

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức  $P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ .

a. Rút gọn biểu thức  $P$ .

b. Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P$  nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho  $P(x)$  là đa thức có tất cả các hệ số nguyên. Biết rằng,  $P(2025)$  và  $P(2026)$  là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng, đa thức  $P(x)$  không có nghiệm nguyên.

Câu 3 (1,0 điểm). Lớp 9D có 45 học sinh, mỗi bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: đá cầu, bóng đá. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Xét các biến cố:

A: "Học sinh được chọn biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá";

B: "Học sinh được chọn biết chơi môn đá cầu".

Biết rằng, xác suất của biến cố A bằng  $\frac{2}{9}$ , xác suất của biến cố B bằng  $\frac{2}{3}$ . Tính xác suất của biến cố C: "Học sinh được chọn biết chơi môn bóng đá".

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho số nguyên dương  $n$  là tích của ba số nguyên tố phân biệt. Biết rằng, tổng tất cả các ước nguyên dương của  $n$  bằng  $2n-16$ . Chứng minh rằng,  $n-8$  chia hết cho 6.

b. Cho  $p$  là số nguyên tố thoả mãn  $p-1$  chia hết cho 4. Chứng minh rằng,  $p^3 - p^2 - 4$  không phải là số chính phương.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $BH$  và  $CQ$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ . Tiếp tuyến tại  $B$  và tại  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $M$ . Hai đường thẳng  $OM$  và  $BC$  cắt nhau tại  $N$ .

a. Chứng minh rằng,  $\widehat{ABO} = \widehat{BHN}$ .

b. Đường thẳng  $OM$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  và  $S$  ( $D$  nằm giữa  $O$  và  $M$ ). Hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AFN$ . Chứng minh rằng, hai đường thẳng  $OI$  và  $AS$  vuông góc với nhau.

c. Hai đường thẳng  $AM$  và  $BC$  cắt nhau tại  $E$ . Hai đường thẳng  $AN$  và  $HQ$  cắt nhau tại  $G$ . Chứng minh rằng, hai đường thẳng  $GE$  và  $OM$  song song với nhau.

Câu 6 (1,0 điểm). Bạn Thái viết ra bảng 100 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn  $2^{98}$ . Đối với mỗi cặp số  $(a, b)$  được bạn Thái viết ra, bạn Nguyên viết số  $a+b - \text{UCLN}(a, b)$  trên bảng. Chứng minh rằng, có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.