MỤC LỤC

PHẦN I Đại số - Giải tích 21

CHƯƠNG 1 Hàm số lượng giác - Phương trình lượng giác 23

1 Công thức lượng giác cần nắm 23

A Tóm tắt lý thuyết 23

2 Hàm số lượng giác 26

A Tóm tắt lý thuyết 26

B Các dạng toán thường gặp 29

Dạng 2.1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác 29

1 Bài tập vận dụng 30

2 Bài tập tự luyện 32

Dạng 2.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác 33

1 Ví dụ 33

2 Bài tập áp dụng 34

3 Bài tập rèn luyện 38

Dạng 2.3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác 39

1 Ví dụ 40

2 Bài tập áp dụng 40

3 Bài tập rèn luyện 41

3 Phương trình lượng giác 41

A Phương trình lượng giác cơ bản 41

1 Ví dụ 42

2 Bài tập áp dụng 42

3	Bài tập rèn luyện	43
B	Một số kỹ năng giải phương trình lượng giác	44
	Dạng 3.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết	44
1	Ví dụ	44
2	Bài tập áp dụng	46
3	Bài tập rèn luyện	51
	Dạng 3.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng	52
1	Ví dụ	52
2	Bài tập áp dụng	53
3	Bài tập rèn luyện	56
	Dạng 3.3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos	56
1	Ví dụ	57
2	Bài tập áp dụng	58
3	Bài tập rèn luyện	59
	Dạng 3.4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích	61
1	Ví dụ	61
2	Bài tập áp dụng	63
3	Bài tập rèn luyện	65
4	Phương trình lượng giác đưa về bậc hai và bậc cao cùng một hàm lượng giác	89
A	Tóm tắt lý thuyết	89
B	Dạng toán và bài tập	89
1	Ví dụ	89
2	Bài tập vận dụng	92
3	Bài tập tự luyện	104

5 Phương trình bậc nhất đối với sin và cos 108
A Tóm tắt lý thuyết 108
B Ví dụ và bài tập 109
1 Ví dụ 109
2 Bài tập áp dụng 114
3 Bài tập rèn luyện 119
6 Phương trình lượng giác đẳng cấp (bậc 2, bậc 3, bậc 4) 121
A Tóm tắt lý thuyết 121
B Ví dụ 122
C Bài tập áp dụng 123
7 Phương trình lượng giác đối xứng 131
A Tóm tắt lý thuyết 131
B Ví dụ 131
C Bài tập áp dụng 132
D Bài tập rèn luyện 138
8 Một số phương trình lượng giác khác 139
A Tóm tắt lý thuyết 139
B Ví dụ 140
C Bài tập áp dụng 141
D Bài tập rèn luyện 145
9 Phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt 146
A Tóm tắt lý thuyết 146
B Ví dụ 147
C Bài tập áp dụng 150

D Bài tập rèn luyện 155

10 Bài tập ôn cuối chương I 156

CHƯƠNG 2 Tổ hợp và xác suất 169

1 Các quy tắc đếm cơ bản 169

A Tóm tắt lý thuyết 169

B Dạng toán và bài tập 170

1 Ví dụ 170

Dạng 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc cộng 170

Dạng 1.2. Bài toán sử dụng quy tắc nhân 171

Dạng 1.3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ 172

1 Bài tập áp dụng 172

2 Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp 187

A Tóm tắt lý thuyết 187

B Ví dụ minh họa 189

C Dạng toán và bài tập 191

Dạng 2.1. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình 191

1 Ví dụ 191

2 Bài tập áp dụng 194

3 Bài tập rèn luyện 197

Dạng 2.2. Các bài toán sử dụng hoán vị 199

1 Ví dụ 199

2 Bài tập áp dụng 201

3 Bài tập rèn luyện 203

Dạng 2.3. Các bài toán sử dụng chỉnh hợp 204

1 Ví dụ 204

2 Bài tập áp dụng 206

3 Bài tập rèn luyện 208

Dạng 2.4. Các bài toán sử dụng tổ hợp 209

1 Ví dụ 209

2 Bài tập áp dụng 211

3 Bài tập rèn luyện 213

3 Nhị thức Newton 215

A Nhị thức Newton 215

B Tam giác Pascal 216

C Dạng toán và bài tập 216

Dạng 3.1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước 216

1 Ví dụ minh họa 217

2 Bài tập áp dụng 219

3 Bài tập rèn luyện 221

Dạng 3.2. Tìm hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$ 222

1 Ví dụ 223

2 Bài tập áp dụng 225

3 Bài tập rèn luyện 228

Dạng 3.3. Chứng minh hoặc tính tổng 232

1 Ví dụ 233

2 Bài tập áp dụng 235

3 Bài tập rèn luyện 236

4	Biến cố và xác suất của biến cố	237
A	Phép thử	237
B	Biến cố	238
C	Xác suất	238
	Dạng 4.1. Chọn hoặc sắp xếp đồ vật	241
D	Lí thuyết	241
E	Ví dụ	242
F	Bài tập rèn luyện	244
G	Bài tập tự luyện	247
	Dạng 4.2. Chọn hoặc sắp xếp người	250
H	Lí thuyết	250
I	Ví dụ	251
J	Bài tập rèn luyện	253
K	Bài tập tự luyện	256
	Dạng 4.3. Chọn hoặc sắp xếp số	262
L	Lí thuyết	262
M	Ví dụ	262
N	Bài tập rèn luyện	266
O	Bài tập tự luyện	269
5	Các quy tắc tính xác suất	277
A	Tóm tắt lý thuyết	277
1	Quy tắc cộng xác suất	277
2	Quy tắc nhân xác suất	280
B	Bài tập áp dụng	282

6 Bài tập ôn chương 2 290

CHƯƠNG 3 Dãy số - Cấp số cộng - Cấp số nhân 301

1 Phương pháp quy nạp toán học 301

A Tóm tắt lý thuyết 301

B Dạng toán và bài tập 301

Dạng 1.1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n 301

1 Ví dụ 301

2 Bài tập áp dụng 304

3 Bài tập rèn luyện 308

2 Dãy số 314

A Tóm tắt lý thuyết 314

1 Định nghĩa 314

2 Cách cho một dãy số 314

3 Dãy số tăng, dãy số giảm 314

4 Dãy số bị chặn 315

B Dạng toán và bài tập 315

Dạng 2.1. Tìm số hạng của dãy số cho trước 315

1 Ví dụ 315

2 Bài tập áp dụng 317

3 Bài tập rèn luyện 319

Dạng 2.2. Xét tính tăng, giảm của dãy số 321

1 Ví dụ 321

2 Bài tập áp dụng 322

3 Bài tập rèn luyện 324

Dạng 2.3. Tính bị chặn của dãy số 327
1 Ví dụ 327
2 Bài tập áp dụng 328
3 Bài tập rèn luyện 330
3 Cấp số cộng 332
A Tóm tắt lý thuyết 332
B Dạng toán và bài tập 333
1 Ví dụ 333
2 Bài tập áp dụng 336
4 Cấp số nhân 356
A Tóm tắt lý thuyết 356
B Dạng toán và bài tập 357
1 Ví dụ 357
2 Bài tập áp dụng 359
3 Bài tập rèn luyện 363
CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN 367
1 Giới hạn của dãy số 367
A Tóm tắt lí thuyết 367
1 Giới hạn của dãy số 367
2 Các định lý về giới hạn hữu hạn 367
3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn 367
4 Giới hạn vô cực 368
B Các dạng toán 368
Dạng 1.1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn 368

Dạng 1.2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức 371

Dạng 1.3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n 371

Dạng 1.4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ 377

Dạng 1.5. Giới hạn dãy số chứa căn thức 379

2 Giới hạn hàm số 389

A Tóm tắt lý thuyết 389

1 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm 389

2 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực 390

3 Giới hạn vô cực của hàm số 391

B Các dạng toán 393

Dạng 2.1. Giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{0}{0}$ 393

Dạng 2.2. Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$ 410

Dạng 2.3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên. 414

3 Hàm số liên tục 421

A Tóm tắt lí thuyết 421

1 Hàm số liên tục tại một điểm 421

2 Hàm số liên tục trên một khoảng 421

3 Một số định lí cơ bản 421

B Các dạng toán 422

Dạng 3.1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm 422

Dạng 3.2. Hàm số liên tục trên một tập hợp 428

Dạng 3.3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn 431

Dạng 3.4. Chứng minh phương trình có nghiệm 434

4 Đề Kiểm tra Chương IV 440

A Đề số 1a 440
B Đề số 1b 442
C Đề số 2a 443
D Đề số 2b 445
E Đề số 3a 446
F Đề số 3b 450
G Đề số 4a 453
H Đề số 4b 454
I Đề số 5a 456
J Đề số 5b 458
K Đề số 6a 460
L Đề số 6b 462

CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM 465

1 Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 465

A Tóm tắt lí thuyết 465
1 Đạo hàm tại một điểm 465
2 Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số 465
3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm 465
4 Ý nghĩa vật lí của đạo hàm 465
5 Đạo hàm trên một khoảng 466
6 Đạo hàm một bên 466
B Các dạng toán 466
Dạng 1.1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa 466

Dạng 1.2. Ý nghĩa của đạo hàm vào một số bài toán 469

Dạng 1.3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số 470

Dạng 1.4. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số 474

2 Quy tắc tính đạo hàm 476

A Tóm tắt lí thuyết 476

1 Quy tắc tính đạo hàm 476

2 Các công thức 476

B Ví dụ 476

C Các dạng toán 478

Dạng 2.1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức 478

Dạng 2.2. Một số ứng dụng của đạo hàm 483

3 Đạo hàm của các hàm số lượng giác 487

A Tóm tắt lí thuyết 487

1 Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$ 487

2 Đạo hàm của các hàm số lượng giác 487

B Các dạng toán 487

Dạng 3.1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác 487

Dạng 3.2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình 494

Dạng 3.3. Tính giới hạn của hàm số có chứa biểu thức lượng giác 500

4 Đạo hàm cấp hai 506

A Tóm tắt lý thuyết 506

B Các dạng toán 506

Dạng 4.1. Tính đạo hàm cấp hai - Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai 506

Dạng 4.2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2 510

Dạng 4.3. Vận dụng đạo hàm cấp hai chứng minh đẳng thức tổ hợp 513

5 Đề Kiểm tra Chương 5 518

A Đề số 1a 518

B Đề số 1b 519

C Đề số 2a 521

D Đề số 2b 522

E Đề số 3a 524

F Đề số 3b 525

PHẦN II Hình học 529

CHƯƠNG 1 Phép biến hình 531

1 Mở đầu về phép biến hình 531

A Tóm tắt lý thuyết 531

2 Phép tịnh tiến 531

A Tóm tắt lý thuyết 531

B Dạng toán và bài tập 532

Dạng 2.1. Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến 532

1 Ví dụ 532

2 Bài tập áp dụng 534

3 Bài tập rèn luyện 536

Dạng 2.2. Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh 536

1 Ví dụ 537

2 Bài tập áp dụng 538

3 Bài tập rèn luyện 538

Dạng 2.3. Các bài toán ứng dụng của phép tịnh tiến 539
1 Ví dụ 539
2 Bài tập áp dụng 541
3 Bài tập rèn luyện 542
3 Phép đối xứng trục (Bài đọc thêm) 542
A Định nghĩa 542
B Biểu thức tọa độ 542
C Tính chất 543
D Trục đối xứng của một hình 543
4 Phép quay 543
A Tóm tắt lý thuyết 543
B Dạng toán và bài tập 544
Dạng 4.1. Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép quay 544
1 Ví dụ 544
2 Bài tập áp dụng 545
3 Bài tập rèn luyện 545
Dạng 4.2. Tìm phương trình ảnh của một đường tròn qua phép quay 546
1 Ví dụ 546
2 Bài tập áp dụng 546
3 Bài tập rèn luyện 547
5 Phép đối xứng tâm 552
A Tóm tắt lý thuyết 552
6 Phép vị tự và phép đồng dạng 552
A Tóm tắt lý thuyết 552

B Dạng toán và bài tập 554

Dạng 6.1. Phép vị tự trong hệ tọa độ Oxy 554

1 Ví dụ 554

2 Bài tập áp dụng 556

CHƯƠNG 2 Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian 561

1 Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 561

A Tóm tắt lý thuyết 561

B Dạng toán và bài tập 563

Dạng 1.1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng 563

1 Ví dụ 563

2 Bài tập áp dụng 564

3 Bài tập tự luyện 566

Dạng 1.2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) 568

1 Ví dụ 568

2 Bài tập áp dụng 570

3 Bài tập rèn luyện 576

Dạng 1.3. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α). 580

1 Ví dụ 580

2 Bài tập áp dụng 581

3 Bài tập tự luyện 588

Dạng 1.4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng 591

1 Ví dụ 591

2 Bài tập áp dụng 593

3 Bài tập rèn luyện 600

Dạng 1.5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy 603

1 Ví dụ 603

2 Bài tập áp dụng 604

3 Bài tập rèn luyện 608

2 Hai đường thẳng song song. 608

A Tóm tắt lý thuyết 608

B Dạng toán và bài tập 609

Dạng 2.1. Chứng minh hai đường thẳng song song. 609

1 Ví dụ 610

2 Bài tập áp dụng 611

3 Bài tập rèn luyện 612

Dạng 2.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song. 614

1 Ví dụ 614

2 Bài tập áp dụng 616

3 Bài tập rèn luyện 619

3 Đường thẳng song song với mặt phẳng 623

A Tóm tắt lý thuyết 623

B Dạng toán và bài tập 624

Dạng 3.1. Chứng minh dường thẳng a song song với mặt phẳng (P) 624

1 Ví dụ 624

Dạng 3.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng 625

Dạng 3.3. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng 626

1 Bài tập áp dụng 627

4 Hai mặt phẳng song song 658

A Tóm tắt lý thuyết 658

1 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt 658

2 Các định lí 658

3 Ví dụ 660

B Bài tập áp dụng 660

5 Bài tập ôn cuối chương 2 669

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ VUÔNG GÓC 675

1 Vectơ trong không gian 675

A Tóm tắt lí thuyết 675

1 Các định nghĩa 675

2 Các quy tắc tính toán với véctơ 675

3 Một số hệ thức véctơ trọng tâm, cần nhớ 676

4 Điều kiện đồng phẳng của ba véctơ 676

5 Phân tích một véctơ theo ba véctơ không đồng phẳng 676

6 Tích vô hướng của hai véctơ 676

B Các dạng toán 677

Dạng 1.1. Xác định véctơ và các khái niệm có liên quan 677

Dạng 1.2. Chứng minh đẳng thức véctơ 678

Dạng 1.3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vecto 681

Dạng 1.4. Tích vô hướng của hai véctơ 684

Dạng 1.5. Chứng minh ba véctơ đồng phẳng 687

Dạng 1.6. Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng cho trước 688

Dạng 1.7. Ứng dụng véctơ chứng minh bài toán hình học 690

2 Hai đường thẳng vuông góc 697

A Tóm tắt lí thuyết 697

1 Tích vô hướng của hai vec-tơ trong không gian 697

2 Góc giữa hai đường thẳng 697

B Các dạng toán 698

Dạng 2.1. Xác định góc giữa hai vec-tơ 698

Dạng 2.2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian 699

Dạng 2.3. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng. 703

Dạng 2.4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba 706

3 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 710

A Tóm tắt lí thuyết 710

1 Định nghĩa 710

2 Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 710

3 Tính chất 710

4 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng 711

5 Phép chiếu vuông góc và định lý ba đường vuông góc 712

B Các dạng toán 713

Dạng 3.1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 713

Dạng 3.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 720

Dạng 3.3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước 726

C Bài tập tổng hợp 729

4	Hai mặt phẳng vuông góc	734
A	Tóm tắt lí thuyết	734
1	Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng	734
2	Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau	734
3	Diện tích hình chiếu của một đa giác	734
4	Hai mặt phẳng vuông góc	734
5	Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương	735
6	Hình chóp đều và hình chóp cụt đều	735
B	Các dạng toán	736
	Dạng 4.1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng	736
	Dạng 4.2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác	740
	Dạng 4.3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc	742
	Dạng 4.4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng	746
5	Khoảng cách	750
A	Tóm tắt lý thuyết	750
1	Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	750
2	Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng	750
3	Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng song song	750
4	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song	750
5	Đường thẳng vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	751
B	Các dạng toán	751
	Dạng 5.1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng	751
	Dạng 5.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	752
	Dạng 5.3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song	760

Dạng 5.4. Đoạn vuông góc chung, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 764

6 Đề Kiểm tra Chương 3 778

A Đề số 1a 778

B Đề số 1b 780

C Đề số 2a 782

D Đề số 2b 783

E Đề số 3a 784

F Đề số 3b 785

PHẦN

I

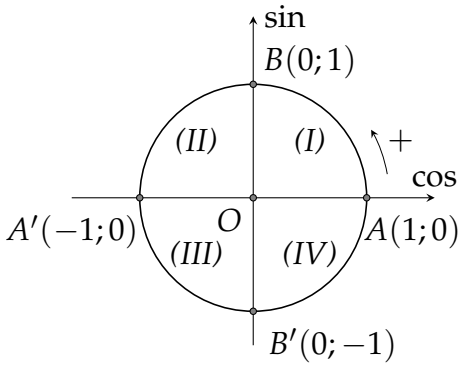
ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NẮM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



	Góc phần tư			
Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

② Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\tan x\cot x=1$

③ Cung góc liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung hơn kém π
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$

Cung phụ nhau	Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

④ Công thức cộng

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$	$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$	$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

⑤ Công thức nhân đôi, công thức hạ bậc

Công thức nhân đôi	Công thức hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$	$\cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$
Công thức nhân 3	
$\begin{cases}\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{cases}$	$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

⑥ Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$
$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$	$\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$

Đặt biệt

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos$

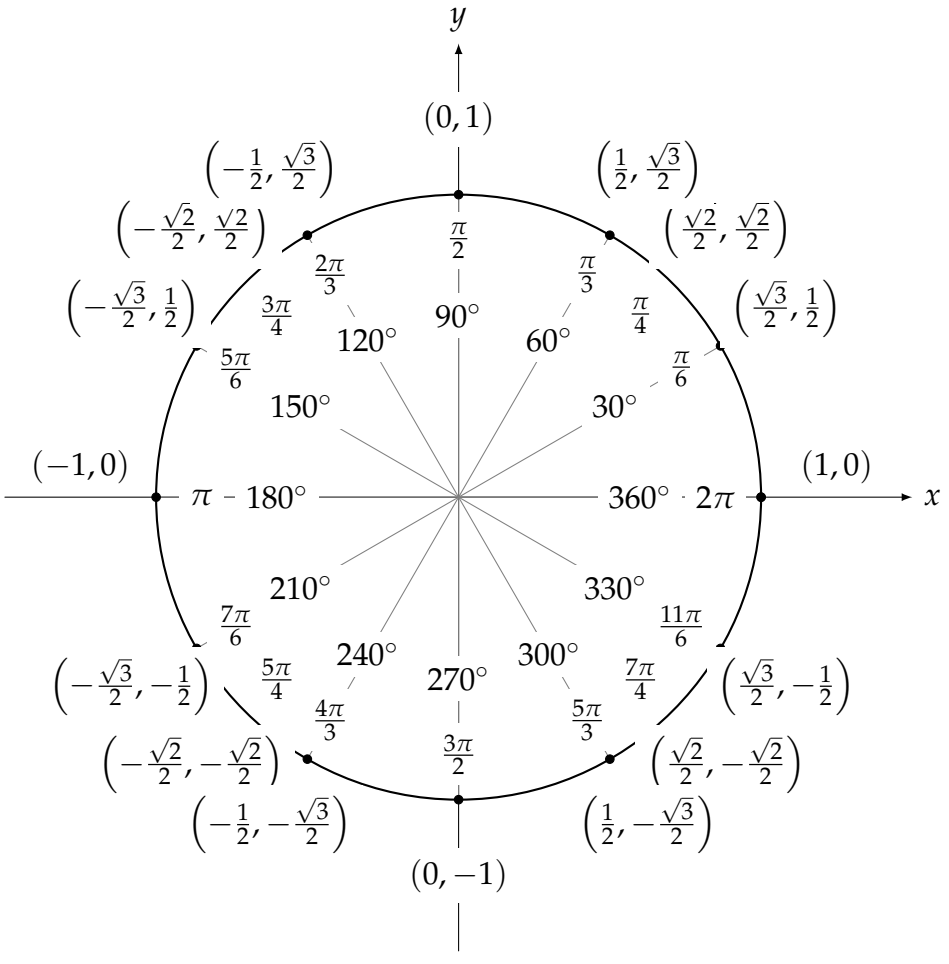
⑦ Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$
$\sin a \cdot \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$
$\sin a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
rad	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$



BÀI 2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Tính chất của hàm số

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

— Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

— Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in \mathscr{D}$ thì $-x \in \mathscr{D}$ và $f(-x) = -f(x)$. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

b) Hàm số đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $(a;b) \subset \mathbb{R}$.

— Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

— Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ có $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

c) Hàm số tuần hoàn

— Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có $(x+T) \in \mathscr{D}$ và $(x-T) \in \mathscr{D}$ và $f(x+T) = f(x)$.

— Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kì của hàm tuần hoàn f.

② Hàm số $y = \sin x$

— Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

— Tập giá trị $T = [-1;1]$, nghĩa là $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow$
- $0 \leq |\sin x| \leq 1$
- $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

— Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

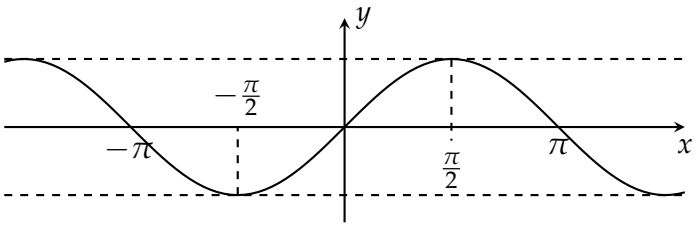
— Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$. Hàm số $y = \sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

, $k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



③ Hàm số $y = \cos x$

— Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

— Tập giá trị $T = [-1;1]$, nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1. \end{cases}$

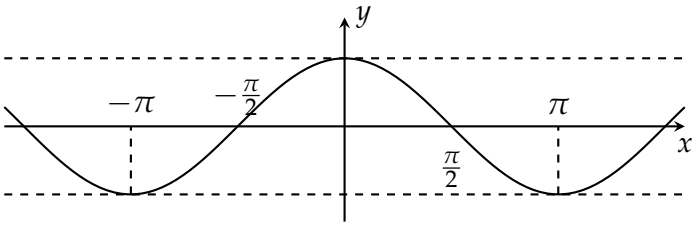
— Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn vì $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ nên đồ thị của hàm số nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

— Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left| \begin{array}{ll} \circ & \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ & \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \\ \circ & \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



④ Hàm số $y = \tan x$

— Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nghĩa là $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $\Rightarrow$ hàm số $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

— Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

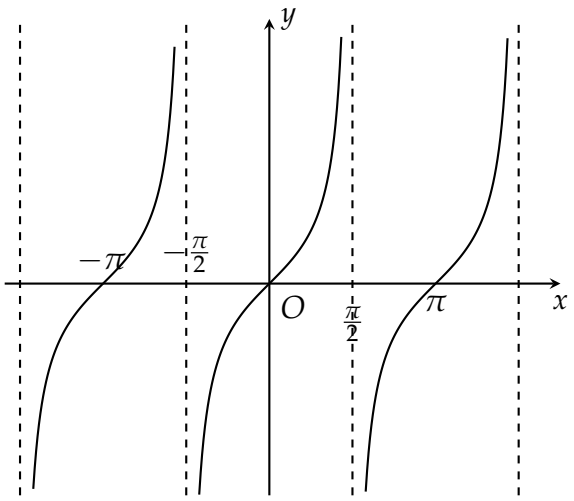
— Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

— Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt
$$\left|\begin{array}{ll} \circ & \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ & \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ & \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{array}\right. ,$$
$k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



⑤ Hàm số $y = \cot x$

— Hàm số $y = y = \cot x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

— Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

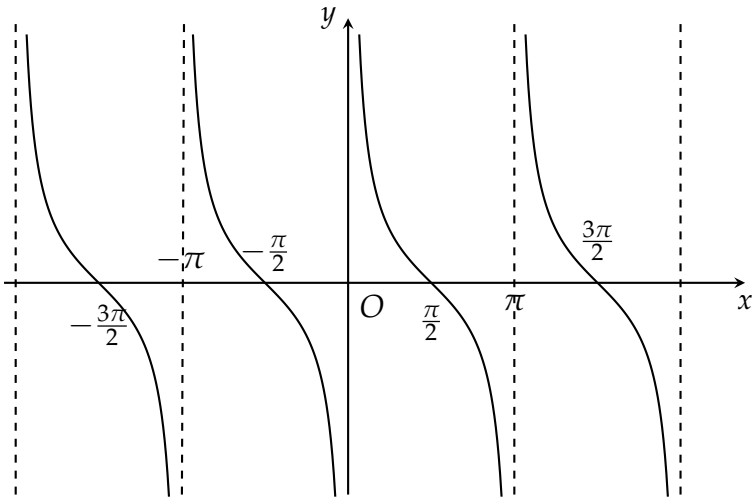
— Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

— Hàm số $y = y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt
$$\left|\begin{array}{ll} \circ & \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ & \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \circ & \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} k\pi \end{array}\right.$$
, $k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 2.1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

***Phương pháp giải**: Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:*

① $y = \tan f(x) = \dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$; *Điều kiện xác định:* $\cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

② $y = \cot f(x) = \dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$; *Điều kiện xác định:* $\sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

③ *Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:*

— $y = \dfrac{1}{P(x)}$, *điều kiện xác định là* $P(x) \neq 0$.

— $y = \sqrt[2n]{P(x)}$, *điều kiện xác định là* $P(x \geq 0)$.

— $y = \dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$, *điều kiện xác định là* $P(x) > 0$.

④ *Lưu ý rằng:* $-1 \leq \sin f(x); \cos f(x) \leq 1$ *và* $A \cdot B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0. \end{cases}$

⑤ *Với* $k \in \mathbb{Z}$, *ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:*

— $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ — $\left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

— $\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$ — $\left[\begin{array}{l} \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$

VÍ DỤ 1. Tìm tập xác định của hàm số: $y = f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\tan^2 x - 1} + \sqrt{\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi \right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases} \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \dfrac{2-\cos x}{1+\cos x} \geq 0 \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$

Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $\Leftarrow \begin{cases} 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \\ 0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \end{cases}$. Từ đó suy ra: $\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi. \end{cases}$, nên $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi \right\}$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của hàm số: $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos x}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \left\{ -2\pi \leq x \leq 2\pi; x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$. Vậy $\mathscr{D} = \left\{ -2\pi \leq x \leq 2\pi; x \neq \dfrac{\pi}{2} + \right.$

□

1 BÀI TẬP VẬN DỤNG

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y = \cos\dfrac{4}{x}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

② $\cos\sqrt{2x}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

③ $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

④ $y = \dfrac{\tan 2x}{1+\cos^2 x}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \right\}$.

⑤ $y = \dfrac{\tan 2x}{\sin x - 1}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

⑥ $y = \sqrt{\dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

⑦ $y = \sqrt{\dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \varnothing$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

② Điều kiện xác định: $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

③ Điều kiện xác định: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

④ Điều kiện xác định: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$.

⑤ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$

⑥ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0 \\ \sin x + 1 \neq 0. \end{cases}$

Do $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1$ nên $\dfrac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

⑦ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \geq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0. \end{cases}$

Do $-1 \leq \sin x; \cos x \leq 1$ nên $\dfrac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \leq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $\varnothing$.

□

BÀI 2. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y = \dfrac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \left\{-\pi \leq x \leq \pi; x \neq \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

② $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2} + \tan 2x$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \left\{-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

③ $\dfrac{\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)}}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{8} + k2\pi\right\}$.

