrt{\dfrac{3}{k}};\sqrt{3k}\right)$ và $N\left(-\sqrt{\dfrac{3}{k}};-\sqrt{3k}\right)$.

Do I là trung điểm của MN, diện tích tam giác AMN tuân theo công thức tính nhanh định thức vectơ:

$$S_{AMN}=2S_{AIM}=|X_AY_M-Y_AX_M|=\left|1\cdot\sqrt{3k}-(-4)\cdot\sqrt{\dfrac{3}{k}}\right|=\sqrt{3k}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{k}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$S_{AMN}=\sqrt{3}\left(\sqrt{k}+\dfrac{4}{\sqrt{k}}\right)\geq\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{\sqrt{k}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{k}}}=4\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{k}=\dfrac{4}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow k=4$. Vậy diện tích nhỏ nhất là $4\sqrt{3}$.

Mệnh đề này ĐÚNG.

PHẦN 3. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1.

Đề bài: Sức chở $P(t)$ của tàu phụ thuộc vào thời gian t (phút) giữa hai chuyến liên tiếp. Khi $10 \le t \le 20$, $P(t) = 1200$. Khi $2 \le t < 10$, số người giảm tỉ lệ thuận với $(10-t)^2$, biết $P(5) = 950$. Tìm $t \in \mathbb{N}^*$ để lợi nhuận ròng trung bình mỗi phút $\dfrac{Q(t)}{t}$ đạt giá trị lớn nhất, với $Q(t) = \dfrac{t}{5}P(t) - 40t^2 + 660t - 1372$.

Lời giải:

Xác định hàm số sức chở $P(t)$ khi $2 \le t < 10$:

Theo giả thiết, lượng người giảm tỉ lệ thuận với $(10-t)^2$, gọi hằng số tỉ lệ là $A > 0$. Ta có công thức:

$$P(t) = 1200 - A(10-t)^2$$

Thay giá trị $t = 5$ phút và $P(5) = 950$ người vào hệ thức trên để tìm A:

$$950 = 1200 - A(10-5)^2 \Rightarrow 250 = 25A \Rightarrow A = 10$$

Vậy với $2 \le t < 10$, hàm số $P(t)$ là:

$$P(t) = 1200 - 10(10-t)^2 = 1200 - 10(100 - 20t + t^2) = -10t^2 + 200t + 200$$

Tối ưu hóa hàm lợi nhuận ròng trung bình mỗi phút $f(t) = \dfrac{Q(t)}{t}$:

Biểu thức tổng quát của hàm số cần tối ưu là:

$$f(t) = \frac{\frac{t}{5}P(t) - 40t^2 + 660t - 1372}{t} = \frac{1}{5}P(t) - 40t + 660 - \frac{1372}{t}$$

Ta tiến hành khảo sát hàm số này trên hai khoảng thời gian:

Khảo sát trên khoảng thứ nhất: $10 \le t \le 20$

Khi đó $P(t) = 1200$ (trạng thái đầy tải). Thay vào biểu thức $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{5}(1200) - 40t + 660 - \frac{1372}{t} = 240 - 40t + 660 - \frac{1372}{t} = 900 - 40t - \frac{1372}{t}$$

Tính đạo hàm của $f(t)$ trên đoạn này:

$$f'(t) = -40 + \frac{1372}{t^2}$$

Vì $t \geq 10 \Rightarrow t^2 \geq 100 \Rightarrow \frac{1372}{t^2} \leq 13,72$.

Do đó, $f'(t) \leq -40 + 13,72 = -26,28 < 0$ với mọi $t \in [10;20]$.

