

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{6}{4x-9} \right) : \left( \frac{2}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{x-1}} \right), \text{ với } x \geq 0; x \neq 1; x \neq \frac{9}{4}.$$

Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P$  nhận giá trị nguyên.

2) Cho đa thức  $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + ax^2 + 3x - 3$ , trong đó  $a$  là số thực. Tính

$P(1)$  biết  $P(1 + \sqrt[3]{2}) = 0$ .

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình  $x^2 - 5x + 4\sqrt{3x+1} - 4 = 0$ .

2) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2 = 4y \\ y(x-y)^2 + 3x^2 - 7y = -6 \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn phương trình

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 22x + 2y + 8 = 0$$

2) Cho 3 số tự nhiên, biết tổng của hai số bất kỳ trong 3 số đó là một số chính phương.

Chứng minh rằng trong 3 số đã cho có không quá một số lẻ.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $AB < AC$  và các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $EF$  và  $AH$ . Kẻ  $IJ$  song song với  $BC$  ( $J \in HE$ ). Đường thẳng  $AJ$  cắt  $BC$  tại  $M$ .

a) Chứng minh  $\widehat{AEF} = \widehat{AMB}$ .

b) Gọi  $L$  là giao điểm của hai đường thẳng  $EF$  và  $BC$ . Chứng minh  $AC.LE = AB.LC$ .

2) Cho đường tròn  $(O; R)$  cố định. Tam giác  $ABC$  thay đổi ngoại tiếp đường tròn  $(O; R)$ , có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Đường thẳng  $(d)$  thay đổi và luôn đi qua tâm  $O$ ,  $(d)$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ . Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác  $AMN$  theo  $R$ .

**Câu 5. (1,0 điểm)**

1) Trên mặt phẳng cho  $2 \times 2026$  điểm phân biệt, trong đó không có bất kỳ ba điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2026 điểm trong các điểm đã cho bằng màu đỏ và tô 2026 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại 2026 đoạn thẳng mà mỗi đoạn thẳng có 2 điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ - xanh và 2 đoạn thẳng bất kỳ trong số các đoạn thẳng đó không có điểm chung.

2) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thoả mãn  $a + b + c = ab + bc + ca$ . Chứng minh

$$\frac{3}{1+a} + \frac{3}{1+b} + \frac{3}{1+c} - \frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 4$$

----- HẾT -----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

$$\frac{a+bc}{abc} = \frac{a}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$