④ $y = \dfrac{\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$. **ĐS:** $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi \\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$

② Điều kiện xác định: $\begin{cases} \pi^2 - 4x^2 \geq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$

③ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0 \\ 1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0 \\ 1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x\neq \dfrac{5\pi}{8}+k2\pi. \end{cases}$

④ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0 \\ 1-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{3}+k2\pi. \end{cases}$

□

2 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 3. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{\cos x+1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$

② $y=\dfrac{\cot 2x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$

③ $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$

④ $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=[0;+\infty)\setminus\mathbb{Z}$

⑤ $y=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}+\tan x$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

⑥ $y=\dfrac{x^2+1}{x\cos x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;0\right\}$

⑦ $y=\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x+1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$

BÀI 4. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\dfrac{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x-2}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}$.

② $y=\dfrac{\sqrt{3-\sin 4x}}{\cos x+1}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$.

③ $y=\dfrac{3}{\cos x-\cos 3x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;\dfrac{k\pi}{4}\right\}$.

④ $y=\cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan 2x$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

⑤ $y=\sqrt{2+\sin x}-\dfrac{1}{\tan^2 x-1}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}$.

⑥ $y=\dfrac{4}{\sin^2 x-\cos^2 x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

⑦ $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;k2\pi\right\}$.

⑧ $y=\dfrac{1+\cot\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}{\tan^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}\right\}$.

DẠNG 2.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

— *Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn*

∘ $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \le |\sin x| \le 1 \\ 0 \le \sin^2 x \le 1 \end{bmatrix}$ *hoặc* $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1. \end{bmatrix}$

∘ *Biến đổi đưa về dạng* $m \le y \le M$.

— *Kết luận:* $\max y = M$ *và* $\min y = m$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$.

ĐS: $\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Ta có

$$y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}(2\cos x \sin x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}}.$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $5 \ge 5 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \ge \dfrac{9}{2}$. Suy ra $\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \le y = \dfrac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}} \le \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

∘ $y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

∘ $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ khi $\sin 2x = 1$ hoặc $\sin 2x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ và $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. □

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2$.

ĐS: $\min y = -1$, $\max y = 5$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2 \\ &= 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2\cos^2 x - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2 \\ &= 5 - 6\cos^2 x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \cos^2 x \le 1$ nên $5 \ge f(x) = 5 - 6\cos^2 x \ge -1$.

∘ $f(x) = 5$ khi $\cos x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.

∘ $f(x) = -1$ khi $\cos^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

Vậy $\max f(x) = 5$ và $\min f(x) = -1$. □

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

ĐS: $\min y = \frac{9}{4}$, $\max y = 3$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x + 2 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2 \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 + 2 = 3 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $3 \ge f(x) \ge \frac{9}{4}$.

$\circ$ $f(x) = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$ hoặc $x = 0$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

$\circ$ $f(x) = \frac{9}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Vậy $\max f(x) = 3$ và $\min f(x) = \frac{9}{4}$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

① $y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4$ **ĐS:** $\min y = 5\sqrt{2} + 4$, $\max y = 14$

② $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$ **ĐS:** $\min y = 0$, $\max y = \sqrt{2}$

③ $y = 3\sin^2 2x - 4$ **ĐS:** $\min y = -4$, $\max y = -1$

④ $y = 4 - 5\sin^2 2x \cos^2 2x$ **ĐS:** $\min y = \frac{11}{4}$, $\max y = 4$

⑤ $y = 3 - 2|\sin 4x|$ **ĐS:** $\min y = 1$, $\max y = 3$

Lời giải.

① Do $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên $2 \le 3 + \cos 2x \le 4$. Suy ra $5\sqrt{2} + 4 \le y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4 \le 14$.

$\circ$ $y = 5\sqrt{2} + 4$ khi $\cos 2x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{2}$.

$\circ$ $y = 14$ khi $\cos 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

Vậy $\min y = 5\sqrt{2} + 4$ và $\max y = 14$.

② Do $-1 \le \cos 4x \le 1$ nên $\sqrt{2} \ge y = \sqrt{1 - \cos 4x} \ge 0$.

$\circ$ $y = \sqrt{2}$ khi $\cos 4x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{4}$.

$\circ$ $y = 0$ khi $\cos 4x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

Vậy $\max y = \sqrt{2}$ và $\min y = 0$.

③ Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $-4 \le y = 3\sin^2 2x - 4 \le -1$.
$\circ$ $y = -4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = -1$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\min y = -4$ và $\max y = -1$.

④ Ta có
$$y = 4 - 5\sin^2 2x\cos^2 2x = 4 - \frac{5}{4}(2\sin 2x\cos 2x)^2 = 4 - \frac{5}{4}\sin^2 2x.$$
Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $4 \ge y \ge \dfrac{11}{4}$.
$\circ$ $y = 4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = \dfrac{11}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $\max y = 4$ và $\min y = \dfrac{11}{4}$.

⑤ Do $0 \le |\sin 4x| \le 1$ nên $3 \ge y = 3 - 2|\sin 4x| \ge 1$.
$\circ$ $y = 3$ khi $\sin 4x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = 1$ khi $|\sin 4x| = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{8}$.
Vậy $\max y = 3$ và $\min y = 1$.

□

BÀI 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

① $y = -\sin^2 x - \cos x + 2$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{3}{4}$, $\max y = 3$

② $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$ **ĐS:** $\min y = -1$, $\max y = 2$

③ $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ **ĐS:** $\min y = 0$, $\max y = 4$

④ $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{9}{2}$, $\max y = 5$

⑤ $y = \sqrt{2 - \cos 2x + \sin^2 x}$ **ĐS:** $\min y = 1$, $\max y = 2$

⑥ $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{1}{4}$, $\max y = 1$

⑦ $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 4$ **ĐS:** $\min y = 2$, $\max y = 6$

Lời giải.

① Ta có

$$y = -\sin^2 x - \cos x + 2 = -\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x + 2 = \cos^2 x - \cos x + 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Do $-1 \le \cos x \le 1$ nên $-\frac{3}{2} \le \cos x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$.
Suy ra $0 \le \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le y \le 3$.
$\circ$ $y = \frac{3}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{3}$.
$\circ$ $y = 3$ khi $\cos x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \pi$.
Vậy $\min y = \frac{3}{4}$ và $\max y = 3$.

② Ta có

$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2\left(1 - \sin^2 x\right) + 1 = \sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = \left(\sin^2 x + 1\right)^2 - 2.$$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le \sin^2 x + 1 \le 2$.
Suy ra $1 \le \left(\sin^2 x + 1\right)^2 \le 4 \Leftrightarrow -1 \le y \le 2$.
$\circ$ $y = -1$ khi $\sin x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = 2$ khi $\sin^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y = -1$ và $\max y = 2$.

③ Ta có

$$y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = \left(1 - \sin^2 x\right) + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = 4 - (\sin x - 1)^2.$$

Do $-1 \le \sin x \le 1$ nên $-2 \le \sin x - 1 \le 0$.
Suy ra $0 \le (\sin x - 1)^2 \le 4 \Leftrightarrow 4 \ge y \ge 0$.
$\circ$ $y = 4$ khi $\sin x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{2}$.
$\circ$ $y = 0$ khi $\sin x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = -\frac{\pi}{2}$.
Vậy $\max y = 4$ và $\min y = 0$.

④ Ta có

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 4 = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 + 4 = 5 - \frac{1}{2}\sin$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $5 \ge y \ge \frac{9}{2}$.
$\circ$ $y = 5$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = \frac{9}{2}$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{4}$.
Vậy $\max y = 5$ và $\min y = \frac{9}{2}$.

⑤ Ta có

$$y^2 = 2 - \cos 2x + \sin^2 x = 2 - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + \sin^2 x = 3\sin^2 x + 1 \Rightarrow y = \sqrt{3\sin^2 x + 1}.$$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le 3\sin^2 x + 1 \le 4$.
Suy ra $1 \le y \le 2$.
$\circ$ $y = 1$ khi $\sin x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.
$\circ$ $y = 2$ khi $\sin^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y = 1$ và $\max y = 2$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $1 \ge y \ge \dfrac{1}{4}$.
$\circ$ $y = 1$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
$\circ$ $y = \dfrac{1}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.
Vậy $\max y = 1$ và $\min y = \dfrac{1}{4}$.

⑦ Ta có

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2 \Rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 4.$$

Do $-1 \le \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) \le 1$ nên $2 \ge y \ge 6$.
$\circ$ $y = 2$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{-\pi}{3}$.
$\circ$ $y = 6$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{6}$.
Vậy $\min y = 2$ và $\max y = 6$.

□

BÀI 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ **ĐS:** $\min y = 0, \max y = 1$

② $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}; 0\right]$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{1}{2}, \max y = 1$

③ $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ **ĐS:** $\min y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \max y = 1$

Lời giải.

① Do $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ nên $2x \in [0;\pi]$. Suy ra $0 \le y = \sin 2x \le 1$
- $y = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2}$.
- $y = 6$ khi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = 0$ và $\max y = 1$.

② Do $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3};0\right]$ nên $x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$. Suy ra $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \le y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1$
- $y = \dfrac{1}{2}$ khi $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ hoặc $x = 0$.
- $y = 1$ khi $x = -\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\min y = \dfrac{1}{2}$ và $\max y = 1$.

③ Do $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ nên $2x + \dfrac{\pi}{4} \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Suy ra $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$.
- $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ khi $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$.
- $y = 1$ khi $x = -\dfrac{\pi}{8}$.

Vậy $\min y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\max y = 1$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y = \sqrt{4 - 2\sin^5 2x} - 8$ **ĐS:** $\min y = -8 + \sqrt{2}$, $\max y = -8 + \sqrt{6}$

② $y = y = \dfrac{4}{1 + 3\cos^2 x}$ **ĐS:** $\min y = 1$, $\max y = 4$

③ $y = \dfrac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$ **ĐS:** $\min y =$, $\max y =$

④ $y = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2\sin^2 3x}}$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\max y = 1$

⑤ $y = \dfrac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$ **ĐS:** $\min y = 1$, $\max y = \dfrac{9 - 3\sqrt{2}}{7}$

⑥ $\dfrac{4}{\sqrt{2 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)} + 3}$ **ĐS:** $\min y = -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, $\max y = 2$

⑦ $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x}$ **ĐS:** $\min y = -1$, $\max y = 1$

BÀI 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$ **ĐS:** $\min y = -2, \max y = 3$

② $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$ **ĐS:** $\min y = -1, \max y = 3$

③ $y = 2\sin 2x(\sin 2x - 4\cos 2x)$ **ĐS:** $\min y = 1 - \sqrt{17}, \max y = 1 + \sqrt{17}$

④ $y = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x$ **ĐS:** $\min y = 1, \max y = 7$

⑤ $y = 4\sin^2 x + \sqrt{5}\sin 2x + 3$ **ĐS:** $\min y = 2, \max y = 8$

⑥ $y = (2\sin x + \cos x)(3\sin x - \cos x)$ **ĐS:** $\min y = 5 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \max y = 5 + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⑦ $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x - 1$ **ĐS:** $\min y = -\dfrac{9}{4}, \max y = \sqrt{2}$

⑧ $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3$ **ĐS:** $\min y = 1 - 2\sqrt{2}, \max y = 1 + 2\sqrt{2}$

⑨ $y = |5\sin x + 12\cos x - 10|$ **ĐS:** $\min y = 0, \max y = 23$

⑩ $y = 2\sin x + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1$ **ĐS:** $\min y = -1 - \sqrt{2}, \max y = -1 + \sqrt{2}$

⑪ $y = 2\left[\cos 2x + \cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right] + 3$ **ĐS:** $\min y = 1, \max y = 5$

BÀI 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ **ĐS:** $\min y = \dfrac{5}{8}, \max y = 1$

② $y = 2\sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ **ĐS:** $\min y = -1, \max y = 2$

③ $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\dfrac{3\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$ **ĐS:** $\min y = -\infty, \max y = 0$

DẠNG 2.3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

— ***Bước 1.*** *Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.*
Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.

— ***Bước 2.*** *Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau*

- *Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.*
- *Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.*

! — *Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.*

— *Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể* $\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a.$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

① $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

② $f(x) = \cos\sqrt{x^2-16}$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải

① Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D = \mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

② Tập xác định $D = (-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$.

$$\forall x \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in (-\infty;-4] \\ x \in [4;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x \in [4;+\infty) \\ -x \in (-\infty;-4] \end{bmatrix} \Rightarrow -x \in D$$

Xét $f(-x) = \cos\sqrt{(-x)^2-16} = \cos\sqrt{x^2-16} = f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

① $y = f(x) = \tan x + \cot x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ

② $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

③ $y = f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải.

① Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$$

Xét $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

② Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{-(k+1)\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$$

Xét $f(-x) = \tan^7(-2x) \cdot \sin(-5x) = \left(-\tan^7 2x\right) \cdot (-\sin 5x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x = f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

③ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x) = \sin\left(-2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2} + 9\pi\right) = -\sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = f(x$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

① $y = f(x) = -2\cos^3\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ.

② $y = f(x) = \sin^3(3x + 5\pi) + \cot(2x - 7\pi)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ.

③ $y = f(x) = \cot(4x + 5\pi)\tan(2x - 3\pi)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

④ $y = f(x) = \sin\sqrt{9 - x^2}$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

⑤ $y = f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau

— $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi. \end{array}\right.$

— $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi. \end{array}\right.$

— $\tan x = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$

— $\cot x = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$

Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \to k360^\circ$, $k\pi \to k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.
Những trường hợp đặc biệt

— $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

— $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

— $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

— $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

— $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

— $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

— $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

— $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

— $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$

— $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

— $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

— $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình

① $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$. **ĐS:** $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

③ $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}$. **ĐS:** $x = 45^\circ + k90^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$

④ $\cot(x - \dfrac{\pi}{3}) = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

① $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

② $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

③ $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 30^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k90^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ $\cot\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin x = \sin\dfrac{2\pi}{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

④ $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{24} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

② $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

③ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

④ $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi\\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

⑥ $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2.

① $2\sin(x+30^\circ)+\sqrt{3}=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=-90^\circ+k360^\circ\\ x=-150^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

② $\cot(4x+35^\circ)=-1$. **ĐS:** $x=-20^\circ+k45^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$

③ $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

④ $(1+2\cos x)(3-\cos x)=0$. **ĐS:** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\tan(x-30^\circ)\cos(2x-150^\circ)=0$. **ĐS:** $x=30^\circ+k180^\circ\ (k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\sqrt{2}\sin 2x+2\cos x=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑦ $\sin x+\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k4\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑧ $\sin 2x \cos 2x + \dfrac{1}{4} = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}.$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{8}$ $(k \in \mathbb{Z})$

B MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 3.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết

Cung đối nhau	*Cung bù nhau*	*Cung phụ nhau*
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	*Cung hơn kém* $\dfrac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

Tính chu kỳ	
$\sin(x + k2\pi) = \sin x$	$\cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin(x + \pi + k2\pi) = -\sin x$	$\cos(x + \pi + k2\pi) = -\cos x$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\cot(x + k\pi) = \cot x$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right).$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

② $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right).$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

① Ta có phương trình tương đương

$$\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x = \dfrac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\begin{bmatrix} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z})$.

② Điều kiện: $2x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x + \dfrac{\pi}{3} \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Leftrightarrow\ & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin 3x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$. **ĐS:** $\begin{bmatrix} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z})$

② $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

① Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - x = -\dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z})$.

② Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Xét $\tan 3x = 0$ không là nghiệm, khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{\tan x}{\cot 3x}+1=0\\ \Leftrightarrow\ &\tan x = -\cot 3x\\ \Leftrightarrow\ &\tan x = \tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\\ \Leftrightarrow\ &x = 3x+\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}-\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

① $\sin 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

② $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

③ $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{5}\right)-\sin 2x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=-\dfrac{7\pi}{20}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

④ $\cot\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **ĐS:** $x = \dfrac{17\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{3}+x+k2\pi\\ 2x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

② Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\2x+\dfrac{\pi}{4}=x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm

③ Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4x+\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\4x+\dfrac{\pi}{5}=2x-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{3}\\x=-\dfrac{7\pi}{20}+k\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix}x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{3}\\x=-\dfrac{7\pi}{20}+k\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

④ Điều kiện $\begin{cases}2x-\dfrac{3\pi}{4}\neq k\pi\\x-\dfrac{\pi}{6}\neq\dfrac{\pi}{2}+l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\x\neq\dfrac{2\pi}{3}+l\pi\end{cases}(k,l\in\mathbb{Z})$.

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\cot\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=\cot\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\\\Leftrightarrow\;&2x-\frac{3\pi}{4}=-x+\frac{2\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\\\Leftrightarrow\;&x=\frac{17\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{17\pi}{36}+\dfrac{k\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

① $\cos(3x+45^\circ)=-\cos x$. **ĐS:** $\begin{bmatrix}x=33{,}75^\circ+k90^\circ\\x=-112{,}5^\circ+k180^\circ\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

② $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **ĐS:** $\begin{bmatrix}x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3}\\x=-\dfrac{13\pi}{12}-k2\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbb{Z})$.

④ $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos x=0.$ **ĐS:** $\begin{bmatrix} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$

⑤ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x=0.$ **ĐS:** $\begin{bmatrix} x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$

⑥ $\tan\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\tan 2x=0.$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} &\cos(3x+45^\circ)=\cos(180^\circ-x) \\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} 3x+45^\circ=180^\circ-x+k360^\circ \\ 3x+45^\circ=x-180^\circ+k360^\circ \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} x=33{,}75^\circ+k90^\circ \\ x=-112{,}5^\circ+k180^\circ \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x=33{,}75^\circ+k90^\circ \\ x=-112{,}5^\circ+k180^\circ \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} &\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right) \\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}-2x+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)+k2\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{13\pi}{12}-k2\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{13\pi}{12}-k2\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan(-x)\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{3}=-x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z}).$

④ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} &\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-x)\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 3x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-x+k2\pi \\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=x-\pi+k2\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Phương trình tương đương

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

⑥ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(-2x) \\ \Leftrightarrow\ & 3x + \frac{\pi}{4} = -2x + k\pi \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{5}\ (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

② $2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

③ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

④ $2\sin^2 \dfrac{x}{2} = \cos 5x + 1$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ $\sin\left(\dfrac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$. **ĐS:** $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\sin 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\cos 8x + \cos 2x + \sin x = \cos 8x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x = \dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

④ Phương trình tương đương

$$\cos 5x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = x - \pi + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Phương trình tương đương

$$\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{9}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{9}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\dfrac{9\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{5\pi}{24}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

② $\cos 2x=\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

③ $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cot x$. **ĐS:** $x=\dfrac{7\pi}{40}+\dfrac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$.

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

② $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

③ $\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0$. **ĐS:** Vô nghiệm.

④ $\sin\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{5}\right)=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11\pi}{60}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{8\pi}{15}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{7\pi}{60}+\dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

⑥ $\tan 2x\cdot\tan 3x=1$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z})$.

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x+2\cos^2 x=1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{14} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

② $\cot 2x = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

③ $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{45} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{7\pi}{45} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

④ $\cos 2x \cos x + \cos x = \sin 2x \sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

DẠNG 3.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2} \cdot \cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2} \cdot \sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2} \cdot \cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2} \cdot \sin\dfrac{a-b}{2}$

! *Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là $\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}$. Do đó khi sử dụng nên nhẩm (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có

$$\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ 2\cos 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k\pi \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + l\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + l\pi \end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos 2x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x + \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4\cos 2x \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. (k, l, m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{l2\pi}{3} \\ x = \pi + m2\pi \end{array}\right. (k, l, m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

③ $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + m2\pi, \frac{7\pi}{6} + m2\pi, (k, m \in \mathbb{Z})$

④ $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$. **ĐS:** mnp

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right. (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi$, $(k, l \in \mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 3x(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
&1-\sin x-\cos 2x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\cos 2x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\sin x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ \cos 2x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ 2x=x+\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\\ 2x=-\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+l2\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+l2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{l2\pi}{3}\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+m2\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+m2\pi$, $(k,m\in\mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos\dfrac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pi+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k2\pi}{5}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{l2\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{l2\pi}{3}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

② $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2}+k\pi, \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, \frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x=1$. **ĐS:** $-\frac{\pi}{2}+k2\pi, -\frac{\pi}{12}+l\pi, \frac{7\pi}{12}+l\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

④ $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{3}, (k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}&\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1\Leftrightarrow(\sin 5x+\sin x)-(1-2\sin^2 x)=0\\ \Leftrightarrow\ &2\sin 3x\cos 2x-\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x(2\sin 3x-1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\sin 3x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}, (k,l\in\mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned}&\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=(1+\cos 2x)+\text{c}\quad x\\ \Leftrightarrow\ &2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x\Leftrightarrow\sin 2x(2\cos x+1)-\cos x(2\cos x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\cos x+1=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}&\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow(\cos 3x-\cos x)-2\sin 2x-(\sin x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &-2\sin 2x\sin x-2\sin 2x-(\sin x+1)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sin x+1)(2\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ 2\sin 2x+1=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+l\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+l\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + l\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + l\pi$, $(k, l \in \mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$\begin{aligned} & 4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ 3 + 2\cos 2x = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6} + l2\pi, \dfrac{5\pi}{6} + l2\pi, k, l \in \mathbb{Z}$

② $\sin x - 4\cos x + \sin 3x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 3x + 2\sin 2x - \cos x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

④ $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$. **ĐS:** $\dfrac{k2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4} + k\pi, -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x + \sin 3x + 2\cos x = 1 + \sin 4x$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \pm\dfrac{\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\cos 2x - \sin 3x + \cos 5x = \sin 10x + \cos 8x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi, -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4}, \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{l2\pi}{5}, \dfrac{5\pi}{30} + \dfrac{l2\pi}{5}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$

③ $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$. **ĐS:** $k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi, \dfrac{7\pi}{6} + l2\pi$, $(k, l \in \mathbb{Z})$

④ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, \pm\dfrac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

DẠNG 3.3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

Sử dụng công thức hạ bậc

① $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

② $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

③ $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

④ $\cot^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

Đối với công thức hạ bậc của sin và cosin

— *Mỗi lần hạ bậc xuất hiện* $\frac{1}{2}$ *và cung góc tăng gấp đôi.*

— *Mục đích cả việc hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung hoặc làm bài toán đơn giản hơn.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2}\cos 10x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} & \sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2}\cos 10x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 16x}{2} = \frac{1}{2}\cos 10x \\ \Leftrightarrow\ & \cos 16x + \cos 4x - \cos 10x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 10x \cos 6x - \cos 10x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 10x = 0 \\ 2\cos 6x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \\ x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + l\pi, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + l\pi, (k,l \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \cos^2 4x = \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 4x(2\cos 4x + 2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ \cos 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + l\pi \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + l\pi \end{array}\right. (k,l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + l\pi$, $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + l\pi$, $(k, l \in \mathbb{Z})$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$

② $\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

③ $\cos^2 x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

④ $4\sin^2 x - 1 = 0$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\sin^2\left(3x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$. **ĐS:** $\dfrac{13\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4}, -\dfrac{29\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$. **ĐS:** $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\cos^2 x = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Ta có

$$\sin^2\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)\Leftrightarrow\frac{1-\cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi}{2}-2x+k2\pi\\6x+\frac{4\pi}{3}=-\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}\\x=-\frac{29\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$, $x=-\frac{29\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ Ta có

$$\cos^4x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ (1+\cos2x)^2+(1+\cos2x)^2=1\Leftrightarrow2\cos^2 2x+4\cos2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\cos2x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\text{ (vô nghiệm)}\\\cos2x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

② $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{5}$, $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\pm\frac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

④ $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\pm\frac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

⑤ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+\frac{l\pi}{2},\frac{\pi}{10}+\frac{l\pi}{5}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

⑦ $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{\sqrt{2}}{8}$. **ĐS:** $-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$

⑧ $\sin^3 x\cos x+\sin x\cos^3 x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{8}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{8}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 4x+\cos^2 6x=\sin 10x, \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $x=\dfrac{3\pi}{4}; x=\dfrac{k\pi}{10}, k=\overline{1,4}$

② $\cos 3x+\sin 7x=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5x}{2}\right)-2\cos^2\dfrac{9x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

③ $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

④ $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)=\dfrac{7}{4}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\sin^2 4x-\cos^2 6x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+10x\right), \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}; x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}, k=\overline{0,4}$

⑦ $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

⑧ $\tan^2 x+\sin^2 2x=4\cos^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

⑨ $\cos^2 3x\cdot\cos 2x-\cos^2 x=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

⑩ $4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

DẠNG 3.4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích

Đa số đề thi, kiểm tra thường là những phương trình đưa về tích số. Do đó, trước khi giải ta phải quan sát xem chúng có những lượng nhân tử chung nào, sau đó định hướng để tách, ghép, nhóm phù hợp. Một số lượng nhân tử thường gặp:

1. Các biểu thức có nhân tử chung với $\cos x \pm \sin x$ *thường gặp là:*

— $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2$

— $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

— $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

— $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$

— $1 \pm \tan x = 1 \pm \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x \pm \sin x}{\cos x}$

— $1 \pm \cot x = 1 \pm \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x \pm \cos x}{\sin x}$

— $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$

— $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$

2. Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$*, chẳng hạn:*

— $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)\\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)\end{array}\right.$

— $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1-\sin x)(1+\sin x)$

— $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x(1-\cos x)(1+\cos x)$

— $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$

— $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

— $\sin 2x = 1 + \sin 2x - 1 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)$

— $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3\cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$

3. Phân tích tam thức bậc hai dạng: $f(X) = aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$ *với* X *có thể là* $\sin x, \cos x$ *và* X_1, X_2 *là hai nghiệm của* $f(X) = 0$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có:$2\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow (2\cos x-\sin 2x)+\left(\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\right)=0$
$\Leftrightarrow 2\cos x\,(1-\sin x)+\sqrt{3}\,(\sin x-1)=0$
$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;$ $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos 2x+(1+\sin x)(\sin x+\cos x)=0$. **ĐS:** $\pi+k2\pi,\ \dfrac{3\pi}{4}+k\pi,$ $(k,l\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Ta có: $\cos 2x+(1+\sin x)(\sin x+\cos x)=0$
$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+(1+\sin x)(\sin x+\cos x)=0$
$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+(1+\sin x)(\sin x+\cos x)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x+1)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pi+k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $(\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)-\sin 2x=0.$ **ĐS:** $x=k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi;\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có: $(\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)-\sin 2x=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(1-\sin 2x)-1=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)^2-1=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x+\sin x-\cos x-1)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-\sin x-1)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin x-\cos x+1=0\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4}+k2\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x=k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi;\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4\cos^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi; x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có: $\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4(1-\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=4\sin^2 x-3$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)(\sin x\cos x-2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\sin x\,(\cos x-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi; x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin x+\cos x=\cos 2x$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi; x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Ta có Ta có: $\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$
$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② Ta có: $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$
$\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1-\cos x=0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ Ta có: $\sin x+\cos x=\cos 2x$
$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x$
$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin x-\cos x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{-\pi}{4}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi; x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ Ta có

Ta có: $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$
$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$
$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(1+2\cos x)(\cos x-\sin x)=0$
$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1-2\sin x)=0$
$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \cos x-\sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x+\dfrac{\pi}{4}=k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $(\tan x+1)\sin^2 x+\cos 2x=0.$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+\cos x.$ **ĐS:** $x=\pi+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin 2x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}=1+\cot x.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Ta có: $(\tan x+1)\sin^2 x+\cos 2x=0$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+1\right)\sin^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\sin^2 x+\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin 2x=2(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② Ta có: $\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+\cos x$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+\sin 2x=1+\cos x$
$\Leftrightarrow \sin 2x\cos x+\sin 2x=1+\cos x$
$\Leftrightarrow \sin 2x(1+\cos x)=1+\cos x$
$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\sin 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$
Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pi+k2\pi; x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ Ta có: $\sin 2x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$
$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos x-\sin x+\cos x-1=0$
$\Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$
$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x-(\sin x+1)=0$
$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x-1)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$
Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ Ta có Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$
Ta có: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\frac{1+\cos 2x}{\sin x}=1+\cot x$
$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\cdot\frac{1+\cos 2x}{\sin x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos 2x)-(\sin x+\cos x)=0$
$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\cos 2x=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{2}+k\pi; x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $(2\cos x+1)(\cos 2x+2\sin x-2)=3-4\sin^2 x$.. **ĐS:** $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=3-4\cos^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $(\cos x+1)(\cos 2x+2\cos x)+2\sin^2 x=0$. **ĐS:** $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$. **ĐS:** $k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{6}+l2\pi, \dfrac{7\pi}{6}+l2\pi,$ $(k,l\in\mathbb{Z})$

④ $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}, \pm\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=1$.