Hàm số nghịch biến trên $[10;20]$, nghĩa là giá trị lớn nhất trong khoảng này đạt tại đầu mút trái $t = 10$:

$$f(10) = 900 - 40(10) - \frac{1372}{10} = 900 - 400 - 137,2 = 362,8$$

Khảo sát trên khoảng thứ hai: $2 \leq t < 10$

Khi đó $P(t) = -10t^2 + 200t + 200$. Thay vào biểu thức $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{5}(-10t^2 + 200t + 200) - 40t + 660 - \frac{1372}{t}$$

$$f(t) = (-2t^2 + 40t + 40) - 40t + 660 - \frac{1372}{t} = -2t^2 + 700 - \frac{1372}{t}$$

Tính đạo hàm của $f(t)$ trên đoạn này:

$$f'(t) = -4t + \frac{1372}{t^2} = \frac{-4t^3 + 1372}{t^2}$$

Giải phương trình đạo hàm bằng 0:

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -4t^3 + 1372 = 0 \Rightarrow t^3 = 343 \Rightarrow t = 7$$

Giá trị $t = 7$ hoàn toàn thỏa mãn điều kiện $2 \leq t < 10$. Qua bảng xét dấu đạo hàm:

Với $2 \leq t < 7 \Rightarrow f'(t) > 0$ (hàm số đồng biến).

Với $7 < t < 10 \Rightarrow f'(t) < 0$ (hàm số nghịch biến).

Do đó, hàm số đạt cực đại tại điểm $t = 7$. Giá trị cực đại là:

$$f(7) = -2(7^2) + 700 - \frac{1372}{7} = -98 + 700 - 196 = 406$$

Kết luận: So sánh hai kết quả thu được ở cả hai khoảng:

Lợi nhuận trung bình lớn nhất ở khoảng đầu là $362,8$ (tại $t = 10$).

Lợi nhuận trung bình lớn nhất ở khoảng sau là 406 (tại $t = 7$).

Vì $406 > 362,8$, giá trị lớn nhất của lợi nhuận ròng trung bình mỗi phút trên toàn miền xác định đạt được khi thời gian giữa hai chuyến tàu liên tiếp bằng 7 phút.

Đáp số: 7

Câu 2.

Đề bài: Cho tam giác đều cạnh $a = 40$ cm (S_0 là diện tích ban đầu). Qua các bước thiết lập hình Bông tuyết Koch, tính giới hạn diện tích hình thu được $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

Diện tích tam giác đều ban đầu là:

$$S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 400\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

Theo quy luật cấu trúc của bông tuyết Koch:

Tại bước thứ 1, từ 3 cạnh ban đầu, mỗi cạnh mọc thêm 1 tam giác đều nhỏ có cạnh bằng $\frac{a}{3}$. Số tam giác mới là 3, diện tích mỗi tam giác là $\frac{1}{9}S_0$.

Tổng quát, ở bước thứ n, số tam giác mới mọc ra là $3\cdot 4^{n-1}$, diện tích của mỗi tam giác mới này bằng $\left(\frac{1}{9}\right)^n S_0$.

Tổng diện tích bông tuyết Koch sau vô hạn bước là tổng của một cấp số lùi vô hạn:

$$S_\infty = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(3\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{1}{9^n}S_0\right) = S_0 + \frac{3}{9}S_0\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = S_0 + \frac{1}{3}S_0\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}$$

$$S_\infty = S_0 + \frac{1}{3}S_0\cdot\frac{9}{5} = S_0 + \frac{3}{5}S_0 = \frac{8}{5}S_0$$

Thay giá trị S_0 vào tính toán:

$$S_\infty = \frac{8}{5}\cdot 400\sqrt{3} = 640\sqrt{3} \approx 640\cdot 1,73205 = 1108,51\ (\text{cm}^2)$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được kết quả bằng 1109.

Đáp số: 1109

Câu 3.

Đề bài: Hộp I (3W, 2B), Hộp II (1W, 4B), Hộp III (4B). Gieo xúc xắc: Mặt chẵn $\rightarrow$ lấy 2 bi từ Hộp I sang Hộp II, rồi lấy từ Hộp II ra 2 bi. Mặt lẻ $\rightarrow$ lấy 2 bi từ Hộp I sang Hộp III, rồi lấy từ Hộp III ra 2 bi. Biết 2 bi lấy ra cuối cùng đều màu đen. Tính xác suất xúc xắc xuất hiện mặt chẵn.

Lời giải:

Gọi E là biến cố xúc xắc mặt chẵn ($P(E)=0,5$) và O là biến cố mặt lẻ ($P(O)=0,5$). Gọi B_2 là biến cố 2 bi lấy ra cuối cùng đều màu đen. Ta cần tìm xác suất có điều kiện $P(E|\ B_2)$.