ĐS: $x=k\pi; x=\dfrac{\pi}{3}+n\pi$.

② $4\sin 2x\sin x+2\sin 2x-2\sin x=4-4\cos^2 x$.

ĐS: $x=k_1\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+k_2 2\pi$,$x=\dfrac{7\pi}{6}+k_3 2\pi$ và $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

③ $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{6}+k'\pi$, với $k, k'\in\mathbb{Z}$.

④ $(\cos x+1)(\cos 2x+2\cos x)+2\sin^2 x=0$.

ĐS: $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

⑤ $(2\cos x+1)(\sin 2x+2\sin x-2)=4\cos^2 x-1$.

ĐS: $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k_1 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

⑥ $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=4\sin^2 x-1$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

⑦ $(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+4\cos^2 x=3$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

⑧ $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

⑨ $\sin 2x=(\sin x+\cos x-1)(2\sin x+\cos x+2)$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=k'2\pi$, với $k, k'\in\mathbb{Z}$.

⑩ $2(\cos^4 x-\sin^4 x)+1=\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{3}+k_1\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k_2 2\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi\end{array}\right., (k, n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$ với $k, n \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
4\sin 2x\sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x &\Leftrightarrow 2\sin 2x(2\sin x + 1) - 2\sin x(2\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\sin x\cos x - 2\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x - 1)\sin x = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$,$x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$,$x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4 &\Leftrightarrow 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0\\
&\Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2(1 - \cos^2 x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x + 2 - 2\cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x = -1\\
\Leftrightarrow\ &x = \pi + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = (2\cos x - 1)(2\cos x + 1))\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2 - 2\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=4\sin^2 x-1\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=(2\sin x+1)(2\sin x-1)\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3-2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(\cos 2x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+4\cos^2 x=3\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+1-4\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(4\sin x\cos x+1-1-2\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ 2\sin x\cos x-\sin x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=k_3\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=4\sin^2 x-1\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1-2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x=(\sin x+\cos x-1)(2\sin x+\cos x+2)\\
\Leftrightarrow\ &\sin 2x=\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos x-1\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x-1+\sin x\cos x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x-1)(\sin x+1)+\cos x(\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+1)(\sin x+\cos x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k_1 2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k_2 2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_2 2\pi\\ x=k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k'2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=k'2\pi$, với $k, k'\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=k'2\pi$, với $k, k'\in\mathbb{Z}$.

10 Ta có

$$\begin{aligned}
& 2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos 2x + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k_3 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

1 $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2 $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x$

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

3 $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$.

ĐS: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4 $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x$.

ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

5 $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

6 $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑦ $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$.

ĐS: $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑧ $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑨ $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑩ $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑪ $\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1 - 4\cos x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

⑫ $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑬ $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑭ $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑮ $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑯ $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑰ $\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑱ $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

ĐS: $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑲ $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑳ $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin x - 2 + 4\cos x - 2\sin x\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x - 2\cos x + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}\sin x - 2 - 2\sqrt{2}\cos x + 2\sin x\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2\cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(\sin x + 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\cos x - 1) - 2(\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = k'2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 6\sin x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(\cos x + \sin x - 3) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x = 0, (\text{do } \cos x + \sin x - 3 \neq 0)\\
\Leftrightarrow\ &x = k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$
\begin{aligned}
& \sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 1 - \cos 2x - 2\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin x + 2\sin^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x + \sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k_2 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x = \pi + k_2 2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑩ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos^2 x - \cos x + (\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(\sin 2x - 1) + (\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

(11) Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1 - 4\cos x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x - \sin x + 4\cos^2 x - 3 + 4\cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\cos x - 1) + 2\cos x(2\cos x - 1) + 3(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x + 2\cos x + 3 = 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Mà $\sin x + 2\cos x \geq -3$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\sin x = -1\\ \cos x = -1\end{cases}$ hệ này vô nghiệm. Suy ra phương trình $\sin x + 2\cos x + 3 = 0$ vô nghiệm.
Do đó $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(12) Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x - \sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k_2 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi\\ x = \pi + k_2 2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi$, $x = \pi + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(13) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 2\sin x \cos x(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & 1 = \sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = 2\sin 2x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(14) Ta có

$$\begin{aligned}
& (1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x + \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

15 Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

16 Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x\\
\Leftrightarrow\ &2\cos 2x \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

17 Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &-2\sin 2x \sin x = 2\sin x \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \tan 2x = -1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

18 Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x - \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x - \dfrac{\pi}{4} = x - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -x + \dfrac{\pi}{4} + k'2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

19 Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 x + \sin x = \cos x + \sin^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = \cos x \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_3 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

20 Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x = \sin 2x - 2\cot 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \cos 2x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = -\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cos x + 2\sin x(1-\cos x)^2 = 2 + 2\sin x$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

② $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1+\cos 2x)$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

③ $1 - \sin x\cos x = 2\left(\sin x - \cos^2\frac{x}{2}\right)$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

④ $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑤ $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑥ $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑦ $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑧ $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

⑨ $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$.

ĐS: $x = \pi + k_1 2\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑩ $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

⑪ $\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\frac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑫ $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑬ $3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x$.

ĐS: $x = \pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

14 $2\sin x(2\cos 2x+1+\sin x)=\cos 2x+2$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+2\sin x(1-\cos x)^2=2+2\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x-2+2\sin x((1-\cos x)^2-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x-2+2\sin x\cos x(\cos x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x-2)(\sin 2x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin 2x=-1\\
\Leftrightarrow\ &x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
&2(\cos x+\sin 2x)=1+4\sin x(1+\cos 2x)\\
\Leftrightarrow\ &2\cos x+2\sin 2x=1+8\sin x\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ &2\cos x+2\sin 2x=1+4\sin 2x\cos x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin 2x(1-2\cos x)-(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin 2x-1)(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k_1\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{12}+k_1\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{12}+k_1\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{12}+k_2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
&1-\sin x\cos x=2\left(\sin x-\cos^2\frac{x}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &1-\sin x\cos x=2\sin x-2\cos^2\frac{x}{2}\\
\Leftrightarrow\ &1-\sin x\cos x=2\sin x-1-\cos x\\
\Leftrightarrow\ &2+\cos x-\sin x(\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2+\cos x)(1-\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x=1\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{2}+k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x\cos x + \cos x - \sin x + \cos x = 1\\
\Leftrightarrow\ &\sin x(2\cos x - 1) + 2\cos x - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 1 - \sin x - \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 2\sin x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{2}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin x+\cos x-\sin 2x-\cos 2x=1\\
\Leftrightarrow\ &\sin x+\cos x-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)(1-\sin x-\cos x-\cos x+\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)(1-2\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\1-2\cos x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\\cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi\\x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\sin x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)\sin 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\\sin 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\\sin 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi\\x=k_2\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x)\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x-2\sin^5 x+\cos^3 x-2\cos^5 x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x(1-2\sin^2 x)+\cos^3 x(1-2\cos^2 x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x\cos 2x-\cos^3 x\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=\cos x\\ \sin 2x=-2\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{4}+k_1\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin^3 x+\cos 2x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin^3 x+1-2\sin^2 x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &2(1-\cos^2 x)(\sin x-1)+(1+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(2\sin x+2\cos x-2\sin x\cos x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(2(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(\sin x+\cos x)(2-\sin x-\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\pi+k_1 2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pi+k_1 2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\pi+k_1 2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, với $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

⑩ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^8 x+\cos^8 x=2(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+\frac{5}{4}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin^8 x(1-2\sin^2 x)+\cos^8 x(1-2\cos^2 x)=\frac{5}{4}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin^8 x\cos 2x-\cos^8 x\cos 2x=\frac{5}{4}\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(4(\sin^8 x-\cos^8 x)-5)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin^8 x-\cos^8 x=\frac{5}{4}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \sin^8 x = \dfrac{5}{4} + \cos^8 x \geq \dfrac{5}{4} > 1$ vô lý, suy ra phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4}$ vô nghiệm.
Do đó $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

11 Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = x + k_1 2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x + k_2 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

12 Điều kiện $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 8\cos 2x \sin x \cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = 2\sin 4x \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 4x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

13 Ta có

$$\begin{aligned}
& 3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x \\
\Leftrightarrow\ & 9\sin x - 12\sin^3 x + 2 + 3\sin x - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x - 12\sin^3 x + 2 - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x\cos^2 x - 8\sin x\cos x + 2 - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos x(3\cos x - 2) - (3\cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (3\cos x - 2)(2\sin 2x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{2}{3} \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

14 Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x + 2\sin x + 2\sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x - 2\cos 2x + 2\sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos 2x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ BẬC HAI VÀ BẬC CAO CÙNG MỘT HÀM LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 X + b\sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 X + b\cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 X + b\tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 X + b\cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \ne k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = \dfrac{1}{2} \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} 3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) + 7\sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$6t^2 - 7t - 5 = 0 \Leftrightarrow (3t-5)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} 4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 5(1-\sin^2 x) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8\sin^4 x + 4\sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$8t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 6. Giải phương trình: $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{5}{2} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Ta có:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{4\cos x}{2\cos^2 x} - \frac{5\cos^2 x}{2\cos^2 x} = 0. \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + 4\cos x - 5\cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

So sánh hai nghiệm với điều kiện thỏa mãn. Vậy $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

2 BÀI TẬP VẬN DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $2\sqrt{2}\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + 1 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $2\cos^2 x + (\sqrt{2}-2)\cos x = \sqrt{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x = \sqrt{6}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $2\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \arctan\dfrac{\sqrt{3}-3}{2} + k\pi \\ x = \arctan\dfrac{\sqrt{3}+3}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑪ $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑫ $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

⑬ $\sqrt{3}\cot^2 x - (1+\sqrt{3})\cot x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑭ $\sqrt{3}\cot^2 x + (1-\sqrt{3})\cot x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

② Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow (2t+7)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-7}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

③ Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\sqrt{2}t^2 - 2t - \sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

④ Đặt $t = \sin x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$-2t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (-t+1)(t+1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = -1 \\ t = \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + \sqrt{2}t - 2t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{2}t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow (2t+\sqrt{2})(2t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Đặt $t = \tan x\,(x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t+\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{3}$$

Với $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $t = \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(10) Đặt $t = \tan x \, (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}+3}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \tan x = \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \tan x \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} + k\pi \\ x = \arctan \dfrac{\sqrt{3}+3}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

(11) Đặt $t = \tan x \, (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - \sqrt{3}t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \tan x = -1 \\ t = \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

(12) Đặt $t = \cot x \, (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $t = \cot x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

(13) Đặt $t = \cot x \, (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(\sqrt{3}t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

(14) Đặt $t = \cot x \, (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 + t - \sqrt{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. **ĐS:** $x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $4\sin^4 x + 2\cos^2 x = 7$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có:

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$-6t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

② Ta có:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Ta có:

$$\begin{aligned} 3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1) &\Leftrightarrow 3 - 4(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\begin{bmatrix} t = \sin x 1 \\ t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{bmatrix}$

④ Ta có:

$$^{-}\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Ta có:

$$-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑥ Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x\,(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin 2x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑦ Ta có:

$$3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2 x\,(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos^2 x = 1 \\ t = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑧ Ta có:

$$4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 12t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Ta có:

$$4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2 x\ (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑩ Ta có:

$$4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x\ (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $1 + \cos 2x = 2\cos x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $9\sin x + \cos 2x = 8.$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

④ $2+\cos 2x+5\sin x=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $3\sin x+2\cos 2x=2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\arcsin\dfrac{3}{4}+k2\pi \\ x=-\arcsin\dfrac{3}{4}+\pi+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $2\cos 2x+8\sin x-5=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑦ $2\cos^2 2x+5\sin 2x+1=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑧ $5\cos x-2\sin\dfrac{x}{2}+7=0$. **ĐS:** $x=\pi+4k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑨ $\sin^2 x+\cos 2x+\cos x=2$. **ĐS:** $x=k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑩ $\cos 2x+\cos^2 x-\sin x+2=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có:

$$2\cos 2x-8\cos x+5=0\Leftrightarrow 4\cos^2 x-8\cos x+3=0.$$

Đặt $t=\cos x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2-8t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $t=\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

② Ta có:

$$1+\cos 2x=2\cos x\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\cos x=0.$$

Đặt $t=\cos x\,(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2-2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1. \end{array}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t=\cos x=0 \\ t=\cos x=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có:

$$9\sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

④ Ta có:

$$2 + \cos 2x + 5\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Ta có:

$$3\sin x + 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 3\sin x = 0.$$

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$-4t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 0 \\ t = \sin x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{3}{4} + k2\pi \\ x = -\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑥ Ta có:

$$2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 8\sin x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

⑦ Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin 2x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Đặt $y = \dfrac{x}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$5\cos 2y - 2\sin y + 7 = 0 \Leftrightarrow -10\sin^2 y - 2\sin y + 12 = 0.$$

Đặt $t = \sin y\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$10t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = \dfrac{-6}{5}. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1, y = \dfrac{x}{2}$ nên $t = \sin\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

⑨ Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -2 \\ t = 1. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

⑩ Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = \dfrac{-4}{3} \\ t = 1. \end{bmatrix}$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

② $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

③ $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-4\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $16\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos 2x = 15$. **ĐS:** $x = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} \dfrac{-5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $8\cos^2 x - \cos 4x = 1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2\arctan\sqrt{2\sqrt{3} - 3} + k2\pi \\ x = \pm 2\arctan\sqrt{\dfrac{1}{3}(3 + 2\sqrt{3})} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{12} \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{12} \end{array}\right.$

⑩ $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑪ $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑫ $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0.$ **ĐS:** $x=\frac{-5\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

② $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4.$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

③ $4\cos^2(6x-2)+16\cos^2(1-3x)=13.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3}\\x=\frac{-\pi}{18}+\frac{1}{3}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

④ $5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)-9.$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑦ $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-5\pi}{6}+k\pi\\x=\pi+k2\pi\\x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑧ $2\left(\cos^2 x+\frac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{-2\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑨ $4\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=7.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑩ $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}+2=2\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right).$ **ĐS:** $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\frac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x.$ **ĐS:** $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

② $\frac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{-3\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{-\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{-2\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{-4\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $9 - 13\cos x + \dfrac{4}{1+\tan^2 x} = 0$. **ĐS:** $x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

⑤ $2\tan^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}$. **ĐS:** $x = k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

⑥ $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{5}{2} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $2\sin^2 x + \tan^2 x = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $8\sin x\cos x - \cos 4x + 3 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

② $2\sin^2 8x + 6\sin 4x\cos 4x = 5$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4}\,(k \in \mathbb{Z})$

③ $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 1 - \sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $\dfrac{1 - \cos x(2\cos x + 1) - \sqrt{2}\sin x}{1 - \cos x} = 1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\dfrac{3\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x\cos x} = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1$. **ĐS:** $x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

⑦ $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

⑧ $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \dfrac{4 + 2\sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $3\cos 4x + 2\cos^2 x + 3 = 8\cos^6 x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $3\cos x - 2 = -3(1 - \cos x)\cot^2 x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -2\arctan\sqrt{5} + k2\pi \\ x = 2\arctan\sqrt{5} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑪ $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑫ $2\cos 5x \cos 3x + \sin x = \cos 8x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑬ $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4\sin 2x$. **ĐS:**

$$\begin{cases} x = -2\arctan\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{15} \pm \sqrt{2(4+\sqrt{15})}\right)\right) + k2\pi \\ x = -2\arctan\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{15})}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

⑭ $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4\sin x + \cos x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

② $3\tan 2x - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\tan x - 2}{1 + \tan x} + 4\cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

③ $(2\tan^2 x - 1)\cos x = 2 - \cos 2x$. **ĐS:** $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

④ $2\cos^2 x + 3\cos x - 2\cos 3x = 4\sin x \sin 2x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $4\sin x + 3 = 2(1 - \sin x)\tan^2 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\sin^3 x - 3 = (3\sin^2 x + 2\sin x - 3)\tan x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 3(1 - \cos x)\cot^2 x = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\dfrac{3\sin^2 x + 2\sin x - 3}{\cot x} + 3 = 2\sin^3 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $5\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{3}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x\left(1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SIN VÀ COS

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng tổng quát: $a\sin x + b\cos x = c$, $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. (1)

Phương pháp giải:

— $a^2 + b^2 < c^2$, phương trình vô nghiệm.

— $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta làm như sau:

Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. (2)

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\alpha \in [0; 2\pi]$. Ta có

(2) $\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, đây là phương trình ở dạng cơ bản.

Lưu ý: Hai công thức hay sử dụng là

— $\sin a \cos b \pm \cos a \sin b = \sin(a \pm b)$;

— $\cos a \cos b \pm \sin a \sin b = \cos(a \mp b)$.

Các dạng có cách giải tương tự

— $a \sin mx + b \cos mx = c$;

— $a \sin mx + b \cos mx = c \sin nx + d \cos nx$, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

B VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình

① $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}$; **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi, x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

①

$$\begin{aligned}
&\sin x - \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình

① $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; **ĐS:** $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

①

$$\begin{aligned}
&\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình

① $\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x)$; **ĐS:** $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

①

$$\begin{aligned}
&\cos 4x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 4x) \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = \sqrt{3}\cos x + \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4x = \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\sqrt{3}(\cos 2x+\sin 3x)=\sin 2x+\cos 3x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x=\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x-\sin$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=3x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{6}=-3x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3}$; **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x\left(\sqrt{3}-\sin x\right)=\cos x(1+\cos x)$. **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

①

$$\sqrt{3}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

②

$$\sin x\left(\sqrt{3}-\sin x\right)=\cos x(1+\cos x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x-\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình

① $\frac{\sin x-\sin 2x}{\cos x-\cos 2x}=\sqrt{3}$; **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

② $\frac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải

① Điều kiện xác định: $\cos x - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2x + k2\pi \\ x \neq -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ x \neq \dfrac{k2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ (1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = 2x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = -2x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

② Điều kiện xác định: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 2x - \sin x} = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = 2x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = -2x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

VÍ DỤ 6. Giải phương trình

① $\cos 2x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)+\tan x=2\sin x+1$; **ĐS:** $x=k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{11\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $4\sin^2 x+\tan x+\sqrt{2}\,(1+\tan x)\sin 3x=1$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k2\pi}{5}, x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải

① Điều kiện xác định: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\cos 2x-1-2\sin x+\cos 2x\tan x\tan\frac{x}{2}+\tan x=0\\ \Leftrightarrow\ &\cos 2x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\tan\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin^2 x-2\sin x=0\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos x}-2\sin x-2\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}\sin x=0 & (2)\\ \dfrac{\cos 2x}{\cos x}\cdot\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\cos x}-2\sin x-2=0. & (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

$(2)\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (4)

$(3)\Leftrightarrow\cos 2x\sin\dfrac{x}{2}-2\sin x\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}-2\cos x\cos\dfrac{x}{2}=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x-\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x\right)+\cos\dfrac{x}{2}-\left(\cos\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{3x}{2}=0\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}.$ (5)

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x=k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{11\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

② Điều kiện xác định: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(4\sin^2 x-2\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}\,(1+\tan x)\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &2\left(\sin^2-\cos^2 x\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}\,(1+\tan x)\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &2(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)\left(2\sin x-2\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos x}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (2)\\ 2\sin x-2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=0. & (3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}. \quad (4)$$

$$(3) \Leftrightarrow 2\sin x-2\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \sin 2x-2\cos^2 x+1+\sqrt{2}\sin 3x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\sin 3x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}-2x=3x+k2\pi\\ \frac{\pi}{4}-2x=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5}\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}. \quad (5)$$

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5}, x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải phương trình

① $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}, x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}&\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin 3x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 3x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=2\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=1\\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\
\Leftrightarrow\ &x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2\\
\Leftrightarrow\ &\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ &\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\frac{\pi}{12}$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

③ $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

④ $\sqrt{2}\cos 2x+\sin x-\cos x=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $\sin x-\sqrt{3}\cos x+2=4\cos^2 x$ **ĐS:** $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑦ $2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=1$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑧ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x=\sin x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ &\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{6}=\pi-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin 3x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 3x\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x-\dfrac{\pi}{3}=2x+k2\pi\\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{4\pi}{15}+\dfrac{k2\pi}{5}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\cos(\pi-3x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-3x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-3x)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-3x+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{3}=-\pi+3x+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=2x+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{4}=-2x+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned}
&\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \cos(\pi - 2x)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 2x)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\pi + 2x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑦

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2 = 1\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = 1\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x\cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x\sin\frac{\pi}{3} = \cos 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0\\
\Leftrightarrow\ &2x - \frac{\pi}{3} = k2\pi\\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑧

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) = \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x - \cos\frac{\pi}{3}\sin 5x = \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Giải phương trình

① $\sin 2x + \cos x = \cos 2x - \sin x$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

② $\sin 2x + 2\cos^2 x + \sin x - \cos x = 1$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

③ $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

④ $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑤ $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑥ $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1 + 2\sin x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
&\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x + \sin x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

④ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
&8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x + \sqrt{3}\sin x = 4\sin x\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\cos x + \cos 3x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -3x + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

⑤

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x \cos\frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}\sin x - \cos x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2x + \dfrac{\pi}{3} = x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$ **ĐS:** $x = \pi + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ **ĐS:** $x = \dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{k2\pi}{7}, x = -\dfrac{13\pi}{84} + \dfrac{k2\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$

④ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3}\sin(\pi - 2x) = 1$ **ĐS:** $x = k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑤ $\sin x(\sin x - 1) = \cos x(1 - \cos x)$ **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑥ $4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$ **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑦ $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2 = 0$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑧ $\cos x \sin 3x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + \cos 3x \sin x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑨ $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$ **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑩ $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\sin x = 1$ **ĐS:** $x = k\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑪ $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$ **ĐS:** $x = k\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑫ $2\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) + 1 = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ **ĐS:**
$x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑬ $2\sin^2 x + \sin 2x - 3\sin x + \cos x = 2$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑭ $\cos x - 2\cos 2x = 2\sin x \cos\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 5. Giải phương trình

① $\cos x = \sqrt{2}\sin 2x - \sin x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

② $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

③ $(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos x$ **ĐS:** $x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

④ $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x - 2\sin x = 0$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑤ $2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x = 1 + 2\sin 3x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑥ $4\sin^2 x + \sin x = 2 - \sqrt{3}\cos x$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

⑦ $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 4\sin 3x \cos x + 2$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑧ $2(\cos 6x + \cos 4x) - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) = \sin 2x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

⑨ $2\sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos 3x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

⑩ $\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑪ $\sqrt{3}\sin 7x - 2\sin 4x \sin 3x = \cos x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}, x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

⑫ $\sin^2 x + \dfrac{\sin 2x}{2} = \sqrt{2}\sin x \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $x = k\pi, x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑬ $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$ **ĐS:** $x = -\dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}, x = -\dfrac{5\pi}{48} + \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

⑭ $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$ **ĐS:** $x = \dfrac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 6. Giải phương trình

① $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ **ĐS:** $x = \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

② $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

③ $\dfrac{1 - 2\sin x}{1 + 2\sin x} = \dfrac{1 - \sin x}{\sqrt{3}\cos x}$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

④ $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\sqrt{3}$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

⑤ $4\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=4\cos 2x\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3},x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

⑥ $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ **ĐS:** $x=\dfrac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

BÀI 7. Giải phương trình

① $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=2\cos x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 2x-\cos x+\sin x=1$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

④ $\tan\dfrac{\pi}{7}\sin x+2\cos^2\dfrac{x}{2}=2$ **ĐS:** $x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

⑤ $\sqrt{3}\sin 2x-1=\cos 2x-2\cos x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi,x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

⑥ $\cos 2x+2\sin x=1+\sqrt{3}\sin 2x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

⑦ $2\sin 6x-2\sin 4x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\sin 2x$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3},x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

⑧ $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

BÀI 6. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP (BẬC 2, BẬC 3, BẬC 4)

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Dạng tổng quát $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$. (1)

2) Dấu hiệu nhận dạng: phương trình đối với hàm sin hoặc cosin đồng bậc (hoặc lệch nhau hai bậc). Chú ý hàm tan và cotan được xem là bậc 0.

3) Phương pháp giải:

Bước 1. Kiểm tra $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$ có là nghiệm của phương trình không?

Bước 2. Với $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \sin^2 x\neq 1\end{array}\right.$, ta chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$.

$$(1)\Leftrightarrow a\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+b\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+c=\frac{d}{\cos^2 x}\Leftrightarrow a\tan^2 x+b\tan x+c=d(1+\tan^2 x).$$

Bước 3. Đặt $t=\tan x$ để đưa về phương trình bậc hai với ẩn t, từ đó suy ra x.

! Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\sin 2x - 4\sin^2 x = 1$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$

Lời giải

Ta có phương trình có dạng $2\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 4\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. (2)

TH1. Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (2) ta được $5 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (2) cho $\cos^2 x$ ta được: $5\tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\frac{1}{5}.\end{array}\right.$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải

TH1. Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình đã cho.

— Nếu $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì $(1) \Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lí).

— Nếu $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì $(1) \Leftrightarrow 7 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x + 3\left[1 - \tan x(1 + \tan^2 x)\right] = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải

Điều kiện xác định $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3\tan x(1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$. □

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

② $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan(-2) + k\pi$

③ $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$. **ĐS:** $x = k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

④ $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

⑤ $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑥ $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

⑦ $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 9\cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$

⑧ $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \dfrac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x$. **ĐS:** $x = k\dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải.

① Ta có

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0. \quad (*)$$

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $0 = 0$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

② Ta có $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -2.\end{array}\right.$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan(-2) + k\pi$.

③ Ta có $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$.

TH1. Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

TH2. Với $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

④ Ta có $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x\cos x + 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$.

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

TH2. Với $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑤ Ta có $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑥ Ta có $2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $3\tan^2 x + (3+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑦ Ta có $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 9\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $4\tan^2 x - 5\tan x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

⑧ Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x &\Leftrightarrow \cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x = 1 + \sin^2 2x \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x) = 0. \end{aligned}$$

TH1. Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$.

TH2. Với $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{2}, x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\sin x = 2\cos^3 x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi$

② $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

③ $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

④ $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑤ $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$. **ĐS:** $x \in \varnothing$

⑥ $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

⑦ $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑧ $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑨ $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

⑩ $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑪ $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑫ $\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑬ $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

⑭ $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

⑮ $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

① Ta có $\sin x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \sin x - 2\cos^3 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan x(1+\tan^2 x) - 2\tan^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan x(1-\tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = 0.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
— Với $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$.

② Ta có $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = -1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$1 + \tan^3 x = \tan x(1+\tan^2 x) - (1+\tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

③ Ta có $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan x(1+\tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow -3\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

④ Ta có $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $4 = 3$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-4 = -3$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4(1+\tan^3 x) = \tan^2 x + 1 + 3\tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x =\\ \tan x =\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑤ Ta có $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x \Leftrightarrow 3\sin x + \cos^3 x = 5\sin x\cos^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$3\tan x(1 + \tan^2 x) + 1 = 5\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

⑥ Ta có $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x\sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$1 - 4\tan^3 x + \tan x(\tan^2 x + 1) = 3\tan^2 x \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{}}\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑦ Ta có $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x\sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x$ ta được:

$$3 + \tan^4 x = 4\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑧ Ta có $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 3\cos^3 x = \sin^2 x\cos x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x - 3\tan x(\tan^2 x + 1) + 3 = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑨ Ta có $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3\cos x = \sin x.$ (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = -1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$(\tan x + 1)^3 - 3(\tan^2 x + 1) = \tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

⑩ Điều kiện xác định $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Ta có $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x).$ (*)

Chia hai vế của (*) cho $\sin^2 x$ ta được:

$$1 + \cot^3 x = 2(\cot^2 x - 1) \Leftrightarrow \cot^3 x - 2\cot^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

⑪ Điều kiện xác định $\cos 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có

$$\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 4x + (1 + \tan x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\tan 4x = 0\\ \tan x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = k\dfrac{\pi}{4}\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow x$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

⑫ Điều kiện xác định $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}\tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x) &\Leftrightarrow \tan x \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \\ &\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x) \\ &\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

13 Ta có $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$. (*)

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x + \sqrt{3}\tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

— Với $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

14 Ta có

$$\begin{aligned} & 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 4\left(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right) + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6. \\ \Leftrightarrow\ & 4\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right) + 5\sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6. \\ \Leftrightarrow\ & 2\sin^2 2x - 5\sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x + 2 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

TH1. Với $\cos 2x = 0$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 2x = -1$ (vô lí).

TH2. Với $\cos 2x \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 2x$ ta được:

$$2\tan^2 2x - 5\tan 2x - 1 + 2(1 + \tan^2 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\tan^2 2x - 5\tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

— Với $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$.

— Với $\tan 2x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

15 Điều kiện xác định $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned} 3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x \ &\Leftrightarrow\ 3\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2}\right) + 2(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ (\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x)\left(2 - \frac{3\cos x}{\sin^2 x}\right) = 0. \end{aligned}$$

TH1. Với $\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -\sqrt{2} \text{ (loại)}\end{array}\right. \Rightarrow$

$x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$

TH2. Với $2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Rightarrow$

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

□

BÀI 7. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1. $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0.$ (1)
Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = \ldots$ và viết $\sin x\cos x$ theo t.

! Khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện của t là $0 \le |t| \le \sqrt{2}$.

Dạng 2. $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0.$ (2)
Đặt $t = \tan x \pm \cot x$ (điều kiện $|t| \ge 2$), suy ra $t^2 = \ldots$ và biểu diễn $\tan^2 x + \cot^2 x$ theo t.

! Ta thường sử dụng kết quả $\tan x \cot x = 1$ và $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin 2x + (2-\sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 1 - 2\sqrt{2} = 0.$ (1)

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 + (2-\sqrt{2})t + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + (2-\sqrt{2})t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ t = -2 \text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $2(\tan^2 x+\cot^2 x)-(4-\sqrt{2})(\tan x+\cot x)+4+2\sqrt{2}=0.(1)$

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}$.
Đặt $t=\tan x+\cot x$ ($|t|\geq 2$), suy ra $t^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$. Thay vào (1) ta được

$$2(t^2-2)-(4-\sqrt{2})t+4+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2t^2-(4-\sqrt{2})t+2\sqrt{2}=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5$. **ĐS:** $-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$

② $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x=2$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

③ $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

④ $(1+\sqrt{2})(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi, \dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$

⑤ $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x$. **ĐS:** $\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$

⑥ $(1-\sqrt{2})(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi, \dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$

⑦ $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-2\sin 2x=1$. **ĐS:** $\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi, \dfrac{13\pi}{12}+k2\pi$

⑧ $\sin x-\cos x=2\sqrt{6}\sin x\cos x$. **ĐS:**
$-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi, \dfrac{9\pi}{12}+k2\pi, \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, -\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$

Lời giải.

① $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5$. (1)
Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\leq\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2-1-2\sqrt{2}t-5=0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\sqrt{2}\text{ (thỏa mãn)}\\ t=3\sqrt{2}\text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t=-\sqrt{2}$, suy ra $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-1\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$.

② $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x=2.$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2t+3\left(t^2-1\right)=2\Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (thỏa mãn)}\\ t=-\dfrac{5}{3}\text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, suy ra $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.$

③ $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t+\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (thỏa mãn)}\\ t=-3\text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, suy ra $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.$

④ $(1+\sqrt{2})(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1+\sqrt{2})t+1-t^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2-(1+\sqrt{2})t+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\text{ (thỏa mãn)}\\ t=\sqrt{2}\text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=1$, suy ra $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi.$

Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi.$

⑤ $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x.$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t=3-(1-t^2)\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+2=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\text{ (thỏa mãn).}$$

Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi.$

⑥ $(1-\sqrt{2})(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x.$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1-\sqrt{2})(1+t)=1-t^2\Leftrightarrow t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\text{ (thỏa mãn)}\\ t=\sqrt{2}\text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t=-1$, suy ra

$$\begin{aligned}&\sin x-\cos x=-1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{-\pi}{4}\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.\end{aligned}$$

Với $t=\sqrt{2}$, suy ra $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$.

⑦ $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-2\sin 2x=1.$ (1)

Đặt $t=\sin x-\cos x$ ($|t|\le\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t-2(1-t^2)=1\Leftrightarrow 2t^2+2\sqrt{2}t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ (thỏa mãn)}\\ t=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned}&\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi.\end{aligned}$$

⑧ $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x \cos x$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t = \sqrt{6}(1 - t^2) \Leftrightarrow \sqrt{6}t^2 + t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

Với $t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Với $t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{-\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{19\pi}{12} + k2\pi \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

② $\dfrac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

③ $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{4\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3}$

④ $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$. **ĐS:** $k2\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑤ $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑥ $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

⑦ $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$

⑧ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

Lời giải.

① $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$.

Thay vào (1) ta được

$$3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \frac{2}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

② $\frac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

$(1) \Leftrightarrow 2(1 + \cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(\cot^2 x + \tan^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0$. (2)

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$.

Thay vào (2) ta được

$$2(t^2 - 2) + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

③ $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\ \Rightarrow\ & (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2\sin 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x\right] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

④ $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$ (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\sin^2 x \sin x - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x(1-\cos^2 x) - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x(1-\cos x)(1+\cos x) + (1-\cos x)(2\cos x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\cos x)[2\sin x(1+\cos x) + 2\cos x + 1] = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\cos x = 0\\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

⑤ $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0.$ (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0\\
&\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos x + 1) + \sin x(1-\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin^2 x)(2\cos x + 1) + \sin x(1-\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(2\cos x + 1) + \sin x(1-\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[(1+\sin x)(2\cos x + 1) + \sin x\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2\cos x + 1 + 2\sin x \cdot \cos x + \sin x + \sin x\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sin x = 0\\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

⑥ $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[2 + 2\sin x \cos x - 1 - (\cos x + \sin x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[1 + 2\sin x \cos x - (\cos x + \sin x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x + \sin x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow -\cos 2x(\cos x + \sin x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x + \sin x = 1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi.
\end{aligned}$$

⑦ $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = (\sin x - \cos x)^2\\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[(1 + \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0\\ 1 + \sin x \cos x - (\sin x - \cos x) = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi.
\end{aligned}$$

⑧ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x).$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = (2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = 2\sin x - 2\cos x - \cos x \sin x + \cos^2 x\\
&\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x + 2 = 0\\
&\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \left(\text{với } t = \sin x - \cos x, \frac{1 - t^2}{2} = \sin x \cos x, -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1 (\text{thỏa mãn})\\ t = 5 (\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = -1$ suy ra $\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. (k \in Z).$

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$ **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$

② $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{11\pi}{12} + k2\pi, -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$

③ $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi$

④ $2\sin 2x + 8 = 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x|.$ **ĐS:** $\frac{5\pi}{12} + k2\pi, \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{13\pi}{12} + k2\pi, \frac{-7\pi}{12} + k2\pi$

⑤ $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1.$ **ĐS:** $k\frac{\pi}{2}$

⑥ $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1.$ **ĐS:** $k\frac{\pi}{2}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $(3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2.$ **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

② $\tan^2 x \cdot (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x = 1.$ **ĐS:** $k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, \pm\arctan\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k2\pi$

BÀI 8. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1. $\boxed{m \cdot \sin 2x + n \cdot \cos 2x + p \cdot \sin x + q \cdot \cos x + r = 0.}$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, còn $\cos 2x = \begin{cases} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2\cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2\sin^2 x & (3) \end{cases}$
- Nếu thiếu $\sin 2x$ ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường được đưa về dạng $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.
- Nếu theo (2) được: $\sin x \cdot (2m \cdot \cos x + p) + \underbrace{\left(2n \cdot \cos^2 x + q \cdot \cos x + r - n\right)}_{(i)} =$ 0 và theo (3) được $\cos x(2m \cdot \sin x + q) + \underbrace{\left(-2n \cdot \sin^2 x + p \cdot \sin x + r + n\right)}_{(ii)} = 0.$

  Ta sẽ phân tích $(i), (ii)$ thành nhân tử dựa vào: $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$. Với t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình $at^2 + bt + c = 0$ để xác định lượng nhân tử chung.

Dạng 2. Phương trình có chứa $R(\ldots, \tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X, \ldots)$, sao cho cung của sin, cos gấp đôi cung của tan hoặc cot. Lúc đó đặt $t = \tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X = 2\sin X \cos X = 2 \cdot \frac{\sin X}{\cos X} \cdot \cos^2 X = \frac{2\tan X}{1 + \tan^2 X} = \frac{2t}{1 + t^2}.$

- $\cos 2X = 2\cos^2 X - 1 = 2 \cdot \dfrac{1}{1+\tan^2 X} - 1 = \dfrac{1-\tan^2 X}{1+\tan^2 X} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan 2X = \dfrac{\sin 2X}{\cos 2X} = \dfrac{2t}{1-t^2}$ và $\cot 2X = \dfrac{1-t^2}{2t}$.

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t, giải ra sẽ tìm được $t \Rightarrow x$.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\cos 2x - \cos x - 3\sin x - 2 = 0$. (1)

Lời giải

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 3\sin x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 x - 2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sin x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2} - \sin x - \frac{3}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2} + \sin x + \frac{3}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\cos x - \sin x - 2)(\cos x + \sin x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 2 \\ \cos x + \sin x = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(\text{vô nghiệm}) \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$. (1)

Lời giải

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)-7\sin x-2\cos x+4=0\\
&\Leftrightarrow \cos x\left(4\sin x-2\right)+\left(2\sin^2 x-7\sin x+3\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x-3\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\cos x+\sin x-3\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ 2\cos x+\sin x-3=0\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow 2\sin x=1\\
&\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin 2x+2\tan x=3$. (1)

Lời giải

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}+2t=3\\
&\Leftrightarrow 2t+2t\left(1+t^2\right)-3\left(1+t^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+4t-3=0\\
&\Leftrightarrow (t-1)(2t^2-t+3)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t-1=0\\ 2t^2-t+3=0\,\text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow t=1\\
&\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải phương trình lượng giác $\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\pi+k2\pi$

Lời giải.
$\cos 2x + 3\cos x + 2 = \sin x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3\cos x + 2 - \sin x = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 x + 2\cdot\cos x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \left(\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x + \frac{3}{2} + \sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow (\cos x + \sin x + 2)(\cos x - \sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = -2 \text{ (loại)}\\ \cos x - \sin x = -1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi.
\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $1 + 3\tan x = 2\sin 2x.$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4} + k\pi$

② $\cos 2x + \tan x = 1.$ **ĐS:** $k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$

③ $\sin 2x + 2\tan x = 3.$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi$

④ $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$ **ĐS:** $k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi$

⑤ $1 + \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}.$ **ĐS:** $k\pi$

⑥ $\cot x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right).$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4}$

Lời giải.

① $1 + 3\tan x = 2\sin 2x.$ (1)
Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1 + 3\tan x = 2\cdot\frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}\\
&\Leftrightarrow (1 + 3\tan x)(1 + \tan^2 x) = 4\tan x\\
&\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3\tan^2 x - 2\tan x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \tan x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \tan x = -1\\
&\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

② $\cos 2x + \tan x = 1.$ (1)

Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \\
&\Rightarrow 2\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x\,[2\sin x \cos x - 1] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

③ $\sin 2x + 2\tan x = 3.$ (1)

Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 - \frac{2}{\cos x}(\sin x - \cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - \frac{2}{\cos x}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \text{vô nghiệm vì từ phương trình suy ra } \sin x = \cos x + \dfrac{2}{\cos x} \geq 2\sqrt{2} \text{ (vô lí)} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

④ $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x.$ (1)

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x)=1+\frac{\sin x}{\cos x}\\
&\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2=\sin x+\cos x\\
&\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos^2 x-\sin^2 x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

⑤ $1+\cot\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1+\tan x}{1+\sin 2x}.$ (1)

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0\\ \sin 2x\neq -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 1-\tan x=\frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}\\
&\Leftrightarrow (1+\sin 2x)(1-\tan x)=(1+\tan x)\\
&\Leftrightarrow 1+\sin 2x-\tan x-\sin 2x\tan x=1+\tan x\\
&\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x\frac{\sin x}{\cos x}=0\\
&\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-2\sin x-2\sin^2 x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-1-2\sin x\cos x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \sin x\left(\cos 2x-\sin 2x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x-\sin 2x=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (\text{loại})\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow x=k\pi.
\end{aligned}$$

⑥ $\cot x = \dfrac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right).$ (1)

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x} \\
&\Leftrightarrow \cos x(2 + \sin 2x) = (\sin 2x - \cos 2x)\sin x \\
&\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sin x \cos^2 x = 2\sin^2 x \cos x - (2\cos^2 x - 1)\sin x \\
&\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sin x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos x + 2\cos^2 x \sin x - \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos x - \sin x + 4\sin x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos x - \sin x + 2\sin x \cos x(2\cos x - \sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\cos x - \sin x)(1 + 2\sin x \cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \\
&\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \left(\text{vì } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right).
\end{aligned}$$

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\dfrac{5 + \cos 2x}{3 + 2\tan x} = 2\cos x.$ **ĐS:** $k2\pi$

② $3\sin x - \cos x + 2 - \cos 2x = \sin 2x.$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

③ $5\cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right).$ **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

④ $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 1.$ **ĐS:** $\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑤ $\sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\sin x + \cos x + 2.$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

⑥ $\cos x + \sin x - \sin 2x - \cos 2x = 1.$ **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

⑦ $\sin 2x - \cos x + 2\sin x = \cos 2x + 3\sin^2 x.$ **ĐS:** $\pi + k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right) + k\pi$

⑧ $\sin 2x - 2\cos^2 x = 3\sin x - \cos x.$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

⑨ $2\sqrt{2}\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 = 2\sqrt{2}\cos x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + k\pi$

⑩ $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x = 1$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

⑪ $\sin 2x + \cos 2x - 3\cos x + 2 = \sin x$. **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi$

⑫ $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$. **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

⑬ $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

⑭ $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi$

⑮ $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + 3\cos x - 2$. **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi$

⑯ $\frac{2 - \tan x}{\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan x}{\sqrt{2}\sin x}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

⑰ $\sqrt{3}(\sin 2x - 3\sin x) = 2\cos^2 x + 3\cos x - 5$. **ĐS:** $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi$

② $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi$

BÀI 9. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

TH1. Tổng các số không âm: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

TH2. Đối lập: $A = B$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \le M \\ B \ge M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M. \end{cases}$

Hoặc: $A + B = M + N$ mà chứng minh được $\begin{cases} A \le M \\ B \le N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N. \end{cases}$

TH3. Một số trường hợp đặc biệt

— $\sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases}$ — $\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$

— $\cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases}$ — $\cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$

— $\sin u \cdot \sin v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ — $\sin u . \sin v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

— $\cos u . \cos v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ — $\cos u . \cos v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi;\ x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi$.

② $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi;$ $x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi$.

Lời giải

① $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos x \neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\tan x = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi;\ x = -\dfrac{\pi}{6} + l2\pi$.

② $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0 \quad (2)$
Điều kiện $\cos x \neq 0$.

Khi đó

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (2\cos x-1)^2+(\sqrt{3}\tan x-1)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\ \sqrt{3}\tan x=1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+l\pi.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=\dfrac{\pi}{6}+l\pi.$

□

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos x\cos 2x=1.$ **ĐS:** $x=l\pi$

② $\sin x\sin 3x=-1.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Lời giải

① $\cos x\cos 2x=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k2\pi\\ x=l\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+2m\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=l\pi.$

② $\sin x\sin 3x=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 3x=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{6}+\dfrac{2l\pi}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-\pi}{2}+2m\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n2\pi}{3}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+2m\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

□

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình lượng giác sau: $\tan^2 x+\cot^2 x=2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Lời giải

Điều kiện $\sin 2x\neq 0.$

Ta có $\begin{cases}\tan^2 x+\cot^2 x\geq 2\\ 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\tan^2 x+\cot^2 x=2\\ 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2.\end{cases}\quad(1)$

Theo bất đẳng thức Cauchy dấu "=" xảy ra khi: $\tan x = \cot x$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$ □

VÍ DỤ 4. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm

① $\cos(2x - 15^\circ) = 2m^2 + m$. **ĐS:** $-1 \le m \le \dfrac{1}{2}$

② $m\cos x + 1 = 3\cos x - 2m$. **ĐS:** $m \in \left[-4; \dfrac{2}{3}\right]$

③ $(4m-1)\sin x + 2 = m\sin x - 3$. **ĐS:** $m \in \left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right] \cup [2; +\infty)$

Lời giải

① Để phương trình $\cos(2x - 15^\circ) = 2m^2 + m$ có nghiệm thì

$$\begin{cases} 2m^2 + m \ge -1 \\ 2m^2 + m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le \frac{1}{2}.$$

② $m\cos x + 1 = 3\cos x - 2m \quad (2)$

Với $m = 3$ thì 1 trở thành $1 = -6$ (vô lý). Suy ra $m = 3$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Với $m \ne 3$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{-2m-1}{m-3} \quad (2)$.

Để (2) có nghiệm thì $\begin{cases} \dfrac{-2m-1}{m-3} \le 1 \\ \dfrac{-2m-1}{m-3} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m+2}{m-3} \le 0 \\ \dfrac{-m-4}{m-3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty) \\ m \in [-4; 3) \end{cases} \Leftrightarrow$

$m \in \left[-4; \dfrac{2}{3}\right]$.

③ $(4m-1)\sin x + 2 = m\sin x - 3 \quad (3)$

— Với $m = \dfrac{1}{3}$ thì (3) trở thành $2 = -3$. (vô lý)

Suy ra $m = \dfrac{1}{3}$ không thỏa yêu cầu đề bài.

— Với $m \ne \dfrac{1}{3}$ thì $(3) \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{-5}{3m-1}$. (4)

Để (4) có nghiệm thì

$$\begin{cases} \dfrac{-5}{3m-1} \le 1 \\ \dfrac{-5}{3m-1} \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m-4}{3m-1} \le 0 \\ \dfrac{3m-6}{3m-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \dfrac{-4}{3}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}; \infty\right) \\ m \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{-4}{3}\right] \cup [2; +$$

□

VÍ DỤ 5. Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

① Giải phương trình khi $m = \dfrac{3}{2}$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi$

② Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $m \in [-1;0)$

Lời giải

① Với $m = \dfrac{3}{2}$ thì phương trình trở thành $2\cos^2 x - 4\cos x + \dfrac{3}{2} = 0$. Ta có

$$2\cos^2 x - 4\cos x + \frac{3}{2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos x = \dfrac{3}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \tag{1.3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi. \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

② $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$. (1)

Đặt $t = \cos x$ khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì $t \in [-1;0)$.

(1) trở thành $2t^2 - (2m+1)t + m = 0$. (2)

Để phương trình (1) có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ thì phương trình (2) có nghiệm nằm trong khoảng $t \in [-1;0)$.

Mà $2t^2 - (2m+1)t + m = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = \dfrac{1}{2} \\ t = m. \end{bmatrix}$

Do đó $m \in [-1;0)$.

□

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

② $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi$

Lời giải.

① $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos x \neq 0$.
Khi đó $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$

② $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos 4x \neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (\cos x \cdot \tan 4x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \tan 4x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{m\pi}{4} \end{array}\right. \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + l\pi.
\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 2x \cos 4x = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi$ ② $\cos 2x \cos 6x = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2}$

Lời giải.

① $\sin 2x \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi.$

② $\cos 2x \cos 6x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

② $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Lời giải.

① $2\cos x+\sqrt{2}\sin 10x=3\sqrt{2}+2\cos 28x\sin x \Leftrightarrow 2\cos x-2\sin x\cos 28x=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 10x.$
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakowski cho vế trái ta được.

$$(2\cos x-2\sin x\cos 28x)^2\le 4+4\cos^2 28x\le 8\Rightarrow 2\cos x-2\sin x\cos 28x\le 2\sqrt{2}\quad(1)$$

Mặt khác $3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 10x\ge 3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}\quad(2)$.
Từ (1) và (2) Dấu "="xảy ra khi $\begin{cases}\cos^2 28x=1\\ \sin x\cos 28x=-\sin x\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

② $2\sin 5x+\cos 4x=3+\cot^2 x$
Ta có $\begin{cases}2\sin 5x\le 2\\ \cos 4x\le 1+\cot^2 x\end{cases}.$
Do đó

$$\begin{aligned}&2\sin 5x+\cos 4x=3+\cot^2 x\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}\sin 5x=1\\ \cos 4x=1+\cot^2 x\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\quad(1)\\ \cos 4x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\quad(2)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ &\Leftrightarrow\ \sin^2 x\cos 4x=1\\ &\Leftrightarrow\ (1-\cos 2x)\cos 4x=2\\ &\Leftrightarrow\ (1-\cos 2x)\left(2\cos^2 2x-1\right)=2\\ &\Leftrightarrow\ 2\cos^2 2x-1-2\cos^3 2x+\cos 2x-2=0\\ &\Leftrightarrow\ -2\cos^3 2x+2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0\\ &\Leftrightarrow\ -2(\cos 2x+1)\left(\cos^2 2x-2\cos 2x+\frac{3}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow\ \cos 2x=-1\\ &\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(3)\end{aligned}$$

Từ (1) và (3) ta được $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in Z.$

□

BÀI 4. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

① $\left(m^2+m\right)\cos 2x=m^2-m-3+m^2\cos 2x.$ **ĐS:** $m\in[-\sqrt{3};-1]\cup[\sqrt{3};3]$

② $m\sin x+2\cos x=1.$ **ĐS:** $m\in\mathbb{R}$

③ $m\cos 2x+(m+1)\sin 2x=m+2.$ **ĐS:** $m\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

Lời giải.

① $\left(m^2+m\right)\cos 2x = m^2-m-3+m^2\cos 2x \Leftrightarrow m\cos 2x = m^2-m-3$.
Xét $m=0$ khi đó ta được $0=3$ (vô lý).
Xét $m\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m^2-m-3}{m}$.
Vì $-1\leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{m^2-m-3}{m} \leq 1$.
Xét $\begin{cases} \dfrac{m^2-m-3}{m} \geq -1 \quad (1) \\ \dfrac{m^2-m-3}{m} \leq 1 \quad (2) \end{cases}$
$(1) \Leftrightarrow \dfrac{m^2-3}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{3};0)\cup[\sqrt{3};+\infty)$.
$(2) \Leftrightarrow \dfrac{m^2-2m-3}{m} \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1]\cup(0;3]$.
Vậy $m\in[-\sqrt{3};-1]\cup[\sqrt{3};3]$.

② $m\sin x + 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+4}}$.
Đặt $\cos a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}} \Rightarrow \sin a = \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}$.
Ta được

$$\begin{aligned} & \cos a\cdot\sin x + \sin a\cdot\cos x = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x+a) = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -a + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi \\ x = -a + \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\forall m\in\mathbb{R}$

③ $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m+2 \quad (1)$
Điều kiện

$$\begin{aligned} & m^2 + \left(m^2+1\right)^2 \geq \left(m^2+2\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & m \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty). \end{aligned}$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\cos 2x + \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\sin 2x = \dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}.$
Đặt $\sin a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \Rightarrow \cos a = \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}.$
Ta được

$$\begin{aligned} & \sin a\cos 2x + \cos a \sin 2x = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(a+2x) = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} a+2x = \arcsin\dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi \\ a+2x = \pi - \arcsin\dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$ thì phương trình có nghiệm.

□

BÀI 5. Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m$

① Giải phương trình khi $m = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2}$

② Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$. **ĐS:** $2 \leq m < \dfrac{17}{8}$

Lời giải.

① Khi $m = 1$ ta được

$$\begin{aligned} & \cos 4x + 6\sin x\cos x = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\sin^2 2x + 3\sin 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

② Đặt $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ và $g(x) = m$.
Xét $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
Suy ra $0 \le \sin 2x \le 1$.
Đặt $a = \sin 2x \Rightarrow 0 \le a \le 1$.
Xét $f(a) = -2a^2 + 3a + 1$ trên $[0;1]$.
Bảng biến thiên

a	0		$\frac{3}{4}$		1
$f(a)$	1	↗	$\frac{17}{8}$	↘	2

Vậy $f(x) = g(x)$ có hai nghiệm phân biệt khi $2 \le m < \frac{17}{8}$.

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\sin^2 x + \sin^2 3x = 4\sin x \sin^2 3x$. **ĐS:** $x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

② $\sin^2 2x + 2\sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

③ $-4\cos^2 x + 3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 4\sin x - 6$. **ĐS:** $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

④ $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{3} + k2\pi$

⑤ $\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x\right) = \sin x \sin^2 3x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin 5x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

② $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$. **ĐS:** $x = \varnothing$

③ $\sin 7x - \sin x = 2$. **ĐS:** $x = \varnothing$

④ $\cos 4x - \cos 6x = 2$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

⑤ $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. **ĐS:** $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

⑥ $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$. **ĐS:** $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\tan 2x + \tan 3x = \dfrac{-1}{\sin x \cos 2x \cos 3x}$. **ĐS:** $x \in \varnothing$

② $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

③ $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

④ $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2}$

⑤ $\cos 2x + \cos \dfrac{3x}{4} - 2 = 0$. **ĐS:** $x = k2\pi$

⑥ $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$. **ĐS:** $x = k\pi$

BÀI 9. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

① $m \sin x \cos x + \sin^2 x = m$. **ĐS:** $0 \le m \le \dfrac{4}{3}$

② $\sin x - \sqrt{5}\cos x + 1 = m(2 + \sin x)$. **ĐS:** $-1 \le m \le \dfrac{5}{3}$

③ $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$. **ĐS:** $-1 \le m \le 5$

④ $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m = 1$. **ĐS:** $-1 \le m \le 3$

⑤ $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 = 4m$. **ĐS:** $-1 \le m \le 0$

⑥ $3\sin^2 x + m \sin 2x - 4\cos^2 x = 0$. **ĐS:** $m \in \mathbb{R}$

⑦ $(m+2)\cos^2 x + m \sin 2x + (m+1)\sin^2 x = m - 2$. **ĐS:** $m \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$

⑧ $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (1+m)\cos^2 x = m$. **ĐS:** $-2 \le m \le 1$

BÀI 10. Tìm tham số m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 1 = m$ có nghiệm $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $\dfrac{3}{4} \le m \le 1$

BÀI 11. Tìm tham số m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $-1 \le m \le 3$

BÀI 12. Tìm tham số m để phương trình $2\cos 2x + (m+4)\sin x = m + 2$ có 2 nghiệm $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $-4 \le m \le 4$

BÀI 10. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3,\ \forall x \in (0; 2\pi)$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{3}, x = \dfrac{5\pi}{3}$

② $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 6x - \cos^2 6x$ **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{9}, x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0,\ \forall x \in [0; 14]$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}, x = \dfrac{5\pi}{2}, x = \dfrac{7\pi}{2}$

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ **ĐS:** $x = \pi + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$ **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$ **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

② $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$ **ĐS:** $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x\tan\dfrac{x}{2}\right) = 4$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ **ĐS:** $x = k\pi, x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

③ $\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$ **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi, x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$ **ĐS:** $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7},k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}, x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

BÀI 9. Giải các phương trình sau

① $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

② $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện $\cos x\neq 0$ và $\tan x\neq -1$. Phương trình tương đương với

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1+\sin x+\cos 2x=1\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-\sin x-1=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin x=1\text{(không thoả điều kiện)}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\text{(thoả điều kiện)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sin 2x\cos x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0\\
&\Leftrightarrow\ \sin x(2\cos^2 x-1)+\cos 2x(\cos x+2)=0\\
&\Leftrightarrow\ \cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x+2=0\text{ (vô nghiệm)}\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin x\cos x-\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-1=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(2\sin x-1)+2\sin^2 x+3\sin x-2=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x+\sin x+2=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 10. Giải các phương trình sau

① $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện $\sin x\neq 0$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}}=2\sqrt{2}\cos x\sin^2 x\\
\Leftrightarrow\ & 1+\cos 2x+\sin 2x-2\sqrt{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\cos x+\sin x-\sqrt{2})=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ (thoả điều kiện)}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \text{ (thoả điều kiện)}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin x=\cos 2x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos^2 x-1+\cos x)-(\cos 2x+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\cos 2x+\cos x)(\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\cos x\\ \sin x=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\cos(\pi-x)\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Điều kiện $\cos x\neq 0$ và $\tan x\neq -\sqrt{3}$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\cos x(\sin x+1)+(\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+1)(2\cos x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \text{ (không thoả điều kiện)}\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \text{ (không thoả điều kiện)}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 11. Giải các phương trình sau

① $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$ **ĐS:** $\frac{\pi}{2}+k\pi, k2\pi, \frac{2\pi}{3}+k2\pi$

② $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ **ĐS:** $\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\frac{2\pi}{3}$

③ $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}+k2\pi, -\frac{\pi}{12}+k2\pi$

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1)\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x - 1 = 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{bmatrix} , k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\dfrac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2})\cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{bmatrix} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 12. Giải các phương trình lượng giác sau

① $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

② $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$

③ $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

① Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(2\cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 5x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$.