Tính $P(B_2|\ E)$ (Trường hợp mặt chẵn - thao tác trên Hộp II):

Bốc 2 bi từ Hộp I (3 trắng, 2 đen) sang Hộp II:

Bốc 2 trắng (Xác suất $\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$): Hộp II thành (3 trắng, 4 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp II: $\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{6}{21}$.

Bốc 1 trắng, 1 đen (Xác suất $\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}$): Hộp II thành (2 trắng, 5 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp II: $\frac{C_5^2}{C_7^2}=\frac{10}{21}$.

Bốc 2 đen (Xác suất $\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$): Hộp II thành (1 trắng, 6 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp II: $\frac{C_6^2}{C_7^2}=\frac{15}{21}$.

$$P(B_2|\ E)=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{21}+\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{15}{21}=\frac{18+60+15}{210}=\frac{93}{210}=\frac{31}{70}$$

Tính $P(B_2|\ O)$ (Trường hợp mặt lẻ - thao tác trên Hộp III):

Bốc 2 bi từ Hộp I sang Hộp III (ban đầu chỉ có 4 đen):

Bốc 2 trắng (Xác suất $\frac{3}{10}$): Hộp III thành (2 trắng, 4 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp III: $\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}$.

Bốc 1 trắng, 1 đen (Xác suất $\frac{6}{10}$): Hộp III thành (1 trắng, 5 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp III: $\frac{C_5^2}{C_6^2}=\frac{10}{15}$.

Bốc 2 đen (Xác suất $\frac{1}{10}$): Hộp III thành (0 trắng, 6 đen). Xác suất bốc 2 đen từ Hộp III: $\frac{C_6^2}{C_6^2}=1$.

$$P(B_2|\ O)=\frac{3}{10}\cdot\frac{6}{15}+\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{15}+\frac{1}{10}\cdot 1=\frac{18+60+15}{150}=\frac{93}{150}=\frac{31}{50}$$

Áp dụng công thức Bayes:

$$P(E|\,B_2)=\frac{P(E)\cdot P(B_2|\,E)}{P(E)\cdot P(B_2|\,E)+P(O)\cdot P(B_2|\,O)}=\frac{\frac{31}{70}}{\frac{31}{70}+\frac{31}{50}}=\frac{\frac{1}{70}}{\frac{1}{70}+\frac{1}{50}}=\frac{50}{50+70}=\frac{5}{12}\approx 41,67\%$$

Đáp số: 41.67%

Câu 4.

Đề bài: Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=8, A'B'=4, AA'=5$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và CD.

Lời giải:

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với tâm đáy lớn $ABCD$ là gốc tọa độ $O(0;0;0)$, các trục Ox, Oy song song với các cạnh của hình vuông đáy.

Tọa độ các đỉnh đáy lớn: $A(-4;-4;0)$, $B(4;-4;0)$, $C(4;4;0)$, $D(-4;4;0)$.

Gọi h là chiều cao của hình chóp cụt (khoảng cách giữa hai tâm đáy O và O'). Hình chiếu vuông góc của A' xuống đáy $ABCD$ là $H(-2;-2;0)$.

Khoảng cách $AH=\sqrt{(-2-(-4))^2+(-2-(-4))^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Chiều cao $h=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$.

Tọa độ đỉnh đáy nhỏ: $A'(-2;-2;\sqrt{17})$.

Ta cần tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và CD:

Đường thẳng AA' đi qua $A(-4;-4;0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{AA'}=(2;2;\sqrt{17})$.

Đường thẳng CD đi qua $C(4;4;0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{CD}=(-8;0;0)$, chọn vectơ cùng phương $\overrightarrow{u_{2'}}=(1;0;0)$.

Vectơ tích có hướng: $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_{2'}}]=(0;\sqrt{17};-2)$.

Vectơ nối hai điểm thuộc hai đường thẳng: $\overrightarrow{AC}=(8;8;0)$.