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x(2\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 13. Giải phương trình lượng giác sau:

① $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

② $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$ **ĐS:** $\pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x\cos x \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - 2)(2\cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x - \sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 14. Giải phương trình lượng giác $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

Ta có $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -4 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -4 \text{ vô nghiệm} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. □

BÀI 15. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos x\cos 3x - \sin 2x\sin 6x - \sin 4x\sin 6x = 0$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}$

② $\cos x\cos 2x\cos 3x - \sin x\sin 2x\sin 3x = \dfrac{1}{2}$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

③ $\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x\cot x + \cos x\cot x$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

④ $4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k\pi$

⑤ $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k2\pi$

⑥ $2\cos x \cos 2x \cos 3x + 5 = 7\cos 2x.$ **ĐS:** $x = k\pi$

⑦ $\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = \cos x(\sin x + \cos x - \sin 3x).$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

⑧ $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x \cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0.$ **ĐS:** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi;$ $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$

⑨ $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right].$ **ĐS:** $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};$ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

⑩ $\frac{1}{2\cot^2 x + 1} + \frac{1}{2\tan^2 x + 1} = \frac{15\cos 4x}{8 + \sin^2 2x}.$ **ĐS:** $x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi$

⑪ $\frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\tan x - 1} + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi$

⑫ $3\sin^2 x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = \sin x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos x.$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

⑬ $\frac{(2\sin x + 1)(\cos 2x + \sin x) - 2\sin 3x + 6\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$ **ĐS:** $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

⑭ $\sqrt{\frac{3}{4} + \cos^2 x} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x} = 2.$ **ĐS:** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

⑮ $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x)\sin x.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi;$ $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

⑯ $\sin^3 x - \cos^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x - \cos x + 2 = 0.$ **ĐS:** $k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

⑰ $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7\cos x.$ **ĐS:** $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$

⑱ $8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3}\cos 2x = 11 - 3\sqrt{3}\sin 4x - 9\sin 2x.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2};$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi$

19 $\dfrac{\sin 5x}{\sin x}+\dfrac{2\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{2\cos 3x}{\cos x}=5.$ **ĐS:** $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$

20 $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2(\sin x+\cos x).$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;$ $x=-\pi+k2\pi$

21 $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi;$ $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$

22 $1+\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}+\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}=\cos 2x+2\cos x.$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi;$ $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$

23 $(2\cos 2x-1)\cos x-\sin x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\sin 3x.$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2};$ $x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi$

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\cos x\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 6x-\sin 4x\sin 6x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cdot\cos 3x-(\sin 2x+\sin 4x)\sin 6x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cdot\cos 3x-2\sin 3x\cdot\cos x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x\cdot\cos 3x\cdot(2\cos 6x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3},\ x=\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}(k\in\mathbb{Z}).$

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\cos 2x\left[\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x\right]+\sin 2x\left[\cos 4x-\cos 2x-\sin 2x\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\cos 2x+\sin 2x\right]\cdot\left[\cos^2 2x-\sin^2 2x-\sin 2x\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\cos 2x+\sin 2x\right]\cdot\left[\cos 4x-\sin 2x\right]=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{6}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{6},\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

③ Điều kiện xác định $\sin x \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cdot \cot x + \cos x \cdot \cot x \\
\Leftrightarrow\ &\cot x + \cos 2x + \sin x = 2\cos^2 x + \cos x \cdot \cot x \\
\Leftrightarrow\ &\cos x(1 - \cos x) + \sin x(\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\cos x - \sin x)(1 - \sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \text{ (loại) } (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x \\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + 1)\left[\sin^2 x + 2\sin x + 1 - (1 - sinx)(3 + \cos^4 x)\right]) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + 1)^3\left[1 - (1 - \sin x)^3\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &2\sin^2 x(\sin x - 1) + 1 + \cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)[2(1 - \cos x)(\sin x - 1) + 1] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(1 + \cos x)(\sin x + \cos x)\left[2 - (\sin x + \cos x)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pi + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

⑥ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &2\cos^3 2x + \cos^2 2x - 8\cos 2x + 5 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(2\cos 2x + 5)(\cos 2x - 1)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 2\cos 2x + 5 = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{5}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ &2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

⑦ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x\,[2\cos 2x\sin(-x) + \cos x] \\
\Leftrightarrow\ & \sin^2 2x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin 2x\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1-\cos 4x}{2} - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 4x - \cos 4x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

⑧ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - 4(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - 8\cos^3 x - 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1)(4\cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x + 1)(\sqrt{3}\sin x + 4\cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + 4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

⑨ Điều kiện xác định : $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & (\cos 2x + \sin 2x)\sin^2 x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)(\sin^2 x - \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = 0 \text{ (loại)} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

10 Điều kiện xác định : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{15(1 - 2\sin^2 2x)}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\sin^2 x\cos^2 x + 2(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x}{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + \sin^2 x\cos^2 x} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2 - \frac{\sin^2 2x}{2}}{2 + \frac{\sin^2 2x}{4}} = \frac{15 - 30\sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
\Leftrightarrow\ & 28\sin^4 2x + 217\sin^2 2x - 56 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \\ \sin^2 2x = -8 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

CHƯƠNG 2 TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Quy tắc cộng). Một công việc X được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$, trong đó

① Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện;

② Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện;

③ ...

④ Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Khi đó số cách hoàn thành công việc X là $n(X) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$ cách.

Định nghĩa 2 (Quy tắc nhân). Giả sử một nhiệm vụ X nào đó được hoàn thành lần lượt qua k *giai đoạn* $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

① Giai đoạn A_1 có n_1 cách làm;

② Giai đoạn A_2 có n_2 cách làm;

③ ...

④ Giai đoạn A_k có n_k cách làm.

Khi đó công việc X có số cách thực hiện là $n(X) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$ cách.

Định nghĩa 3 (Quy tắc bù trừ). Đối tượng x cần đếm được chứa trong một đối tượng X gồm x và $\overline{x}$ đối lập nhau. Nếu X có m cách chọn, $\overline{x}$ có n cách chọn. Vậy x có $(m - n)$ cách chọn.
Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa a và b. Ta cần làm:

— Bài toán 1: Đếm những đối tượng thỏa a.

— Bài toán 2: Đếm những đối tượng thỏa a, không thỏa b.

Do đó, kết quả bài toán = kết quả bài toán 1 − kết quả bài toán 2.

! — Nếu bài toán chia ra từng **trường hợp** không trùng lặp để hoàn thành công việc thì dùng **qui tắc cộng**, nếu bài toán chia ra từng **giai đoạn** thực hiện thì ta dùng **quy tắc nhân**. Trong nhiều bài toán, ta không chỉ kết hợp giữa hai quy tắc này lại với nhau để giải mà cần phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân, khi nào trừ.

— "Nếu cho tập hợp hữu hạn bất kỳ A và B giao nhau khác rỗng. Khi đó thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$". Đó là quy tắc cộng mở rộng. Do đó khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là **số chẵn, số lẻ, số chia hết** ta nên ưu tiên việc thực hiện **(chọn) chúng trước** và nếu **chứa số** 0 **nên chia** 2 **trường hợp** nhằm tránh trùng lặp với nhau.

— Dấu hiệu chia hết:
Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n+1$ chữ số ($a_n \neq 0$). Khi đó:

+ $N \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$.
+ $N \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}$.
+ $N \vdots 4$ (hay 25) $\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$ (hay 25).
+ $N \vdots 8$ (hay 125) $\Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$ (hay 125).
+ $N \vdots 3$ (hay 9) $\Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n \vdots 3$ (hay 9).

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

DẠNG 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc cộng

VÍ DỤ 1. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu cách chọn đề tài? **ĐS:** 31

Lời giải

Mỗi thí sinh có các 4 *phương án chọn đề tài:*

— *Chọn đề tài về lịch sử có* 8 *cách chọn.*

— *Chọn đề tài về thiên nhiên có* 7 *cách chọn.*

— *Chọn đề tài về con người có* 10 *cách chọn.*

— *Chọn đề tài về văn hóa có* 6 *cách chọn.*

Theo quy tắc cộng, có $8+7+10+6=31$ *cách chọn đề tài.* □

VÍ DỤ 2. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh A đến tỉnh B? **ĐS:** 18

Lời giải

Để đi từ A đến B có 3 *phương án lựa chọn:*

— *Đi bằng ô tô có* 10 *cách chọn.*

— *Đi bằng tàu hỏa có* 5 *cách chọn.*

— *Đi bằng máy bay có* 3 *cách chọn.*

Theo quy tắc cộng, có $10+5+3=18$ *cách chọn.* □

DẠNG 1.2. Bài toán sử dụng quy tắc nhân

VÍ DỤ 1. An đến nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà Cường? **ĐS:** 24

Lời giải

Để đi từ nhà An đến nhà Cường cần thực hiện 2 *giai đoạn*

— *Đi từ nhà An đến nhà Bình có* 4 *cách.*

— *Đi từ nhà Bình đến nhà Cường có* 6 *cách.*

Theo quy tắc nhân, có $4\cdot 6=24$ *cách chọn đường đi.* □

VÍ DỤ 2. Lớp $11A$ có 30 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp như trên, biết rằng một bạn chỉ có thể làm tối đa một vai trò? **ĐS:** 24360

Lời giải

Để bầu ra một ban cán sự lớp cần thực hiện 3 *giai đoạn*

— *Bầu lớp trưởng có* 30 *cách*

— *Bầu phó có* 29 *cách*

— *Bầu thủ quỹ có* 28 *cách*

Theo quy tắc nhân, có $30\cdot 29\cdot 28=24360$ *cách chọn.* □

DẠNG 1.3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ

VÍ DỤ 1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12? **ĐS:** 26880

Lời giải

Gọi $a_1a_2a_3a_4a_5$ là số cần lập.
Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau, ta thực hiện các bước lần lượt:

— *Chọn a_1 có 9 cách.*

— *Chọn a_2 có 9 cách.*

— *Chọn a_3 có 8 cách.*

— *Chọn a_4 có 7 cách.*

— *Chọn a_5 có 6 cách.*

Do đó có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số có năm chữ số khác nhau. Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bằng 12, ta thực hiện các bước lần lượt:

— *Chọn a_1a_2 có 1 cách.*

— *Chọn a_3 có 8 cách.*

— *Chọn a_4 có 7 cách.*

— *Chọn a_5 có 6 cách.*

Do đó có $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số có năm chữ số khác nhau. Theo quy tắc bù trừ, có $27216 - 336 = 26880$ số có năm chữ số khác nhau không bắt đầu bởi 12. □

VÍ DỤ 2. Trong một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi trắng và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ hộp này sao cho chúng không đủ ba màu? **ĐS:** 335

Lời giải

Số cách lấy 3 bi bất kỳ từ 15 bi là $C_{15}^3 = 455$.
Số cách lấy 3 bi từ 15 bi mà đủ ba màu là $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
Theo quy tắc bù trừ, số cách lấy 3 viên bi không đủ ba màu là $455 - 120 = 335$. □

1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 30 cách

Lời giải.
Để chọn 1 viên bi để chơi có các phương án

+ Chọn 1 viên bi trắng có 12 cách.

+ Chọn 1 viên bi xanh có 10 cách.

+ Chọn 1 viên bi đỏ có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là $12 + 10 + 8 = 30$ cách. □

BÀI 2. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ:

a) Có mấy cách vào và ra chợ? **ĐS:** 16

b) Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau? **ĐS:** 12

Lời giải.

a) Để vào và ra chợ ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ có 4 cách

Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 4 = 16$ cách vào và ra chợ.

b) Để vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ bằng cổng khác có 3 cách

Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 3 = 12$ cách vào và ra chợ bằng hai cổng khác nhau.

□

BÀI 3. Có 8 quyển sách Toán, 7 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển trong bất kỳ 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 20 cách

Lời giải.

Để chọn 1 quyển sách trong 3 loại sách, ta có các phương án

+ Chọn 1 quyển sách Toán có 8 cách.

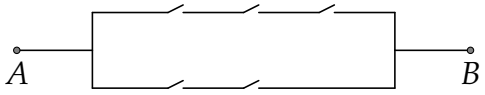
+ Chọn 1 quyển sách Lí có 7 cách.

+ Chọn 1 quyển sách Hóa có 5 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là $8 + 7 + 5 = 20$ cách. □

BÀI 4.

Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ bên cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 5 công tắc để có được dòng điện đi từ A đến B. **ĐS:** 12 cách



Lời giải.

Để dòng điện đi từ A đến B có 2 phương án

— Phương án 3 công tắc phía trên đóng. Khi đó có $2^2 = 4$ trạng thái của các công tắc phía dưới.

— Phương án 2 công tắc phía dưới đóng. Khi đó có $2^3 = 8$ trạng thái của các công tắc phía trên.

Theo quy tắc cộng, có $4 + 8 = 12$ cách để dòng điện đi từ A đến B. □

BÀI 5. Đề thi học kỳ môn Hóa gồm hai phần: trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 15 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Hỏi có bao nhiêu cách ra đề? **ĐS:** 120 cách

Lời giải.

Để tạo được một đề thi, cần thực hiện hai bước liên tiếp

— Chọn đề trắc nghiệm có 15 cách.

— Chọn đề tự luận có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, có $15 \cdot 8 = 120$ cách ra đề. □

BÀI 6. Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 cái áo màu xanh và 12 cái áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn? **ĐS:** 240 cách

Lời giải.
Để chọn một bộ quần áo khác màu, ta có các phương án

— Áo màu xanh và quần màu đỏ có $18 \cdot 8 = 144$ cách.

— Áo màu đỏ và quần màu xanh có $12 \cdot 8 = 96$ cách.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn quần áo là $144 + 96 = 240$ cách. □

BÀI 7. Trong lớp $11A$ có 39 học sinh trong đó có học sinh tên Chiến, lớp $11B$ có 32 học sinh trong đó có học sinh tên Tranh. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc? **ĐS:** 1247 cách

Lời giải.
Để chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp, có $39 \cdot 32 = 1248$ cách.
Trong đó có 1 cách chọn tổ có mặt cả Chiến và Tranh.
Do đó số cách chọn một tổ không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc là $1248 - 1 = 1247$ cách. □

BÀI 8. Trong lớp $11A$ có 50 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên? **ĐS:** 97 cách

Lời giải.
Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn chỉ có Ưu 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có $1 \cdot 48 = 48$ cách trong trường hợp này

— Phương án 2: Chọn chỉ có Tiên 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có $1 \cdot 48 = 48$ cách trong trường hợp này

— Phương án 3: Có cả Ưu và Tiên: 1 cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là $48 + 48 + 1 = 97$ cách thỏa yêu cầu. □

BÀI 9. Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hồng, 7 bông cúc, 5 bông đào. Chọn ngẫu nhiên 4 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó hoa được chọn có đủ cả ba loại? **ĐS:** 2380 cách

Lời giải.
Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn 2 bông hồng, 1 bông cúc, 1 bông đào có $\dfrac{8 \cdot 7}{2!} \cdot 7 \cdot 5 = 980$ cách trong trường hợp này.

— Phương án 2: Chọn 1 bông hồng, 2 bông cúc, 1 bông đào có $7 \cdot \dfrac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 5 = 840$ cách trong trường hợp này.

— Phương án 3: Chọn 1 bông hồng, 1 bông cúc, 2 bông đào có $8 \cdot 7 \cdot \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 560$ cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là $980 + 840 + 560 = 2380$ cách thỏa yêu cầu. □

BÀI 10. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh ? **ĐS:** 805 cách

Lời giải.
Có 4 phương án chọn.

— Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ từ 12 học sinh có $\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6!}=924$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 12 có $\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{6!}=84$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 11 có $\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6!}=28$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 10 có $\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6!}=7$ cách.

Do đó số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $924-(84+28+7)=805$ cách. □

BÀI 11. Có bao nhiêu biển số xe gồm hai chữ cái ở đầu (26 chữ cái) và 4 chữ số theo sau (chữ số đầu không nhất thiết khác 0 và chữ số cuối khác 0), sao cho:

① Chữ cái tùy ý và bốn chữ số tùy ý tạo thành một số chia hết cho 2 theo sau. **ĐS:** 2704000 cách

② Chữ cái khác nhau và 4 chữ số đôi một khác nhau tạo thành một số chia hết cho 5 tiếp theo sau. **ĐS:** 291200 cách

Lời giải.

① Có 3 bước chọn.

— Chọn 2 chữ cái 26^2 cách.
— Chọn 3 chữ số tiếp theo có 10^3 cách.
— Chọn chữ số cuối cùng thuộc $\{2;4;6;8\}$ có 4 cách.

Vậy có tất cả $26^2\cdot 10^3\cdot 4=2704000$ cách.

② Có 3 bước chọn.

— Chọn 2 chữ cái có $26\cdot 25=650$ cách.
— Chữ số cuối có 1 cách chọn số 5.
— Chọn 3 chữ số còn lại $8\cdot 8\cdot 7=448$ cách.

Vậy có tất cả $26\cdot 25\cdot 1\cdot 8\cdot 8\cdot 7=291200$ cách.

□

BÀI 12. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường Đại học bằng một chữ cái (26 chữ cái) và một số nguyên dương theo sau mà không vượt quá 100. Bằng cách ghi như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau? **ĐS:** 2600 cách

Lời giải.
Có 26 chữ cái và 100 số thỏa mãn.
Vậy số cách ghi nhiều nhất là $26\cdot 100=2600$ cách. □

BÀI 13. Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số được lấy từ tập A, sao cho các chữ số này:

① Tùy ý. **ĐS:** 90000 số

② Khác nhau từng đôi một. **ĐS:** 27216 số

③ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số lẻ. **ĐS:** 13440 số

④ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 5. **ĐS:** 5712 số

⑤ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 2. **ĐS:** 13776 số

Lời giải.
Gọi $\overline{abcde}$ là số cần tìm.

①

— a có 9 cách chọn.
— b có 10 cách chọn.
— c có 10 cách chọn.
— d có 10 cách chọn.
— e có 10 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ số thỏa yêu cầu.

②

— a có 9 cách chọn.
— b có 9 cách chọn.
— c có 8 cách chọn.
— d có 7 cách chọn.
— e có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số thỏa mãn yêu cầu.

③

— e có 5 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13440$ số thỏa mãn yêu cầu.

④ Có 2 trường hợp:
Trường hợp 1:

— $e = 0$ có 1 cách chọn.
— a có 9 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$ số trong trường hợp này.
Trường hợp 2:

— $e = 5$ có 1 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 2688$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả: $3024 + 2688 = 5712$ số thỏa mãn yêu cầu.

⑤ Có 2 trường hợp:
Trường hợp 1:

— $e = 0$ có 1 cách chọn.
— a có 9 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$ số trong trường hợp này.
Trường hợp 2:

— $e \in \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10752$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $3024 + 10752 = 13776$ số thỏa mãn yêu cầu.

□

BÀI 14. Từ các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2? **ĐS:** 1218 số

Lời giải.
Gọi $A = \overline{ab2cd}$ $(a \neq 0)$.

— Xét $A = \overline{ab2cd}$, a bất kì, $d \in \{0; 4; 6; 8\}$
Có 4 cách chọn d, 8 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, nên có $4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344$ cách.

— Xét $A = \overline{ab2cd}$, $d \in \{4;6;8\}$ và $a = 0$.

Có 3 cách chọn d, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, nên có $3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$ cách.
Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là $1344 - 126 = 1218$ số. □

BÀI 15. Cho tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một từ X, sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1. **ĐS:** 2280 số

Lời giải.
Đặt số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$.
+ Xét trường hợp a bất kỳ.

— Xếp số 1 vào một trong ba vị trí a, b, c có 3 cách.

— Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có $7, 6, 5, 4$ cách.

Do đó có $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2520$ cách xếp.
+ Xét trường hợp $a = 0$.

— Xếp số 1 vào một trong hai vị trí b, c có 2 cách.

— Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có $6, 5, 4$ cách.

Do đó có $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 240$ cách.
Vậy có tất cả $2520 - 240 = 2280$ số xếp thỏa yêu cầu. □

BÀI 16. Cho sáu chữ số $1;2;3;4;5;6$. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5? **ĐS:** 360 số và 60 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$

— a có 6 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

— c có 4 cách chọn.

— d có 3 cách chọn.

Do đó có tất cả $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số có 4 chữ số khác nhau.
Trong đó, các số cha hết cho 5 có dạng $\overline{abc5}$.

— d có 1 cách chọn.

— a có 5 cách chọn.

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Do đó có $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ số thỏa yêu cầu. □

BÀI 17. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số có nghĩa đôi một khác nhau chia hết cho 5 và luôn có chữ số 0 được lấy từ tập A? **ĐS:** 4680 số

Lời giải.
Gọi $x = \overline{abcdef}$
+ Xét số x có dạng $\overline{abcde0}$ có $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ số.
+ Xét số x có dạng $\overline{abcde5}$.

— Xếp số 0 vào 1 trong 5 vị trí có 5 cách.

— Xác vị trí còn lại lần lượt có 6, 5, 4, 3 cách.

Do đó có $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ cách.
+ Xét số x dạng $\overline{0bcde5}$ có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ cách.
Vậy có tất cả $2520 + 1800 - 360 = 3960$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 18. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số 1 phải có mặt một trong hai vị trí đầu? **ĐS:** 5712 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $x = \overline{abcde}$
+ Xét x dạng $\overline{1bcde}$ có $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ số.
+ Xét x dạng $\overline{a1cde}$

— Với a bất kỳ có $9 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ số.

— Với $a = 0$ có $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số.

Do đó có $3024 - 336 = 2688$ số.
Vậy có tất cả $3024 + 2688 = 5712$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 19. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số mà trong đó có hai chữ số chẵn đứng liền nhau, còn chữ số còn lại lẻ? **ĐS:** 225 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

— TH1: a, b chẵn, c lẻ có $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ số.

— TH2: a lẻ, b, c chẵn có $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ số.

Vậy có tất cả $100 + 125 = 225$ số thỏa yêu cầu. □

BÀI 20. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$? **ĐS:** 24 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

— a có 2 cách chọn ($a = 4$ hoặc $a = 3$).

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 21. Cho các chữ số $1; 2; 5; 7; 8$, có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ năm chữ số trên sao cho số tạo thành là một số nhỏ hơn 278? **ĐS:** 20 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

Trường hợp 1:

— $a = 1$ có 1 cách chọn.

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— $b < 7$ có 2 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 3:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— $b = 7$ có 1 cách chọn.

— $c \in \{1; 5\}$ có 2 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $12 + 6 + 2 = 20$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 22. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400? **ĐS:** 35 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}$ ($a \in \{1; 2; 3\}$).
Trường hợp 1:

— $a \in \{1; 3\}$ có 2 cách chọn.

— c có 2 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

Vậy có $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

Vậy có $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $20 + 15 = 35$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 23. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có năm chữ số khác nhau và nhỏ hơn 34000? **ĐS:** 3570 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $13; 15; 17; 19; 31$.

— Có 5 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 1050$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $10; 12; 14; 16; 18; 21; 23; 25; 27; 29; 30; 32$.

— Có 12 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $12 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 3: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $20; 24; 26; 28$.

— Có 4 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 504$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $1050 + 2016 + 504 = 3570$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 24. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12? **ĐS:** 26880 số

Lời giải.
Trước hết ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

— Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 9 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.
Tiếp theo, ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.
Vậy có $27216 - 336 = 26880$ số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12. □

BÀI 25. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập A và trong đó có chứa chữ số 4? **ĐS:** 1560 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số 4 ở vị trí hàng chục nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số 4 không nằm ở vị trí hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 4.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số thứ ba.

— Có 4 cách chọn chữ số thứ tư.

— Có 3 cách chọn chữ số thứ năm.

Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $360 + 1200 = 1560$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 26. Hỏi từ 10 chữ số $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1? **ĐS:** 50400 số

Lời giải.

— Có 6 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 1.

— Có 8 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.

— Có 7 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.

— Có 6 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.

— Có 5 cách chọn giá trị cho chữ số thứ sáu.

Vậy có $6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 50400$ số có 6 chữ số khác nhau thoả mãn. □

BÀI 27. Từ các chữ số $0;1;2;3;6;7;8;9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số 7? **ĐS:** 13320 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số 7 ở vị trí hàng trăm nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số 7 không nằm ở vị trí hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 7.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số thứ ba.

— Có 5 cách chọn chữ số thứ tư.

— Có 4 cách chọn chữ số thứ năm.

— Có 3 cách chọn chữ số thứ sáu.

Vậy có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10800$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $2520 + 10800 = 13320$ số có 6 chữ số thoả mãn. □

BÀI 28. Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3? **ĐS:** 480 số

Lời giải.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

— Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 3.

— Có 4 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.

— Có 3 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.

— Có 2 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.

Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$ số có 5 chữ số khác nhau thoả mãn. □

BÀI 29. Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$, từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và số đó chia hết cho 3? **ĐS:** 216 số

Lời giải.
Vì số được lập chia hết cho 3 nên các chữ số của số đó là $1;2;3;4;5$ hoặc $0;1;2;4;5$.
Trường hợp 1: Các chữ số của số được lập là $1;2;3;4;5$.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Các chữ số của số được lập là $0;1;2;4;5$.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $120 + 96 = 216$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 30. Từ các chữ số $0;1;2;\ldots;9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2? **ĐS:** 1218 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số hàng đơn vị là 0.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số hàng đơn vị khác 0.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có $3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 882$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $336 + 882 = 1218$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 31. Trong một trường THPT A, khối 11 mỗi học sinh tham gia một trong hai câu lạc bộ Toán và Tin học. Có 160 em tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin học, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 11 có bao nhiêu học sinh? **ĐS:** 250 học sinh

Lời giải.
Số học sinh khối 11 là $160 + 140 - 50 = 250$ học sinh. □

BÀI 32. Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao? **ĐS:** 15 học sinh

Lời giải.
Số em học sinh đăng ký cả hai môn thể thao là $30 + 25 - 40 = 15$ học sinh. □

BÀI 33. Có 5 học sinh, trong đó có An và Bình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh này lên một đoàn tàu gồm 8 toa, biết rằng:

① 5 học sinh lên cùng một toa. **ĐS:** 8 cách

② 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người. **ĐS:** 120 cách

③ 5 học sinh lên 5 toa khác nhau. **ĐS:** 6720 cách

④ An và Bình lên cùng toa đầu tiên. **ĐS:** 512 cách

⑤ An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này. **ĐS:** 2744 cách

Lời giải.

① Có 8 cách chọn toa tàu để cả 5 học sinh cùng lên toa tàu đó. Vậy có 8 cách sắp xếp để 5 học sinh lên cùng một toa.

② — Có 5 cách chọn học sinh lên toa đầu tiên.
— Có 4 cách chọn học sinh lên toa thứ hai.
— Có 3 cách chọn học sinh lên toa thứ ba.
— Có 2 cách chọn học sinh lên toa thứ tư.
— Có 1 cách chọn học sinh lên toa thứ năm.
Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người.

③ — Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh đầu tiên.

— Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ hai.
— Có 6 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
— Có 5 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
— Có 4 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa khác nhau.

④ — Có 1 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
— Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
— Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
— Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ cách sắp xếp để An và Bình lên cùng toa đầu tiên.

⑤ — Có 8 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
— Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
— Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
— Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2744$ cách sắp xếp để An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này.

□

BÀI 34. Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng năm chữ số, sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước? **ĐS:** 126 số

Lời giải.
Vì chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nên các chữ số phải khác 0. Trước tiên ta sẽ đếm số các số có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.

— Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
— Có 8 cách chọn chữ số hàng nghìn.
— Có 7 cách chọn chữ số hàng trăm.
— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.
— Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.
Nhận thấy, với một bộ 5 chữ số nào đó thì sẽ có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ cách sắp xếp vị trí cho các chữ số đó, tuy nhiên chỉ có 1 cách xếp các chữ số thoả mãn.
Vậy số các số thoả mãn bài toán là $\dfrac{15120}{120} = 126$ số. □

BÀI 35. Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. **ĐS:** 75 cách

Lời giải.
Có 10 cách chọn tấm thẻ ở hộp thứ nhất và có 10 cách chọn tấm thẻ ở hộp thứ hai, nên có $10 \cdot 10 = 100$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ.
Có 5 cách chọn tấm thẻ có số lẻ ở hộp thứ nhất và có 5 cách chọn tấm thẻ có số lẻ ở hộp thứ hai, nên có $5 \cdot 5 = 25$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số lẻ.
Vậy có $100 - 25 = 75$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. □

BÀI 36. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số phân biệt khác nhau được lấy từ tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu cách lấy hai phần tử từ tập S sao cho tích của hai phần tử này là một số chẵn? **ĐS:** 1050 cách

Lời giải.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy tập S có $6 \cdot 6 = 36$ phần tử.
Ta sẽ đếm xem trong tập S có bao nhiêu số lẻ.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy trong tập S có $3 \cdot 5 = 15$ số lẻ.
Có $36 \cdot 35 = 1260$ cách chọn ra hai số từ tập S và có $15 \cdot 14 = 210$ cách chọn ra hai số từ tập S có tích là số lẻ nên có $1260 - 210 = 1050$ cách chọn ra hai số từ tập S có tích là số chẵn. □

BÀI 37. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số phân biệt sao cho tổng của tám chữ số này chia hết cho 9. **ĐS:** 181440 số

Lời giải.
Vì số được lập chia hết cho 9 nên tổng hai chữ số không xuất hiện trong số được lập phải bằng 9.
Trường hợp 1: Hai chữ số 0 và 9 không xuất hiện trong số được lập.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 21: Hai chữ số không xuất hiện trong số được lập là $(1;8)$ hoặc $(2;7)$ hoặc $(3;6)$ hoặc $(4;5)$.

— Có 4 cách chọn hai chữ số không xuất hiện.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 141120$ số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $40320 + 141120 = 181440$ số có 8 chữ số thoả mãn. □

BÀI 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giai thừa). Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu bởi $n!$, là

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Tính chất 1. Giai thừa có các tính chất sau đây:

① $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

② Quy ước $0! = 1$.

Định nghĩa 2 (Hoán vị). Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

① Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *một hoán vị* của n phần tử này.

② *Số các hoán vị* của n phần tử tập hợp A được ký hiệu bởi P_n.

⚠ *Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử.*
Ví dụ: Hoán vị của 3 phần tử a, b, c gồm: a, b, c; a, c, b; b, a, c;...

Định lí 1 (Số các hoán vị). *Số các hoán vị của n phần tử được tính theo công thức:*

$$\mathrm{P}_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Định nghĩa 3 (Chỉnh hợp). Cho tập hợp S gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lí 2. *Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là:*

$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

⚠ *Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:*

— *Chỉ chọn k phần tử trong n phần tử của X ($1 \leq k < n$).*

— *Có sắp thự tự các phần tử đã chọn.*

Định nghĩa 4 (Tổ hợp). Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A). Ký hiệu C_n^k.

Định lí 3. *Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

⚠ *Với quy ước $\mathrm{C}_n^0 = 1$ thì với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$ ta có*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Tính chất 2. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

Tính chất 3 (Công thức Pascal). $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ với $1 \leq k \leq n$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giả sử muốn xếp 3 bạn A, B, C ngồi vào bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế? **ĐS:** $P_3 = 3! = 6$

Lời giải

Mỗi cách xếp chỗ cho 3 bạn trên được gọi là một hoán vị vị trí của 3 bạn.
Như vậy ta có số cách xếp chỗ là $P_3 = 3! = 6$ cách. □

VÍ DỤ 2. Có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau

① Các quyển sách được xếp tùy ý? **ĐS:** P_{12}

② Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau? **ĐS:** $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{P}_3$

Lời giải

① Số cách xếp các quyển sách tùy ý là một hoán vị của 12 phần tử, nên ta có P_{12} cách xếp.

② Vì các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau nên ta coi các môn là một phần tử, như vậy ta có P_3 cách xếp.
Ngoài ra trong từng môn, ta cũng có hoán vị của từng cuốn sách, do đó ta có $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3$ cách xếp.
Vậy ta có $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{P}_3$ cách xếp sách thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

VÍ DỤ 3. Giả sử muốn chọn 3 bạn trong 5 bạn A, B, C, D, E và sắp 3 bạn này vào một bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách? **ĐS:** A_5^3

Lời giải

Mỗi cách xếp 3 bạn trong 5 bạn vào một bàn dài là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử, nên ta có A_5^3 cách. □

VÍ DỤ 4. Cho tập $X = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số, sao cho

① Đôi một khác nhau? **ĐS:** A_7^4

② Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau? **ĐS:** $4 \cdot \mathrm{A}_6^3$

Lời giải

① Mỗi cách chọn 4 số khác nhau từ 7 số là một chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử. Do đó ta có A_7^4 số được tạo thành.

② Để số cần lập là số tự nhiên lẻ thì chữ số tận cùng là số lẻ, khi đó ta có 4 cách chọn chữ số tận cùng.
Mỗi cách chọn 3 chữ số còn lại là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử nên ta có A_6^3 cách.
Vậy có $4 \cdot A_6^3$ số được tạo thành.

□

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu cách lập một ban chấp hành gồm 3 người trong một chi đoàn có 14 đoàn viên?

ĐS: C_{14}^3

Lời giải

Mỗi cách lập một ban chấp hành gồm 3 người là một tổ hợp chập 3 của 14 nên ta có C_{14}^3 cách. □

VÍ DỤ 6. Vòng chung kết bóng đá Euro có 24 đội bóng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách dự đoán 4 đội bóng vào chung kết? **ĐS:** C_{24}^4

Lời giải

Mỗi cách dự đoán 4 đội vào chung kết là một tổ hợp chập 4 của 24 nên ta có C_{24}^4 cách. □

VÍ DỤ 7. Một lớp học có 30 học sinh, cần lập ra một tổ công tác gồm 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách? **ĐS:** C_{30}^5

Lời giải

Mỗi cách lập ra tổ công tác là một tổ hợp chập 5 của 30 nên ta có C_{30}^5 cách. □

VÍ DỤ 8. Trong không gian, cho tập hợp X gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^2

② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^3

Lời giải

① Để tạo thành đường thẳng, ta chọn 2 điểm trong 10 điểm nên số đường thẳng được tạo thành là C_{10}^2.

② Để tạo thành tam giác, ta chọn 3 điểm trong 10 điểm nên số tam giác được tạo thành là C_{10}^3.

□

C DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

— ***Bước 1.*** *Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:*

Các kí hiệu và công thức	*Điều kiện*
∘ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$	$n \in \mathbb{N}$
∘ $\mathrm{P}_n = n!$	$n \in \mathbb{N}$
∘ $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \le k \le n \end{cases}$
∘ $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
∘ $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \le k \le n \end{cases}$
∘ $\mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}$	$\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \le k \le n \end{cases}$

— ***Bước 2.*** *Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được biến.*

— ***Bước 3.*** *So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Thu gọn biểu thức $D = \dfrac{7!4!}{10!}\left(\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{9!}{2!7!}\right)$. **ĐS:** $D = \dfrac{2}{3}$

Lời giải

$$D = \frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!}\right) = \frac{4!}{8 \cdot 9 \cdot 10}\left(\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} - \frac{8 \cdot 9}{2!}\right) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 7}{9 \cdot 10} - \frac{3 \cdot 4}{10} = \frac{28}{15} - \frac{6}{5} = \frac{2}{3}.$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$. **ĐS:** $n = 8$

Lời giải

Điều kiện: $n \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72 \Leftrightarrow (n+1)n = 72 \Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \text{ (nhận)} \\ n = -9 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

□

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

① $\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8$; **ĐS:** $x = -1$ hoặc $x = 4$ ② $\mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2$; **ĐS:** $n = 8$

③ $\mathrm{C}_x^x + 2\mathrm{C}_x^{x-1} + \mathrm{C}_x^{x-2} = \mathrm{C}_{x+2}^{2x-3}$; **ĐS:** $x = 3$ ④ $\dfrac{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}}{\mathrm{P}_{x+1}} = \dfrac{1}{6}$; **ĐS:** $x = 3$

⑤ $72\mathrm{A}_x^1 - \mathrm{A}_{x+1}^3 = 72$. **ĐS:** $x = 8$

Lời giải

①

$$\mathrm{P}_2 \cdot x^2 - \mathrm{P}_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2! \cdot x^2 - 3! \cdot x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

② Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{20n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(2n-2) = 30(n-1) \left(\text{vì } n \geq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 2n^2 - 36n + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \text{ (nhận)} \\ n = 1 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

③ Điều kiện: $x \leq 5, x \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{C}_x^x + 2\mathrm{C}_x^{x-1} + \mathrm{C}_x^{x-2} = \mathrm{C}_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \mathrm{C}_x^x + \mathrm{C}_x^{x-1} + \mathrm{C}_x^{x-1} + \mathrm{C}_x^{x-2} = \mathrm{C}_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{x+1}^x + \mathrm{C}_{x+1}^{x-1} = \mathrm{C}_{x+2}^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{C}_{x+2}^x = \mathrm{C}_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x - 3 \\ x = x + 2 - (2x - 3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = \dfrac{5}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

④ Điều kiện: $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\mathrm{P}_x - \mathrm{P}_{x-1}}{\mathrm{P}_{x+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x+1)!} - \frac{(x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

⑤ Điều kiện: $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$.

$$72\mathrm{A}_x^1 - \mathrm{A}_{x+1}^3 = 72 \Leftrightarrow 72 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 72 \Leftrightarrow 72x - (x+1)x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^3 - 73x + 72 =$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\dfrac{5}{\mathrm{C}_5^x} - \dfrac{2}{\mathrm{C}_6^x} = \dfrac{14}{\mathrm{C}_7^x}$. **ĐS:** $x = 3$

Lời giải

Điều kiện: $x \le 5, x \in \mathbb{N}$.

$$\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x} \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{5!}{x!(5-x)!}} - \frac{2}{\frac{6!}{x!(6-x)!}} = \frac{14}{\frac{7!}{x!(7-x)!}} \Leftrightarrow \frac{5}{1} - \frac{2}{\frac{6}{(6-x)}} = \frac{14}{\frac{6\cdot 7}{(6-x)(7-x)}}$$

$$\Leftrightarrow 5 - \frac{2(6-x)}{6} = \frac{14(7-x)(6-x)}{6\cdot 7} \Leftrightarrow 15-(6-x) = (7-x)(6-x) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \text{ (l} \\ x = 3 \text{ (nh} \end{array}\right.$$

□

VÍ DỤ 5. Giải các bất phương trình sau:

① $A_n^3 + 15 < 15n$; **ĐS:** $n = 3$ hoặc $n = 4$ ② $A_n^3 + 5A_n^2 < 21n$; **ĐS:** $n = 3$

③ $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0$. **ĐS:** $x = 2$

Lời giải

① Điều kiện: $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^3 + 15 < 15n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 15 < 15n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 15 < 15n$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 13n + 15 < 0 \Leftrightarrow (n-5)(n+3)(n-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -3 \\ 1 < n < 5. \end{array}\right.$$

Giao với điều kiện ta được $3 \le n < 5, n \in \mathbb{N}$ hay $n = 3$ hoặc $n = 4$.

② Điều kiện: $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^3 + 5A_n^2 < 21n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 5\cdot\frac{n!}{(n-2)!} < 21n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 5n(n-1) < 21n$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 24n < 0 \Leftrightarrow n(n-4)(n+6) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -6 \\ 0 < n < 4. \end{array}\right.$$

Giao với điều kiện ta được $3 \le n < 4, n \in \mathbb{N}$ hay $n = 3$.

③ Điều kiện: $x \ge 2, x \in \mathbb{N}$.

$$2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3\cdot\frac{x!}{(x-2)!} - 20 < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) - 20 < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}.$$

Giao với điều kiện ta được $2 \le x < \frac{5}{2}, x \in \mathbb{N}$ hay $x = 2$.

□

VÍ DỤ 6. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 5; y = 2$ ② $\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$; **ĐS:** $x = 8; y = 3$

③ $\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}$. **ĐS:** $x = 7; y = 4$

Lời giải

① Điều kiện: $x \geq y \geq 0$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 2\mathrm{A}_x^y + 5\mathrm{C}_x^y = 90 \\ 5\mathrm{A}_x^y - 2\mathrm{C}_x^y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}_x^y = 20 \\ \mathrm{C}_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{20}{y!} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 20 \\ y! = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{(nhận)} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{(loại)}.$$

② Điều kiện: $x \geq y+1$, $y \geq 0$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\mathrm{C}_{x+1}^y}{6} = \frac{\mathrm{C}_x^{y+1}}{5} = \frac{\mathrm{C}_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \dfrac{x!}{5(y+1)!(x-y-1)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \dfrac{x!}{2(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{6(x-y+1)(x-y)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \\ \dfrac{x+1}{3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3y-1+1}{6(3y-1-y+1)(3y-1-y)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \\ x = 3y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-1 \\ \dfrac{1}{2 \cdot 2(2y-1)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-1 \\ 8y-4 = 5y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{(nhận)}.$$

③ Điều kiện: $x \geq y$, $y \geq 2$, $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 5\mathrm{C}_x^{y-2} = 3\mathrm{C}_x^{y-1} \\ \mathrm{C}_x^y = \mathrm{C}_x^{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot \dfrac{x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = 3 \cdot \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-y+2} = \dfrac{3}{y-1} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8y = -11 \\ x-2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \text{(nhận)}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Thu gọn biểu thức $D = \dfrac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \dfrac{2009}{2011}$. **ĐS:** $D = 2010$

Lời giải.

$$D = \frac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \frac{2009}{2011} = \frac{2011 \cdot 2010 \cdot 2009!}{2009!(20010-1)} \cdot \frac{2009}{2011} = 2010.$$

□

BÀI 2. Giải phương trình $\dfrac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\dfrac{1}{6}$. **ĐS:** $x=3$ hoặc $x=2$

Lời giải.
Điều kiện: $x\geq 1$, $x\in\mathbb{N}$.
Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x-1)!(x-1)}{(x+1)!}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6x-6=x^2+x\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.\text{(nhận).}$$

□

BÀI 3. Giải phương trình $\dfrac{1}{C_4^x}-\dfrac{1}{C_5^x}=\dfrac{1}{C_6^x}$. **ĐS:** $x=2$

Lời giải.
Điều kiện: $0\leq x\leq 4$ và $x\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x!(4-x)!}{4!}-\frac{x!(5-x)!}{5!}=\frac{x!(6-x)!}{6!}\Leftrightarrow\frac{x!(4-x)!}{4!}\left[1-\frac{5-x}{5}-\frac{(6-x)(5-x)}{6.5}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow 30-6(5-x)-(6-x)(5-x)=0\Leftrightarrow -x^2+17x-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\text{ (nhận)}\\x=15\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

□

BÀI 4. Giải các phương trình sau:

① $A_n^3=20n$; **ĐS:** $n=6$ ② $4C_x^8=5C_{x-1}^7$; **ĐS:** $x=10$

③ $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$; **ĐS:** $n=3$ ④ $2C_{x-1}^2-C_x^1=79$; **ĐS:** $x=11$

⑤ $2A_x^2+50=A_{2x}^2$. **ĐS:** $x=5$

Lời giải.

① Điều kiện: $n\geq 3$ và $n\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!}=20n\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=20n$$
$$\Leftrightarrow n(n^2-3n+2-20)=0\Leftrightarrow n(n^2-3n-18)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=0\text{ (loại)}\\n=6\text{ (nhận)}\\n=-3\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

② Điều kiện: $x\geq 8$ và $x\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4\cdot\frac{x!}{8!(x-8)!}=5\cdot\frac{(x-1)!}{7!(x-8)!}\Leftrightarrow 4\cdot\frac{x}{8}=5\Leftrightarrow x=10\text{ (nhận).}$$

③ Điều kiện: $n\geq 3$ và $n\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!}+5\cdot\frac{n!}{(n-2)!}=2(n+15)\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)+5n(n-1)=2n+30$$
$$\Leftrightarrow n^3+2n^2-5n-30=0\Leftrightarrow(n-3)(n^2+5n+10)=0\Leftrightarrow n=3\text{ (nhận).}$$

④ Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} - x = 79 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) - x = 79 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 77 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \text{ (nhận)} \\ x = -7 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

⑤ Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{(2x)!}{(2x-2)!} \Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)} \end{array}\right..$$

□

BÀI 5. Giải các bất phương trình sau:

① $A_n^3 < A_n^2 + 12$; **ĐS:** $n = 3$ ② $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$; **ĐS:** $x = 2$

③ $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$. **ĐS:** $x = 3$ hoặc $x = 4$

Lời giải.

① Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!} < \frac{n!}{(n-2)!} + 12 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) < n(n-1) + 12$$
$$\Leftrightarrow n^3 - 4n^2 + 3n - 12 < 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2+3) < 0 \Leftrightarrow n < 4.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $3 \leq n < 4$, hay $n = 3$.

② Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} < 30 \Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) < 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $2 \leq x < 3$, hay $x = 2$.

③ Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 1$$
$$\Leftrightarrow x(2x-1) - x^2 + x \leq x^2 - 3x + 2 + 10 \Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $3 \leq x \leq 4$, hay $x = 3$ hoặc $x = 4$.

□

BÀI 6. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 180 \\ A_x^y - C_x^y = 36 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 9; y = 2$ ② $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$; **ĐS:** $m = 3; n = 6$

③ $\begin{cases} 7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2} \\ 4C_{5x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3} \end{cases}$. **ĐS:** $x = 2; y = 6$

Lời giải.

① Điều kiện: $y \le x$ và $x, y \in \mathbb{N},\ x \ge 1$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} A_x^y = 72 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_x^y \cdot y! = 72 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y! = 2 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ C_x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 9 \end{cases} \text{(nhận).}$$

② Điều kiện: $n \ge m \ge 1$ và $n, m \in \mathbb{N}$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} = 1 \\ C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(n+1)!}{(m+1)(n-m)!} \cdot \dfrac{m!(n-m+1)!}{(n+1)!} = 1 \\ \dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \cdot \dfrac{(m-1)!(n+2-m)!}{(n+1)!} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n-m+1}{m+1} = 1 \\ \dfrac{n+2-m}{m} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - m + 1 = m + 1 \\ 3n + 6 - 3m = 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 2m = 0 \\ 3n - 8m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases} \text{(nhận).}$$

③ Điều kiện: $5x \ge y - 2, y \ge 3$ và $x, y \in \mathbb{N},\ x \ge 1$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 7 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!} = \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!} \\ 4 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!(y-2)!} = 7 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!(y-3)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{(5x-y+3)} = 1 \\ \dfrac{4}{(y-2)} = \dfrac{7}{(5x-y+3)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y + 3 = 7 \\ 4(5x - y + 3) = 7(y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 20x - 11y = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \text{(nhận).}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Thu gọn các biểu thức sau:

① $D = \dfrac{5!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$; **ĐS:** $D = 20$ ② $D = \dfrac{7!}{(m^2+m)} \cdot \dfrac{(m+2)!}{4!(m-1)!}$; **ĐS:** $D = 210(m+2)$

③ $D = \dfrac{6!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{4!(m-1)!}$; **ĐS:** $D = 30$ ④ $D = \dfrac{(n+1)C_n^2}{n\,(n^2-1)}$. **ĐS:** $D = \dfrac{1}{2}$

BÀI 8. Giải các phương trình sau:

① $\dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-1)!} = 3$; **ĐS:** $n = 3$ ② $n^3 + \dfrac{n!}{(n-2)!} = 10$. **ĐS:** $n = 2$

BÀI 9. Giải các phương trình sau:

① $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$; **ĐS:** $x = 14 \vee x = 8$ ② $C_{14}^{k} + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$; **ĐS:** $k = 4$

③ $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$; **ĐS:** $n = 5$ ④ $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; **ĐS:** $x = 5$

⑤ $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$; **ĐS:** $x = 10$ ⑥ $2C_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$; **ĐS:** $x = 11$

⑦ $\dfrac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210$; **ĐS:** $n = 5$ ⑧ $\dfrac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \dfrac{225}{11}$; **ĐS:** $n = 7$

⑨ $x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1 = 0$; **ĐS:** $x \in \varnothing$ ⑩ $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; **ĐS:** $x = 5$

⑪ $6C_x^2 + 6C_x^3 = 7x^2 - 7x$; **ĐS:** $x = 6$ ⑫ $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$; **ĐS:** $x = 7$

⑬ $2\left(A_n^3 + 3A_n^2\right) = P_{n+1}$; **ĐS:** $x = 4$ ⑭ $2P_n + 6A_n^2 - P_n \cdot A_n^2 = 12$. **ĐS:** $x = 3$ hoặc $x = 2$

BÀI 10. Giải các phương trình sau:

① $\dfrac{1}{C_x^1} - \dfrac{1}{C_{x+1}^2} = \dfrac{7}{6C_{x+4}^1}$; **ĐS:** $x = 8$ hoặc $x = 3$ ② $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0$; **ĐS:** $x = 11$ hoặc $x = 3$

③ $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \dfrac{7}{2}x$; **ĐS:** $x = 4$ ④ $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \cdots C_x^{x-10} = 1023$. **ĐS:** $x = 20$

BÀI 11. Giải các bất phương trình sau:

① $4 \leq n! + (n+1)! < 50$; **ĐS:** $n = 2$ hoặc $n = 3$ ② $72A_x^1 - A_{x+1}^3 \leq 72$; **ĐS:** $n \in [-2; 1] \cup [8; +\infty]$

③ $n^3 + \dfrac{n!}{(n-2)!} \leq 10$; **ĐS:** $x = 2$ ④ $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$; **ĐS:** $n \in (2; 6)$

⑤ $\dfrac{A_{x+4}^4}{(x+1)!} \leq \dfrac{42}{P_x}$; **ĐS:** $x = 0$ ⑥ $\dfrac{P_{n+5}}{(n-k)!} \leq 60A_{n+3}^{k+2}$; **ĐS:** $\forall n \in \mathbb{N}$

⑦ $\dfrac{12}{x}C_x^3 - 3A_x^2 \geq \dfrac{1}{2}A_{2x}^2 - 81$; **ĐS:** $x \in [3; 5]$ ⑧ $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \dfrac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0$; **ĐS:** $x \in [5; 11]$

⑨ $\dfrac{A_{n+1}^{n-2}}{C_{n-1}^2} \geq 2P_n$; **ĐS:** $n \in \varnothing$ ⑩ $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \dfrac{143}{4P_{n-1}} < 0$. **ĐS:** $n \in [2; +\infty)$

BÀI 12. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 147 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 5; y = 9$ ② $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$; **ĐS:** $x = 8; y = 3$

③ $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \dfrac{1}{24} \end{cases}$; **ĐS:** $x = 4; y = 8$ ④ $\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^m \\ \dfrac{C_{n+1}^m}{C_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$; **ĐS:** $m = 3; n = 6$

⑤ $\begin{cases} \dfrac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126 \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 4; y = 7$ ⑥ $\begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \dfrac{5}{4} A_{n-2}^2 \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \dfrac{7}{15} A_{n+1}^3 \end{cases}$; **ĐS:** $n = 1$

⑦ $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 17; y = 8$ ⑧ $\begin{cases} \left(C_x^{x-1}\right)^2 + 2\left(C_y^{y-1}\right)^2 = 3A_x^{x-1} \cdot C_y^{y-1} \\ 2\left(C_x^{x-1}\right)^3 = A_y^{y-1} + 1 \end{cases}$.

ĐS: $x = 1; y = 1$

DẠNG 2.2. Các bài toán sử dụng hoán vị

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho:

① Bạn C ngồi chính giữa? **ĐS:** 24

② Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế? **ĐS:** 12

Lời giải

① Xếp bạn C ngồi chính giữa: có 1 cách.
Xếp 4 bạn còn lại vào 4 vị trí còn lại: có 4! cách.
Vậy có $1 \times 4! = 24$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Xếp hai bạn A và E ở hai đầu ghế: có 2! cách.
Xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí còn lại: có 3! cách.
Vậy có $2! \times 3! = 12$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh đứng thành một hàng để chụp ảnh lưu niệm, biết rằng trong đó phải có 5 em định trước đứng kề nhau? **ĐS:** 4838400

Lời giải

Chưa kể thứ tự giữa 5 em trong nhóm "định trước", để xếp 5 em này đứng kề nhau ta có 8! cách xếp;
Lại có 5! cách xếp 5 em này.
Vậy có tất cả $5! \times 8! = 4838400$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

VÍ DỤ 3. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

① Một cách tùy ý. **ĐS:** 479001600

② Theo từng môn? **ĐS:** 103680

③ Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa? **ĐS:** 34560

Lời giải

① Trên kệ có tất cả $5+4+3=12$ quyển sách.
Mỗi cách xếp thứ tự 12 quyển sách chính là một hoán vị của 12 phần tử.
Do đó có tất cả $12! = 479001600$ cách xếp.

② Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có 3! cách xếp 3 khối này.
Có 5! cách xếp sách toán, có 4! cách xếp sách Lí và có 3! cách xếp sách Văn.
Vậy có tất cả $3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103680$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

③ Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có 2! cách xếp hai môn còn lại ở hai bên sách Toán;
Ứng với mỗi cách, có 5! cách xếp sách Toán; có 4! cách xếp sách Lí và có 3! cách xếp sách Văn.
Do đó có $2! \times 5! \times 4! \times 3! = 34560$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 4. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho:

① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau? **ĐS:** 86400

② Mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình? **ĐS:** 7680

Lời giải

① Cố định một người, có 5! cách xếp 5 người cùng giới còn lại vào 5 vị trí còn lại;
Có 6! cách xếp 6 người khác giới còn lại vào các vị trí xen kẽ.
Vậy có tất cả $5! \times 6! = 86400$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Ta tiến hành theo hai công đoạn:
Công đoạn 1: Xếp 6 người chồng xung quanh một bàn tròn: có 5! cách.
Công đoạn 2: Xếp vợ ngồi gần chồng và hai vợ chồng có thể đổi vị trí cho nhau: có 2^6 cách.
Vậy có tất cả $5! \times 2^6 = 7680$ cách.

□

VÍ DỤ 5. Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 9? **ĐS:** 18

Lời giải

Các bộ ba số khác nhau trong E có tổng bằng 9 là

— Trường hợp 1: $1+2+6=9$.

— Trường hợp 2: $1+3+5=9$.

— Trường hợp 3: $2+3+4=9$.

Mỗi bộ số đó lập được $3!$ số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau.
Vậy có $3\times 3!=18$ số. □

VÍ DỤ 6. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 480

Lời giải

Có $6!=720$ số có sáu chữ số khác nhau được lập từ các chữ số đã cho.
Ta xác định các số có 6 chữ số mà 1 và 6 đứng cạnh nhau.

— Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.

— Có $2!$ cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.