Công thức khoảng cách:

$$d(AA',CD)=\frac{|[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_{2'}}]\cdot\overrightarrow{AC}|}{|[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_{2'}}]|}=\frac{|0\cdot 8+\sqrt{17}\cdot 8+(-2)\cdot 0|}{\sqrt{0^2+17+(-2)^2}}=\frac{8\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\approx 7,198$$

Làm tròn đến hàng phần chục ta được $7,2$.

Đáp số: 7.2

Câu 5.

Đề bài: Cho đồ thị các hàm số $f(x)=-x^4+x$, $g(x)=x^4-x^3$ và $h(x)=a(x-x^2)$ tạo thành hai miền diện tích S_1,S_2 như hình vẽ. Biết $S_1=2S_2$. Tính giá trị của biểu thức $1-30a$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$:

$-x^4+x=x^4-x^3 \Leftrightarrow 2x^4-x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)(2x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Diện tích tổng cộng của hai miền phẳng $S=S_1+S_2$ giới hạn từ $x=0$ đến $x=1$:

$$S=\int_0^1(f(x)-g(x))dx=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$$

Theo giả thiết $S_1=2S_2 \Rightarrow S=3S_2 \Rightarrow S_2=\frac{1}{3}S=\frac{7}{60}$.

Miền S_2 được giới hạn bởi đồ thị $h(x)$ ở phía trên và $g(x)$ ở phía dưới từ $x=0$ đến $x=1$:

$$S_2=\int_0^1(h(x)-g(x))dx=\int_0^1\left(a(x-x^2)-(x^4-x^3)\right)dx$$

$$S_2=a\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{a}{6}-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{6}+\frac{1}{20}$$

Đồng nhất hai kết quả của S_2:

$$\frac{a}{6}+\frac{1}{20}=\frac{7}{60} \Rightarrow \frac{a}{6}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15} \Rightarrow a=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

Tính giá trị biểu thức đề bài yêu cầu: $1-30a=1-30\cdot\frac{2}{5}=1-12=-11$.

Đáp số: -11

Câu 6.

Đề bài: Khối cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2=9$. Đèn chiếu điểm M di chuyển trên đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-3}$. Tiếp điểm từ M đến mặt cầu tạo thành đường tròn nằm trên mặt phẳng (P). Khi M di chuyển sao cho (P) đi qua điểm $D(2;0;1)$, tính khoảng cách từ M đến tâm mặt cầu.

Lời giải:

Mặt cầu có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$.

Giả sử đèn chiếu điểm M có tọa độ $(x_0;y_0;z_0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng tiếp điểm (P) (mặt phẳng cực đối với mặt cầu tâm tại gốc tọa độ) có dạng phương trình tuyến tính:

$$x_0x + y_0y + z_0z = R^2 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + z_0z = 9$$

Vì mặt phẳng (P) luôn đi qua điểm cố định $D(2;0;1)$ nên tọa độ của D phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P):

$$2x_0 + 0 \cdot y_0 + 1 \cdot z_0 = 9 \Leftrightarrow 2x_0 + z_0 = 9 \quad (1)$$

Do điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên đường thẳng d, ta biểu diễn tọa độ của M theo tham số t:

$$\begin{cases} x_0 = 1 + t \\ y_0 = 1 + 2t \\ z_0 = 2 - 3t \end{cases}$$

Thay các biểu thức tham số này vào phương trình (1):

$$2(1+t) + (2-3t) = 9 \Leftrightarrow 4 - t = 9 \Rightarrow t = -5$$

Từ đó tìm được tọa độ cụ thể của điểm M:

$$\begin{cases} x_0 = 1 - 5 = -4 \\ y_0 = 1 + 2(-5) = -9 \Rightarrow M(-4;-9;17) \\ z_0 = 2 - 3(-5) = 17 \end{cases}$$

Khoảng cách từ đèn M đến tâm khối cầu $O(0;0;0)$ là:

$$OM = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2 + 17^2} = \sqrt{16 + 81 + 289} = \sqrt{386} \approx 19,647 \text{ (m)}$$

Làm tròn đến hàng phần chục của mét theo yêu cầu, ta được $19,6$.

Đáp số: 19.6

HẾT