— Có $4!$ cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có $5\times 4!\times 2!=240$ các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.
Vậy số các số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau là $720-240=480$. □

VÍ DỤ 7. Cho các số $0,1,2,3,4,5$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần? **ĐS:** 5880

Lời giải

Xét dãy số $0,1,2,3,4,5,5,5$.
Nếu coi như dãy gồm các chữ số khác nhau thì ta lập được $7\times 7!=35280$ số.
Ba chữ số 5 có số lần các số lặp lại là $3!$.
Vậy có $\dfrac{35280}{3!}=5880$ số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào 2 dãy ghế trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

① Nam và nữ được xếp tùy ý? **ĐS:** $10!$

② Nam một dãy ghế, nữ một dãy ghế? **ĐS:** 28800

Lời giải.

① Có cả thảy 10 người gồm nam và nữ.
Do đó có $10!$ cách xếp tùy ý 10 người này vào 10 ghế.

② Chưa kể thứ tự giữa các nam và thứ tự giữa các nữ, có 2! cách xếp nam vào một dãy và nữ vào một dãy.
Có 5! cách xếp nam, 5! cách xếp nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 2. Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau? **ĐS:** 28800

② Những học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 28800

Lời giải.

① Có 2! cách lựa chọn nam hoặc nữ đứng ngoài cùng tính từ bên trái tính qua phải (hoặc từ phải qua trái);
Có 5! cách xếp 5 học sinh nam, có 5! cách xếp 5 học sinh nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách.

② Chưa kể thứ tự giữa các học sinh cùng giới thì có 2! cách xếp;
Ứng với mỗi cách xếp trên, có 5! cách xếp nam và 5! cách xếp nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 3. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được lấy từ tập A sao cho tổng các chữ số này bằng 14? **ĐS:** 72

Lời giải.
Các bộ bốn số khác nhau trong A có tổng bằng 14 là

— Trường hợp 1: $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

— Trường hợp 2: $1 + 3 + 4 + 6 = 14$.

— Trường hợp 3: $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Mỗi bộ số đó lập được 4! số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau.
Vậy có $3 \times 4! = 72$ số. □

BÀI 4. Cho hai tập $A\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số phân biệt sao cho:

① Hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau được lập từ tập A? **ĐS:** 240

② Chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 được lập từ tập B? **ĐS:** 192

Lời giải.

① Mỗi số có 6 chữ số khác nhau được lập từ A là một cách sắp xếp 6 chữ số của A vào 6 vị trí.

— Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.

— Có 2! cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.

— Có 4! cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có $5 \times 4! \times 2! = 240$ các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

② Coi hai chữ số 2, 3 đứng cạnh nhau như một chữ số là x.

— Từ 5 chữ số $0, 1, x, 4, 5$ lập được $4 \times 4! = 96$ số.

— Có 2 cách đổi vị trí hai chữ số $2, 3$.

Vậy có $2 \times 4 \times 4! = 192$ số.

□

BÀI 5. Từ tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số $1, 2, 3$ và chúng đứng cạnh nhau? **ĐS:** 66

Lời giải.

Xét các trường hợp sau:

① Trường hợp chữ số 0 đứng cuối.

— Có 2 cách chọn vị trí cho bộ ba chữ số $1, 2, 3$.

— Có $3!$ cách xếp vị trí cho ba chữ số $1, 2, 3$.

— Có 3 cách chọn thêm một số trong ba số $4, 5, 6$ và xếp vào vị trí còn lại.

Suy ra có $2 \times 3! \times = 36$ số.

② Trường hợp chữ số 5 đứng cuối. Coi 3 chữ số $1, 2, 3$ đứng cạnh nhau là một chữ số x. Khi đó số cần lập là số có 3 chữ số dạng $\overline{ab5}$ trong đó có chữ số x.

— Nếu $a = x$ thì có 3 cách chọn $b \in \{0, 4, 6\}$.

— Nếu $b = x$ thì có 2 cách chọn $a \in \{4, 6\}$.

Suy ra có 5 chữ số sao cho luôn có mặt chữ số x và chữ số 5 đứng cuối.
Có $3!$ cách xếp vị trí cho ba chữ số $1, 2, 3$.
Do đó có $5 \times 3! = 30$ số.

Vậy có $36 + 30 = 66$ số thỏa mãn. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:

① Các học sinh được xếp bất kì? **ĐS:** $15!$

② Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau? **ĐS:** 12441600

BÀI 7. Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

① 6 học sinh này ngồi bất kì? **ĐS:** 720

② A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế? **ĐS:** 48

③ A và F luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 240

④ A, B, C luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 144

⑤ A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 144

BÀI 8. Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước gồm: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau? **ĐS:** $4! \times 5! \times 5! \times 4! \times 6! \times 4!$

BÀI 9. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:

① Bắt đầu bằng chữ số 5? **ĐS:** $4!$

② Không bắt đầu bằng chữ số 1? **ĐS:** $5! - 4!$

③ Bắt đầu bằng 23? **ĐS:** $3!$

④ Không bắt đầu bằng 234? **ĐS:** $5! - 2!$

BÀI 10. Cho tập $X = \{1;2;3;4;7\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ X? **ĐS:** 24

BÀI 11. Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 18. **ĐS:** $3! \times 6$

DẠNG 2.3. Các bài toán sử dụng chỉnh hợp

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính chỉnh hợp $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{k!}{(n-k)!}$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D. Từ các điểm trên ta lập các véc-tơ khác $\vec{0}$. Hỏi có thể có được bao nhiêu véc-tơ? **ĐS:** A_4^2

Lời giải

Chọn một cách có thứ tự 2 trong 4 điểm A, B, C, D ta được một véc-tơ.
Do đó số cách chọn véc-tơ từ các điểm trên là A_4^2 cách. □

VÍ DỤ 2. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang, sao cho hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau? **ĐS:** $7! \cdot \mathrm{A}_6^3$

Lời giải

Giả sử các em nam ở vị trí | như hình sau:

$$|*|*|*|*|*|*|$$

Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 3 trong 6 vị trí $*$ để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là A_6^3.
Số cách sắp xếp 7 em nam là $7!$.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $7! \cdot \mathrm{A}_6^3$. □

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

① Ghế xếp thành hàng ngang? **ĐS:** $6! \cdot \mathrm{A}_5^4$

② Ghế xếp quanh một bàn tròn? **ĐS:** $5! \cdot \mathrm{A}_6^4$

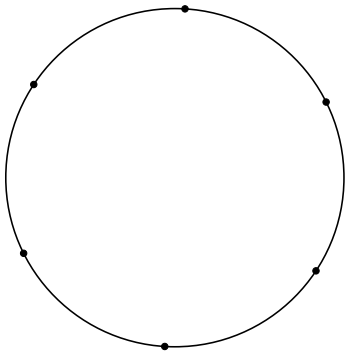
Lời giải

① Giả sử các em nam ở vị trí | như hình sau:

$$|*|*|*|*|*|$$

Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 4 trong 5 vị trí $*$ để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là A_5^4.
Số cách sắp xếp 6 em nam là 6!.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $6! \cdot A_5^4$.

②



Sắp xếp em nữ vào 4 trong 6 vị trí khoảng giữa hai dấu chấm để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là A_6^4.
Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).
Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 5 vì còn lại 5 ghế.
Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 4.
Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 3.
Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 2.
Số cách xếp em nam thứ sáu vào bàn là 1.
Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là 5!.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $5! \cdot A_6^4$.

□

VÍ DỤ 4. Cho tập $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ X mà chia hết cho 5? **ĐS:** 1560

Lời giải

Xét số tự nhiên gồm năm chữ số $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, $a_1 \neq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:** $a_5 = 0$.
Số cách chọn a_1 là 7 cách.
Số cách chọn bộ số còn lại là A_6^3 cách.
Do đó số cách chọn trong trường hợp này là $1 \cdot 7 \cdot A_6^3 = 840$ cách.

— **Trường hợp 2:** $a_5 = 5$.
Số cách chọn a_1 là 6 cách.
Số cách chọn bộ số còn lại là A_6^3 cách.
Do đó số cách chọn trong trường hợp này là $1 \cdot 6 \cdot A_6^3 = 720$ cách.

Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài toán là $840 + 720 = 1560$ cách. □

VÍ DỤ 5. Cho tập $X = \{0;1;\ldots;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ X và bé hơn 475? **ĐS:** 268

Lời giải

Xét số tự nhiên gồm ba chữ số $x = \overline{a_1a_2a_3}$, $a_1 \neq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:** $a_1 < 4 \Rightarrow a_1 \in \{1;2;3\}$.
Số cách chọn 2 chữ số còn lại là A_9^2.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $3 \cdot A_9^2 = 216$ cách.

— **Trường hợp 2:** $a_1 = 4$, $a_2 = 7$.
Khi đó $a_3 \in \{0;1;2;3\}$.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$ cách.

— **Trường hợp 3:** $a_1 = 4$, $a_2 \in \{0;1;2;3;5;6\}$.
Số cách chọn a_3 là 8 cách.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$ cách.

Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài toán là $216 + 4 + 48 = 268$ cách. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Từ 20 học sinh cần chọn ra một ban đại diện lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thư kí. Hỏi có mấy cách chọn? **ĐS:** A_{20}^3

Lời giải.
Chọn một cách có thứ tự 3 học sinh trong 20 học sinh ta chọn ra được một ban đại diện lớp.
Do đó số cách chọn một ban đại diện lớp là A_{20}^3 cách. □

BÀI 2. Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

① Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau. **ĐS:** $6! \cdot A_7^6$

② Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. **ĐS:** $10! \cdot A_6^2$

③ Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái. **ĐS:** $2 \cdot 10! \cdot A_6^2$

④ Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái. **ĐS:** $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10!$

⑤ A, B, C luôn đứng cạnh nhau. **ĐS:** $10! \cdot 3!$

⑥ A, B đứng cách nhau đúng một người. **ĐS:** $10 \cdot 10! \cdot 2!$

Lời giải.

① Đặt tùy ý các bạn nam có 6! cách.
Giữa các bạn nam này lại có A_7^6 cách chọn các bạn nữ.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là $6! \cdot A_7^6$ cách.

② Chọn có thứ tự 2 bạn nam ở đầu hàng và cuối hàng có A_6^2 cách.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là 10! cách.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10! \cdot A_6^2$ cách.

③ **Trường hợp 1:** Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
Theo câu trên ta có $10! \cdot A_6^2$ cách xếp cho trường hợp này.
Trường hợp 2: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nữ.
Chọn có thứ tự 2 bạn nữ ở đầu hàng và cuối hàng có A_6^2 cách.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là 10! cách.
Do đó có $10! \cdot A_6^2$ cách xếp cho trường hợp này.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $2 \cdot 10! \cdot A_6^2$.

④ **Trường hợp 1:** Đầu hàng là nam, cuối hàng là nữ thì có 6 cách chọn vị trí đầu hàng và 6 cách chọn vị trí cuối hàng.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là 10! cách.
Do đó có $6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách xếp cho trường hợp này.
Tương tự cho trường hợp đầu hàng là nữ, cuối hàng là nam ta có $6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách xếp.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách.

⑤ Coi A, B, C là một nhóm người.
Khi đó cách sắp xếp 9 người và nhóm người trên là 10! cách.
Hoán vị A, B, C ta có 3! cách.
Do đó số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10! \cdot 3!$ cách.

⑥ Coi A, B và người ở giữa là một nhóm.
Khi đó số cách chọn người ở giữa A và B là 10 cách.
Số cách xếp 9 người còn lại và nhóm trên là 10! cách.
Hoán vị A và B ta có 2! cách.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10 \cdot 10! \cdot 2!$ cách.

□

BÀI 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau? **ĐS:** $4! \cdot A_5^3$

Lời giải.
Khoảng giữa 5 bạn nam có 5 vị trí. Sắp xếp các em nữ vào vị trí này để thỏa yêu cầu bài. Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là A_5^3 cách.
Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).
Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 4 (vì còn lại 4 ghế).
Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 3.
Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 2.
Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 1.
Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là 4! cách.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là $4! \cdot A_5^3$ cách. □

BÀI 4. Cho tập $X = \{0; 1; \ldots; 9\}$. Cho bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số được lập từ X sao cho:

① Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một? **ĐS:** $9 \cdot A_9^4$

② Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và số đó là số lẻ? **ĐS:** $5 \cdot 8 \cdot A_8^3$

③ Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và phải có đủ 3 chữ số 1; 2; 3? **ĐS:** $A_5^3 \cdot A_7^2 - 6 \cdot A_4^3$

Lời giải.
Xét số cần tìm là $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$, $a_1 \neq 0$.

① Số cách chọn a_1 là 9 cách (vì $a_1 \neq 0$).
Số cách chọn bộ số còn lại là A_9^4 cách.
Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài là $9 \cdot \mathrm{A}_9^4$ cách.

② Số cách chọn a_5 là 5 cách. (vì $a_5 \in \{1;3;5;7;9\}$.
Số cách chọn a_1 là 8 cách (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_5$)).
Số cách chọn cho bộ số còn lại là A_8^3 cách.
Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài là $5 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^3$ cách.

③ Chọn 3 trong 5 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 (kể cả khi $a_1 = 0$) có A_5^3 cách chọn.
Chọn 2 chữ số còn lại có A_7^2 cách chọn.
Trường hợp $a_1 = 0$: chọn 3 trong 4 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 có A_4^3 cách.
Số cách chọn số còn lại có 6 cách chọn.
Vậy số cách chọn x thỏa yêu cầu bài là $\mathrm{A}_5^3 \cdot \mathrm{A}_7^2 - 6 \cdot \mathrm{A}_4^3$ cách.

□

BÀI 5. Cho tập $X = \{0;1;2;3;5;7;8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5 và không lớn hơn 4000 được lập từ X? **ĐS:** 120

Lời giải.
Xét số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $a_1 \neq 0$.
Do x chia hết cho 5 nên $a_4 \in \{0;5\}$.
Do $x < 4000$ nên $a_1 \in \{1;2;3\}$.
a_2 có 5 cách chọn.
a_3 có 4 cách chọn.
Vậy số cách chọn x thỏa yêu cầu bài là $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Một khay tròn đựng bánh kẹo ngày Tết có 6 ngăn hình quạt với màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó? **ĐS:** 5!

BÀI 7. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh lớp 11? **ĐS:** $6! \cdot \mathrm{A}_5^3$

BÀI 8. Từ các số 1;3;5;6;7 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau và lớn hơn số 6000? **ĐS:** $2 \cdot \mathrm{A}_4^3 + \mathrm{A}_5^5$

BÀI 9. Cho tập $X = \{0;1;\ldots;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau đôi một được tạo từ X và lớn hơn 70000? **ĐS:** 4368

BÀI 10. Có thể lập được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau từng đôi một, đồng thời khác với 4 chữ số đầu và nhất thiết phải có mặt chữ số 6? **ĐS:** $6 \cdot \mathrm{A}_6^5$

BÀI 11. Từ sáu chữ số 0;1;3;5;7;9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5? **ĐS:** $4 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_4^2$

BÀI 12. Với sáu chữ số 0;1;2;3;4;5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau thỏa điều kiện:

① Số đó là số chẵn? **ĐS:** 312

② Số đó bắt đầu bởi 24? **ĐS:** 24

③ Số đó bắt đầu bởi 345? **ĐS:** 6

BÀI 13. Cho tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X trong các trường hợp sau:

① n là số chẵn? **ĐS:** 3000

② Một trong ba chữ số đầu tiên phải là số 1? **ĐS:** 2280

BÀI 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3? **ĐS:** 7440

BÀI 15. Cho tập $E = \{1;2;3;4;7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số:

① Đôi một khác nhau? **ĐS:** A_5^3

② Đôi một khác nhau và chia hết cho 3? **ĐS:** 24

BÀI 16. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau mà phải có chữ số 0 và chữ số 3? **ĐS:** $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_4^3 - 4 \cdot \mathrm{A}_4^3$

DẠNG 2.4. Các bài toán sử dụng tổ hợp

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính tổ hợp $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!}{k! \cdot (n-k)!}$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Ông X có 11 người bạn. Ông muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có có 2 người không muốn gặp nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu phương án mời 5 người bạn? **ĐS:** 378

Lời giải

— ***Cách 1:*** Giả sử hai người không muốn gặp nhau là A, B.
Nếu chọn ra 5 người trong đó không có cả A và B thì có C_9^5 cách.
Nếu chọn ra 5 người trong đó có một trong hai người A, B thì có $\mathrm{C}_9^4 \cdot 2$ cách.
Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2\mathrm{C}_9^4 + \mathrm{C}_9^5 = 378$ cách.

— ***Cách 2:*** Chọn 5 người bất kì có C_{11}^5 cách.
Chọn 5 người trong đó có cả A và B có C_9^3 cách.
Vậy có $\mathrm{C}_{11}^5 - \mathrm{C}_9^3 = 378$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 2. Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ. **ĐS:** $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$

Lời giải

Chọn 1 bạn nam làm tổ trưởng, có C_7^1 cách.
Chọn 1 nữ làm thủ quỹ, có C_6^1 cách.

Chọn 1 bạn trong 11 bạn còn lại làm tổ phó, có C_{11}^1 cách.
Chọn 1 bạn trong 10 bạn còn lại làm tổ viên, có C_{10}^1 cách.
Theo quy tắc nhân có $C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$ cách thỏa mãn. □

VÍ DỤ 3. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có:

① Số nam và số nữ bằng nhau? **ĐS:** $C_{14}^2 \cdot C_6^2$

② Ít nhất một nữ? **ĐS:** 3844

Lời giải

① Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nam, có C_{14}^2 cách.
Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nữ, có C_6^2 cách.
Khi đó, theo quy tắc nhân có $C_{14}^2 \cdot C_6^2$ cách thỏa mãn.

② Chọn 4 học sinh bất kì có C_{20}^4 cách.
Chọn 4 học sinh trong đó không có học sinh nữ có C_{14}^4 cách.
Vậy có $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$ cách lập đội thỏa yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 4. Một lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ?

ĐS: $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$

Lời giải

Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 1 có C_{50}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 2 có C_{40}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 3 có C_{30}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 4 có C_{20}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 5 có C_{10}^{10} cách.
Theo quy tắc nhân, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$. □

VÍ DỤ 5. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn:

① 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ. **ĐS:** 112

② 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ. **ĐS:** 150

Lời giải

① Số cách chọn một bông hồng đỏ là C_4^1.
Số cách chọn 6 bông hồng không phải màu đỏ là C_8^6.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $C_4^1 \cdot C_8^6 = 112$.

② Bó hoa 7 bông thỏa mãn yêu cầu bài toán có thể có các trường hợp:
- 3 bông vàng, 3 bông đỏ, 1 bông trắng: có $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1$ cách chọn.
- 3 bông vàng, 4 bông đỏ: có $C_5^3 \cdot C_4^4$ cách chọn.
- 4 bông vàng, 3 bông đỏ: có $C_5^4 \cdot C_4^3$ cách chọn.

Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 + C_5^3 \cdot C_4^4 + C_5^4 \cdot C_4^3 = 150$.

□

VÍ DỤ 6. Cho tập $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Từ tập X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong mỗi số đó có đúng hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ? **ĐS:** 2592

Lời giải

Trong tập X có 4 số chẵn, 4 số lẻ.
Giả sử số có 5 chữ số, đôi một khác nhau là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$.
Chọn 2 chữ số chẵn có C_4^2 cách.
Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí để xếp số chẵn có A_5^2 cách.
Chọn 3 chữ số lẻ và sắp vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách.
Suy ra có $C_4^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^3 = 2880$ cách chọn số có đúng 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.
Tương tự, ta chọn các số có dạng $\overline{0bcde}$ với $\overline{bcde}$ thỏa mãn có đúng 1 chữ số chẵn, 3 chữ số lẻ có $C_3^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^3 = 288$ số.
Vậy ta có $2880 - 288 = 2592$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

① Có đúng 2 nam trong 5 người đó? **ĐS:** 5400

② Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó? **ĐS:** 12900

Lời giải.

① Chọn 2 nam và 3 nữ có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 = 5400$ cách.

② Các trường hợp chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán:
- Chọn 2 nam và 3 nữ, có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ cách.
- Chọn 3 nam và 2 nữ, có $C_{10}^3 \cdot C_{10}^2$ cách.
- Chọn 4 nam và 1 nữ, có $C_{10}^4 \cdot C_{10}^1$ cách.

Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 = 12900$.

□

BÀI 2. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy? **ĐS:** 2520

Lời giải.
Chọn 2 học sinh cho tổ 1 có C_8^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 2 có C_6^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 3 có C_4^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 4 có C_2^2 cách.
Khi đó, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 2520$. □

BÀI 3. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu. **ĐS:** 645

Lời giải.
Chọn 4 bi bất kì trong 15 b, có $C_{15}^4 = 1365$ cách.
Các trường hợp chọn 4 bi có đủ ba màu:
∘ 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng: có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$ cách.
∘ 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng: có $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1$ cách.
∘ 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng: có $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2$ cách.
Vậy có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 720$ cách.
Khi đó, số cách chọn 4 bi không có đủ ba màu là $1365 - 720 = 645$ cách. □

BÀI 4. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi sao cho tổng các số trên 4 bi là số lẻ? **ĐS:** 160

Lời giải.
Trong 11 bi đã cho, có 6 bi được đánh số lẻ, 5 bi được đánh số chẵn.
Lấy ra 4 bi, để tổng các số trên 4 bi là lẻ thì các cách có thể chọn:
∘ 1 bi lẻ, 3 bi chẵn: có $C_6^1 C_5^3$ cách.
∘ 3 bi lẻ, 1 bi chẵn: có $C_6^3 C_5^1$ cách.
Khi đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^3 \cdot C_5^1 = 160$. □

BÀI 5. Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^2

② Có bao nhiêu véctơ được tạo thành? **ĐS:** A_{10}^2

③ Có bao nhiêu tam giác được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^3

④ Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^4

Lời giải.

① 2 điểm xác định được một đường thẳng nên số đường thẳng được tạo thành là C_{10}^2.

② 2 điểm (có kể thứ tự điểm đầu, điểm cuối) xác định một véc-tơ nên số véc-tơ được tạo thành là A_{10}^2.

③ 3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên số tam giác có thể tạo thành là C_{10}^3.

④ Bốn điểm không đồng phẳng xác định một tứ diện nên số tứ diện tạo thành là C_{10}^4.

□

BÀI 6. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra ba viên bị sao cho:

① Ba viên bi bất kì? **ĐS:** C_{100}^3

② Tổng ba số trên ba bi chia hết cho 2? **ĐS:** $C_{50}^3 + C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$

Lời giải.

① Chọn 3 viên bất kì trong 100 viên có C_{100}^3 cách.

② Trong 100 bi, có 50 bi đánh số chẵn, 50 bi đánh số lẻ.
Để chọn ra 3 bi có tổng các số trên đó chia hết cho 2 thì có thể chọn:
∘ 3 bi đều đánh số chẵn: có C_{50}^3 cách.
∘ 2 bi đánh số lẻ và 1 bi đánh số chẵn: có $C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$ cách.
Khi đó, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{50}^3 + C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$.

□

BÀI 7. Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho? **ĐS:** 325

Lời giải.
3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên ta có thể chọn:
∘ 1 điểm thuộc đường thẳng a và 2 điểm thuộc đường thẳng b: có $C_5^1 \cdot C_{10}^2$ cách.
∘ 2 điểm thuộc đường thẳng a và 1 điểm thuộc đường thẳng b: có $C_5^2 \cdot C_{10}^1$ cách.
Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_5^1 \cdot C_{10}^2 + C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 325$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 8. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

① Gồm 4 học sinh tuỳ ý? **ĐS:** C_{40}^4 ② Có 1 nam và 3 nữ? **ĐS:** $C_{25}^1 \cdot C_{15}^3$

③ Có 2 nam và 2 nữ? **ĐS:** $C_{25}^2 \cdot C_{15}^2$ ④ Có ít nhất 1 nam? **ĐS:** $C_{40}^4 - C_{15}^4$

⑤ Có ít nhất 1 nam và 1 nữ? **ĐS:** $C_{40}^4 - C_{25}^4 - C_{15}^4$

BÀI 9. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:

① Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ? **ĐS:** $C_{40}^5 - C_{25}^1 \cdot C_{15}^4 - C_{15}^5$

② Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ? **ĐS:** $C_{15}^2 \cdot C_{25}^3$

③ Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam? **ĐS:** $C_{40}^5 - C_{15}^5$

④ Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu? **ĐS:** $C_{38}^3 + C_{38}^5$

BÀI 10. Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội cảnh sát giao thông đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ? **ĐS:** $C_{12}^4 \cdot C_3^1 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 \cdot C_1^1$

BÀI 11. Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho:

① Có đúng 2 viên bi màu đỏ? **ĐS:** $C_5^2 \cdot C_{13}^4$

② Số bi xanh bằng số bi đỏ? **ĐS:** $C_9^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4 + C_9^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2 + C_9^3 \cdot C_5^3$

BÀI 12. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên? **ĐS:** $C_4^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_6^2$

BÀI 13. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

ĐS: $C_5^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{15}^3 + C_5^1 \cdot C_{10}^2 \cdot C_{15}^2 + C_5^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{15}^2$

BÀI 14. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** $C_{12}^4 - C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 - C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 - C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$

BÀI 15. Hội đồng quản trị của một công ty TNHH A gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ? **ĐS:** $A_{12}^2 \cdot C_{10}^2 - A_7^2 \cdot C_5^2$

BÀI 16. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

① Mỗi bảng ba đội? **ĐS:** $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$

② Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau? **ĐS:** $C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_1^1 \cdot C_2^2$

BÀI 17. Trong cuộc thi "Rung chuông vàng", đội X có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Hỏi có bao cách chia nhóm, sao cho:

① Thành viên trong nhóm là bất kì? **ĐS:** $C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5$

② Năm bạn nữ ở cùng một nhóm? **ĐS:** $4 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5$

BÀI 18. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8? **ĐS:** $C_6^2 \cdot C_{44}^1$

BÀI 19. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10? **ĐS:** $C_{15}^5 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^4$

BÀI 20. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4? **ĐS:** $C_{10}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1$

BÀI 21. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp đó thỏa:

① Ba tấm thẻ bất kì? **ĐS:** C_{40}^3

② Tổng ba số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3? **ĐS:** $C_{13}^3 + C_{14}^3 + C_{13}^3 + C_{13}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{13}^1$

BÀI 22. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2? **ĐS:** $C_{17}^2 \cdot C_{20}^1 + C_{17}^1 \cdot C_{20}^2$

BÀI 23. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n. **ĐS:** $n = 20$

BÀI 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 10 đường thẳng song song lần lượt cắt 8 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ các đường thẳng trên? **ĐS:** $C_{10}^2 \cdot C_8^2$

BÀI 25. Cho 2 đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n. **ĐS:** $n = 15$

BÀI 26. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên mỗi đường thẳng lấy 5 điểm cách đều nhau một khoảng bằng x. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu hình bình hành tạo thành từ 10 điểm trên? **ĐS:** 30

BÀI 27. Cho tập $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số có nghĩa, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần? **ĐS:** $C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot A_8^2 - 7 \cdot C_6^2 \cdot C_4^3$

BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

A NHỊ THỨC NEWTON

Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

VÍ DỤ 1. Khai triển các nhị thức sau

① $(x+1)^4$ ② $(x+2y)^5$

③ $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6$ ④ $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^6$

Lời giải

① $(x+1)^4 = C_4^0 \cdot x^4 + C_4^1 \cdot x^3 \cdot 1 + C_4^2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + C_4^3 \cdot x \cdot 1^3 + C_4^4 \cdot 1^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

② $(x+2y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (2y) + C_5^2 x^3 (2y)^2 + C_5^3 x^2 (2y)^3 + C_5^4 x (2y)^4 + C_5^5 (2y)^5$
$= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5.$

③ $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \left(\dfrac{1}{x}\right) + C_6^2 x^4 \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 x^3 \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 x^2 \left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + C_6^5 x \left(\dfrac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\dfrac{1}{x}\right)^6$
$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}.$

④ $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 (2x)^6 + C_6^1 (2x)^5 \left(-\dfrac{1}{x}\right) + C_6^2 (2x)^4 \left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 (2x)^3 \left(-\dfrac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 (2x)^2 \left(-\dfrac{1}{x}\right)^4$
$+ C_6^5 (2x) \left(-\dfrac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(-\dfrac{1}{x}\right)^6$
$= 64x^6 - 192x^4 + 240x^2 - 160 + \dfrac{60}{x^2} - \dfrac{12}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}.$

□

Nhận xét.

— *Trong khai triển* $(a \pm b)^n$ *có* $n+1$ *số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau. Tức là* $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

— *Số hạng tổng quát là* $T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ *và số hạng thứ* N *thì* $k = N-1$.

— *Trong khai triển* $(a-b)^n$ *thì dấu đan nhau, nghĩa là* $+$, *rồi* $-$, *rồi* $+$,...

— *Số mũ của* a *giảm dần, số mũ của* b *tăng dần nhưng tổng số mũ của* a *và* b *bằng* n.

— *Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho* a *và* b *những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như*

- $(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n \overset{a=1,\, b=1}{\Longrightarrow} \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.
- $(a-b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n - \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n b^n \overset{a=1,\, b=1}{\Longrightarrow} \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.

B TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của các khai triển $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \ldots, (a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$: 1 7 21 35 35 21 7 1

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL

$$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k.$$

VÍ DỤ 2. Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau

① $(a+b)^6$ ② $(a+b)^7$

Lời giải

① $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

② $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

□

C DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Bước 1. Viết công thức số hạng tổng quát.

Bước 2. Dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn số hạng tổng quát.

Bước 3. Dựa vào điều kiện cho trước để tìm số hạng thỏa mãn bài toán.

Chú ý

— *Với* $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $x \neq 0$ *thì* $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

— *Với* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $x > 0$ *thì* $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

— *Với các điều kiện xác định thì*

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

— *Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:* $x \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} x a_k$.

1 VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(2x-3y)^{17}$ chứa x^8y^9. **ĐS:** $-2^8 3^9 C_{17}^9$

② $\left(3x-x^2\right)^{12}$ chứa x^{15}. **ĐS:** $-3^9 C_{12}^3$

③ $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$ chứa x^{11}. **ĐS:** $-2^3 C_{10}^3$

④ $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$ chứa x^2. **ĐS:** C_7^4

Lời giải

① Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x-3y)^{17}$ là $C_{17}^k (2x)^{17-k}(-3y)^k = C_{17}^k 2^{17-k}(-3)^k x^{17-k} y^k$.
Để có số hạng chứa x^8y^9 thì $k = 9$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^8y^9 là $C_{17}^9 \cdot 2^8 \cdot (-3)^9 = -2^8 3^9 C_{17}^9$.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(3x-x^2\right)^{12}$ là

$$C_{12}^k (3x)^{12-k}\left(-x^2\right)^k = C_{12}^k 3^{12-k}(-1)^k x^{12-k}\left(x^2\right)^k = C_{12}^k 3^{12-k}(-1)^k x^{12+k}.$$

Để có số hạng chứa x^{15} thì $12+k = 15 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{15} là $-3^9 C_{12}^3$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$ là

$$C_{10}^k \left(x^2\right)^{10-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k (-2)^k x^{20-2k} x^{-k} = (-2)^k C_{10}^k x^{20-3k}.$$

Để có số hạng chứa x^{11} thì $20-3k=11 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{11} là $-2^3\mathrm{C}_{10}^3$.

④ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$ là

$$\mathrm{C}_7^k\left(\sqrt[3]{x^{-2}}\right)^{7-k}x^k=\mathrm{C}_7^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{7-k}x^k=\mathrm{C}_7^k x^{\frac{-14+5k}{3}}.$$

Để có số hạng chứa x^2 thì $\dfrac{-14+5k}{3}=2 \Leftrightarrow -14+5k=6 \Leftrightarrow k=4$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là C_7^4.

□

VÍ DỤ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(1+x+3x^2\right)^{10}$. **ĐS:** 1695

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+x+3x^2\right)^{10} &= \left[1+\left(x+3x^2\right)\right]^{10}\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\mathrm{C}_{10}^k 1^{10-k}\left(x+3x^2\right)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\mathrm{C}_{10}^k\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j x^{k-j}\left(3x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\sum_{j=0}^{k}3^j\mathrm{C}_{10}^k\mathrm{C}_k^j x^{k+j}\right).\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^4 thì

$$\begin{cases}k+j=4\\ 0\le j\le k\le 10\end{cases}\Leftrightarrow (j;k)\in\{(0;4),(1;3),(2;2)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^4 là $3^0\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_4^0x^4+3^1\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_3^1x^4+3^2\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_2^2x^4=1695x^4$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là 1695. □

VÍ DỤ 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5$. **ĐS:** 101

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2+x^3\right)^5 &= \left[(1+x)\left(1+x^2\right)\right]^5=(1+x)^5\left(1+x^2\right)^5\\ &= \left(\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k 1^{5-k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^j 1^{5-j}\left(x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\mathrm{C}_5^k x^k\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^j x^{2j}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^k\mathrm{C}_5^j x^{k+2j}\right)\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^{10} thì

$$\begin{cases} k+2j=10 \\ 0\le k\le 5 \\ 0\le j\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow (j;k)\in\{(3;4),(4;2),(5;0)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^{10} là $C_5^4C_5^3x^{10}+C_5^2C_5^4x^{10}+C_5^0C_5^5x^{10}=101x^{10}$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là 101. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(x+y)^{25}$ chứa $x^{12}y^{13}$ **ĐS:** C_{25}^{13}

② $(x-3)^9$ chứa x^4 **ĐS:** $-3^5C_9^5$

③ $(1-3x)^{11}$ chứa x^6 **ĐS:** $3^6C_{11}^6$

④ $\left(x^2-2x\right)^{10}$ chứa x^{16} **ĐS:** $2^8C_{10}^8$

⑤ $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}, \forall x\neq 0$ chứa x^{31} **ĐS:** C_{40}^3

⑥ $\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5, \forall x\neq 0$ chứa x^2 **ĐS:** -230

Lời giải.

① Số hạng tổng quát trong khai triển $(x+y)^{25}$ là $C_{25}^kx^{25-k}y^k$.
Để có số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ thì $k=13$.
Vậy hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ là C_{25}^{13}.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $(x-3)^9$ là $C_9^kx^{9-k}(-3)^k=C_9^k(-3)^kx^{9-k}$.
Để có số hạng chứa x^4 thì $9-k=4\Leftrightarrow k=5$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là $-3^5C_9^5$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $(1-3x)^{11}$ là $C_{11}^k1^{11-k}(-3x)^k=C_{11}^k(-3)^kx^k$.
Để có số hạng chứa x^6 thì $k=6$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^6 là $3^6C_{11}^6$.

④ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-2x\right)^{10}$ là

$$C_{10}^k\left(x^2\right)^{12-k}(-2x)^k=C_{10}^k(-2)^kx^{24-2k}x^k=C_{10}^k(-2)^kx^{24-k}.$$

Để có số hạng chứa x^{16} thì $24-k=16\Leftrightarrow k=8$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{16} là $2^8C_{10}^8$.

⑤ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là

$$C_{40}^kx^{40-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=C_{40}^kx^{40-k}x^{-2k}=C_{40}^kx^{40-3k}.$$

Để có số hạng chứa x^{31} thì $40-3k=31\Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{31} là C_{40}^3.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5 &= \left[2+\left(\sqrt{x}-3x^2\right)\right]^5\\ &= \sum_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k 2^{5-k}\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^2\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(2^{5-k}\mathrm{C}_5^k \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k-j}\left(-3x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^{5-k}(-3)^j \mathrm{C}_5^k \mathrm{C}_k^j x^{\frac{k+3j}{2}}\right)\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^2 thì

$$\begin{cases}\dfrac{k+3j}{2}=2\\ 0\le j\le k\le 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k+3j=4\\ 0\le j\le k\le 5\end{cases} \Leftrightarrow (j;k)\in\{(0;4),(1;1)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^2 là $2^1(-3)^0\mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_4^0x^2+2^4(-3)^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_1^1x^2=-230x^2$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là -230. □

BÀI 2. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức

① $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^9$ với $x\neq 0$ **ĐS:** $2^3 3^6 \mathrm{C}_9^6$

② $\left(xy^2-\dfrac{1}{xy}\right)^8$ với $xy\neq 0$ **ĐS:** $\mathrm{C}_8^4 y^4$

③ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ với $x>0$ **ĐS:** C_{17}^8

Lời giải.

① Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^9$ là

$$\mathrm{C}_9^k\left(2x^2\right)^{9-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k=\mathrm{C}_9^k 2^{9-k}(-3)^k x^{18-2k}x^{-k}=2^{9-k}(-3)^k\mathrm{C}_9^k x^{18-3k}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $18-3k=0\Leftrightarrow k=6$.
Vậy số hạng không chứa x là $2^3 3^6\mathrm{C}_9^6$.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(xy^2-\dfrac{1}{xy}\right)^8$ là

$$\mathrm{C}_8^k\left(xy^2\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{xy}\right)^k=\mathrm{C}_8^k(-1)^k x^{8-k}y^{16-2k}x^{-k}y^{-k}=(-1)^k\mathrm{C}_8^k x^{8-2k}y^{16-3k}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$.
Vậy số hạng không chứa x là $(-1)^4\mathrm{C}_8^4y^4=\mathrm{C}_8^4y^4$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ là

$$\mathrm{C}_{17}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^{k}=\mathrm{C}_{17}^{k}x^{-\frac{2}{3}\cdot(17-k)}x^{\frac{3}{4}\cdot k}=\mathrm{C}_{17}^{k}x^{\frac{-136+17k}{12}}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $\frac{-136+17k}{12}=0\Leftrightarrow -136+17k=0\Leftrightarrow k=8$.
Vậy số hạng không chứa x là C_{17}^{8}.

□

BÀI 3. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$. **ĐS:** $3310x^5$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10} &= x\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^j 1^{5-j}(-2x)^j+x^2\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^k 1^{10-k}(3x)^k\\ &= \sum_{j=0}^{5}(-2)^j\mathrm{C}_5^j x^{j+1}+\sum_{k=0}^{10}3^k\mathrm{C}_{10}^k x^{k+2}.\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^5 thì $\begin{cases}j+1=5\\k+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}j=4\\k=3.\end{cases}$
Vậy số hạng chứa x^5 là $(-2)^4\mathrm{C}_5^4x^5+3^3\mathrm{C}_{10}^3x^5=3310x^5$. □

BÀI 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$. **ĐS:** 896

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7 &= \sum_{k=4}^{7}(2x+1)^k\\ &= \sum_{k=4}^{7}\left(\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j 1^{k-j}(2x)^j\right)=\sum_{k=4}^{7}\left(\sum_{j=0}^{k}2^j\mathrm{C}_k^j x^j\right).\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^5 thì $\begin{cases}j=5\\0\le j\le k\le 7\end{cases}\Leftrightarrow (j;k)\in\{(5;5),(5;6),(5;7)\}$.
Do đó, số hạng chứa x^5 là $2^5\mathrm{C}_5^5x^5+2^5\mathrm{C}_6^5x^5+2^5\mathrm{C}_7^5x^5=896x^5$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là 896. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(2x+y)^{13}$ chứa x^6y^7 **ĐS:** $2^6\mathrm{C}_{13}^7$

② $\left(x^3-xy\right)^{15}$ chứa $x^{25}y^{10}$ **ĐS:** C_{15}^{10}

③ $\left(\sqrt{xy}+\frac{x}{y}\right)^{10}$ với $xy\ge 0$ và $y\ne 0$ chứa x^6y^2 **ĐS:** C_{10}^2

④ $\left(1+x+2x^2\right)^{10}$ chứa x^{17} **ĐS:** $2^7\mathrm{C}_{10}^{10}\mathrm{C}_{10}^7+2^8\mathrm{C}_{10}^9\mathrm{C}_9^8$

⑤ $(x^2+x-1)^5$ chứa x^3 **ĐS:** $C_5^1C_1^0+C_5^3C_3^3$

⑥ $(1+x^2-x^3)^8$ chứa x^8 **ĐS:** $C_8^4C_4^0+C_8^3C_3^2$

⑦ $\left(1-x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{12}, x\neq 0$ chứa x^8 **ĐS:** $-C_{12}^4C_4^1-C_{12}^8C_8^4-C_{12}^{12}C_{12}^7$

BÀI 6. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức

① $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{12}^6

② $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-C_5^3$

③ $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-2^5C_{10}^5$

④ $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{12}^6

⑤ $\left(\dfrac{1}{x^3}+x^2\right)^{10}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{10}^6

⑥ $\left(x+\dfrac{2}{x^3}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $2^3C_{12}^3$

⑦ $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^5$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-2^3C_5^3$

⑧ $\left(2\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, với $x>0$ **ĐS:** $2^83^{12}C_{20}^{12}$

⑨ $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$, với $x>0$ **ĐS:** C_{12}^8

⑩ $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$, với $x>0$ **ĐS:** C_{18}^{15}

⑪ $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$, với $x>0$ **ĐS:** C_7^4

DẠNG 3.2. Tìm hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$

— *Sử dụng số hạng tổng quát của khai triển là* $C_n^k a^{n-k}b^k$.

— *Từ giả thiết tìm ra được giá trị k.*

⚠ ***Nhị thức Niu-tơn***

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Hệ quả

— *Với* $a=b=1$, *ta có* $2^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n$.

— *Với* $a=1; b=-1$, *ta có* $0^n=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_n^k+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n$.

— *Nếu* $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ *thì tổng các hệ số trong khai triển là* $P(1)$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1.

① Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^n, x\neq 0$ biết $\mathrm{C}_n^4=13\mathrm{C}_n^2$. **ĐS:** $-6435x^{10}$

② Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n, x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=11$. **ĐS:** $6x^2$

③ Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^2+2\right)^n$, biết $\mathrm{A}_n^3-8\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^1=49$. **ĐS:** $280x^8$

Lời giải

① Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^n, x\neq 0$ biết $\mathrm{C}_n^4=13\mathrm{C}_n^2$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 4$. Khi đó

$$\mathrm{C}_n^4=13\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=13\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\Leftrightarrow n^2-5n-150=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=-10 & \text{(loại)}\\ n=15 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^k(x^3)^{15-k}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_{15}^k(-1)^kx^{45-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} ứng với $45-5k=10\Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^7(-1)^7x^{10}=-6435x^{10}$.

② Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=11$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Khi đó

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2=11 \Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2}=11$$
$$\Leftrightarrow n^2+n-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=-5 & \text{(loại)}\\ n=4 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_4^k(x^3)^{4-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_4^k x^{12-5k}$.

Số hạng chứa x^2 ứng với $12-5k=2\Leftrightarrow k=2$.
Vậy số hạng chứa x^2 trong khai triển là $\mathrm{C}_4^2x^2=6x^2$.

③ Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^2+2\right)^n$, biết $\mathrm{A}_n^3-8\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^1=49$.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Khi đó

$$\mathrm{A}_n^3-8\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^1=49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2)-8\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n=49$$
$$\Leftrightarrow n^3-7n^2+7n-49=0\Leftrightarrow n=7 \quad \text{(nhận)}.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_7^k(x^2)^{7-k}(2)^k=\mathrm{C}_7^k2^kx^{14-2k}$.
Số hạng chứa x^8 ứng với $14-2k=8\Leftrightarrow k=3$.
Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển là $\mathrm{C}_7^32^3x^8=280x^8$.

□

VÍ DỤ 2. Xác định số nguyên dương n để trong khai triển $(1+x^2)^n$ có hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4. **ĐS:** $n=11$

Lời giải

Điều kiện $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k\left(x^2\right)^k=\mathrm{C}_n^kx^{2k}$.
Hệ số của x^8 là C_n^4. Hệ số của x^4 là C_n^2.
Do hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4 nên

$$\mathrm{C}_n^4=6\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=6\cdot\frac{n(n-1)}{2!}$$
$$\Leftrightarrow n^2-5n-66=0\left[\begin{array}{ll} n=-6 & \text{(loại)}\\ n=11 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Vậy $n=11$ là giá trị cần tìm. □

VÍ DỤ 3.

① Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}. **ĐS:** 210

② Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^n$ với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024. **ĐS:** 120

Lời giải

① Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}.
Đặt $P(x)=(1+x^2)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1)=2^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024 nên $2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\left(x^2\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.
Số hạng chứa x^{12} ứng với $2k=12 \Leftrightarrow k=6$.
Vậy hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{10}^6=210$.

② Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024.
Đặt $P(x)=\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1)=2^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển là 1024 nên $2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\left(\frac{1}{x}\right)^k\left(x^3\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.
Số hạng chứa x^6 ứng với $2k=6 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{10}^3=120$.

□

VÍ DỤ 4. Cho $P(x)=(1+2x)^n, n\in\mathbb{N}^*$. Khai triển $P(x)$ ta được $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tính n và a_{11} biết rằng $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=4096$. **ĐS:** 24576

Lời giải

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 11$.
Ta có $P\left(\frac{1}{2}\right)=2^n$.
Mặt khác $P\left(\frac{1}{2}\right)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=4096 \Leftrightarrow 2^n=4096 \Leftrightarrow n=12$.
Khi đó, số hạng tổng quát trong khai triển $P(x)$ là $\mathrm{C}_{12}^k(2x)^k=\mathrm{C}_{12}^k(2)^k x^k$.
Ta suy ra $a_{11}=\mathrm{C}_{12}^{11}2^{11}=24576$.
Vậy $n=12, a_{11}=24576$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1.

① Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\frac{2}{x}-x^3\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454$. **ĐS:** -1792

② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{2}{n-5}\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x>0$, biết $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$. **ĐS:** 35

③ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\frac{3}{x^3}\right)^n$, với $n\in\mathbb{N}^*, x\neq 0$, biết $\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3$. **ĐS:** 252

④ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2=3n^2+15$. **ĐS:** 1088640

Lời giải.

① Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454 &\Leftrightarrow \frac{(n-4)(n-5)}{2}+n\cdot n(n-1)=454\\ &\Leftrightarrow 2n^3-n^2-9n-888=0\Leftrightarrow n=8 \quad (\text{nhận}).\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_8^k\left(\dfrac{2}{x}\right)^{8-k}\left(-x^3\right)^k=\mathrm{C}_8^k 2^{8-k}(-1)^k x^{4k-8}$.

Số hạng chứa x^4 ứng với $4k-8=4\Leftrightarrow k=3$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là $\mathrm{C}_8^3 2^5(-1)^3=-1792$.

② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{2}{n-5}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x>0$, biết $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=5n\\ &\Leftrightarrow n^3-3n^2-28n=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}n=-4 & (\text{loại})\\ n=0 & (\text{loại})\\ n=7 & (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\mathrm{C}_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}$.

Số hạng không chứa x ứng với $\dfrac{28-7k}{12}=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_7^4=35$.

③ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{3}{x^3}\right)^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $x\neq 0$, biết $\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3 &\Leftrightarrow (n+1)n+\frac{n(n+1)}{2!}=18\cdot 3!\\ &\Leftrightarrow n^2+n-72=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}n=-9 & (\text{loại})\\ n=8 & (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_8^k(x)^{8-k}\left(\dfrac{3}{x^3}\right)^k=\mathrm{C}_8^k 3^k x^{8-4k}$.

Số hạng không chứa x ứng với $8-4k=0\Leftrightarrow k=2$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_8^2 3^2=252$.

④ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2=3n^2+15$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Khi đó

$$3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2=3n^2+15 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{n(n-1)}{2!}+2\cdot n(n-1)=3n^2+15$$
$$\Leftrightarrow n^2-7n-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} n=-3 & \text{(loại)}\\ n=10 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\left(2x^3\right)^{10-k}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3)^k x^{30-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} ứng với $30-5k=10\Leftrightarrow k=4$.
Vậy hệ số của x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^4 2^6(-3)^4=1088640$.

□

BÀI 2. Tính A_{2016}^n biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1+3x)^n$ là 90. **ĐS:** A_{2016}^5

Lời giải.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k(3x)^k=\mathrm{C}_n^k 3^k x^k$.
Hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_n^2 3^2$.
Do hệ số của x^2 bằng 90 nên

$$\mathrm{C}_n^2 3^2=90\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2!}=10$$
$$\Leftrightarrow n^2-n-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} n=-4 & \text{(loại)}\\ n=5 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.$$

Vậy $\mathrm{A}_{2016}^n=\mathrm{A}_{2016}^5$. □

BÀI 3. Trong khai triển nhị thức $(1+2ax)^n, (x\neq 0)$ ta có được số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $48x$, số hạng thứ ba là $1008x^2$. Tìm n và a. **ĐS:** $n=8, a=3$

Lời giải.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k(2ax)^k=\mathrm{C}_n^k(2a)^k x^k$.

— Số hạng đầu là 1 nên $\mathrm{C}_n^0=1$.

— Số hạng thứ hai là $48x$ nên $\mathrm{C}_n^1(2a)=48$.

— Số hạng thứ ba là $1008x^2$ nên $\mathrm{C}_n^2(2a)^2=1008$.

Ta suy ra

$$\begin{cases}\mathrm{C}_n^1(2a)=48\\ \mathrm{C}_n^2(2a)^2=1008\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}an=24\\ n(n-1)a^2=2016\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}an=24\\ an(an-a)=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}an=24\\ a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\ a=3.\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}n=8\\ a=3.\end{cases}$ □

BÀI 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$, biết hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35. **ĐS:** 252

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k x^{n-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \mathrm{C}_n^k x^{n-2k}$.

— Hệ số của số hạng thứ ba là C_n^2.

— Hệ số của số hạng thứ hai là C_n^1.

Do hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35 nên

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^2 - \mathrm{C}_n^1 = 35 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 35 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -7 & \text{(loại)} \\ n = 10 & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{10}^5 = 252$. □

BÀI 5. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2047$.Tìm số hạng chứa $x^{10}y^6$ trong khai triển $(2x^2+y)^n$. **ĐS:** $14784x^{10}y^6$

Lời giải.

Do $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n - 1 = 2047 \Leftrightarrow n = 11$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^k \left(2x^2\right)^{11-k} y^k = \mathrm{C}_{11}^k 2^{11-k} x^{22-2k} y^k$.

Ta suy ra số hạng chứa $x^{10}y^6$ trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^6 2^5 x^{10} y^6 = 14784x^{10}y^6$.

□

BÀI 6. Cho khai triển nhị thức: $(1-2x+x^3)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_{3n}x^{3n}$. Xác định n và tìm a_6, biết rằng: $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + \cdots + \dfrac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$. **ĐS:** -31

Lời giải.

Đặt $P(x) = (1-2x+x^3)^n$. Suy ra $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n}$.

Mặt khác $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + \cdots + \dfrac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow n = 5$.

Khi đó $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k \left(x^3\right)^{5-k} (1-2x)^k = \sum\limits_{k=0}^{5} \mathrm{C}_5^k x^{15-3k} \sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i (-2x)^i = \sum\limits_{k=0}^{5}\sum\limits_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i (-2)^i (x)^{15-3k+i}$.

Ta suy ra $a_6 = \mathrm{C}_4^3(-2)^3 + \mathrm{C}_5^0(-2)^0 = -31$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

① Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n, x > 0$, biết $\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8$. **ĐS:** 320320

② Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6\mathrm{C}_{n+1}^{n-1} = \mathrm{A}_n^2 + 160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1-2x^3)(2+x)^n$. **ĐS:** -2224

③ Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và a, b $(b > 0)$. Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$ có hạng tử chứa a^4b^9, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau. **ĐS:** $5005a^6b^6$

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $x^3\left(x^{n-8} - \frac{n}{3x}\right)^n, x \neq 0$. **ĐS:** 32440320

Lời giải.

① Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n, x > 0$, biết $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$. Khi đó

$$\begin{aligned}
C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 &\Leftrightarrow C_n^6 + C_n^7 + 2\left(C_n^7 + C_n^8\right) + C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 \\
&\Leftrightarrow C_{n+1}^7 + 2C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8 \\
&\Leftrightarrow C_{n+1}^7 + C_{n+1}^8 + C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8 \\
&\Leftrightarrow C_{n+2}^8 + C_{n+2}^9 = 2C_{n+2}^8 \\
&\Leftrightarrow C_{n+2}^9 = C_{n+2}^8 \\
&\Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{9!(n-7)!} = \cdot\frac{(n+2)!}{8!(n-6)!} \\
&\Leftrightarrow n - 6 = 9 \Leftrightarrow n = 15 \quad \text{(nhận)}.
\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{15}^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{15}^k 2^k x^{\frac{5(6-k)}{6}}$.
Số hạng không chứa x ứng với $\frac{5(6-k)}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 6$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{15}^6 2^6 = 320320$.

② Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1 - 2x^3)(2 + x)^n$.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160 &\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{(n+1)n}{2!} = n(n-1) + 160 \\
&\Leftrightarrow n^2 + 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -10 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là

$$(1 - 2x^3)C_8^k 2^{8-k} x^k = C_8^k 2^{8-k} x^k - C_8^k 2^{9-k} x^{k+3}.$$

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là $2C_8^7 - 2^5 C_8^4 = -2224$.

③ Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và a, b $(b > 0)$. Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$ có hạng tử chứa a^4b^9, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau. **ĐS:** $5005a^6b^6$
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^{n-k} b^k = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^{\frac{3k-n}{2}}$.

Trong khai triển có hạng tử chứa a^4b^9 nên $\begin{cases} n-k=4 \\ \dfrac{3k-n}{2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ k=11. \end{cases}$

Khi đó số hạng tổng quát là $\mathrm{C}_{15}^k a^{15-k} b^{\frac{3k-15}{2}}$.

Số hạng chứa a và b với số mũ bằng nhau khi $15-k=\dfrac{3k-15}{2} \Leftrightarrow k=9$.

Vậy số hạng chứa a và b với số mũ bằng nhau là $\mathrm{C}_{15}^9 a^6b^6 = 5005a^6b^6$.

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-3} - \mathrm{C}_{n-1}^2 = \mathrm{C}_{n-1}^1 \mathrm{C}_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $x^3\left(x^{n-8} - \dfrac{n}{3x}\right)^n, x \neq 0$.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Khi đó

$$\mathrm{C}_n^{n-3} - \mathrm{C}_{n-1}^2 = \mathrm{C}_{n-1}^1 \mathrm{C}_{n+3}^{n+2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{(n-1)(n-2)}{2!} = (n-1)\cdot(n+3)$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 12n^2 - n + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n=-1 & \text{(loại)} \\ n=1 & \text{(loại)} \\ n=12 & \text{(nhận).} \end{bmatrix}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $x^3\mathrm{C}_{12}^k \left(x^4\right)^{12-k}\left(-\dfrac{4}{x}\right)^k = \mathrm{C}_{12}^k(-4)^k x^{51-5k}$.

Số hạng chứa x^{11} ứng với $51-5k=11 \Leftrightarrow k=8$.

Vậy hệ số của x^{11} trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^8(-4)^8 = 32440320$.

□

BÀI 8. Trong khai triển nhị thức $(1+ax)^n$, ta có số hạng đầu bằng 1, số hạng thứ hai bằng $24x$, số hạng thứ ba bằng $252x^2$. Tìm n và a. **ĐS:** $n=8, a=3$

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k (ax)^k = \mathrm{C}_n^k a^k x^k$.

— Số hạng đầu là 1 nên $\mathrm{C}_n^0 = 1$.

— Số hạng thứ hai là $48x$ nên $\mathrm{C}_n^1 a = 24$.

— Số hạng thứ ba là $252x^2$ nên $\mathrm{C}_n^2 a^2 = 252$.

Ta suy ra

$$\begin{cases} \mathrm{C}_n^1 a = 24 \\ \mathrm{C}_n^2 a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ n(n-1)a^2 = 504 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} n=8 \\ a=3. \end{cases}$ □

BÀI 9. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $(x-2)^n$ bằng 220. Tìm hệ số của x^2. **ĐS:** 67584

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k x^{n-k} (-2)^k$.
Do hệ số của x^{n-2} trong khai triển bằng 220 nên

$$C_n^2 (-2)^2 = 220 \Leftrightarrow n(n-1) = 110$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = -10 & \text{(loại)} \\ n = 11 & \text{(nhận)}. \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ số của x^2 là $C_{12}^{10} (-2)^{10} = 67584$. □

BÀI 10. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm số nguyên dương n. **ĐS:** $n = 32$

Lời giải.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k x^{n-k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$.
Do hệ số của x^{n-2} trong khai triển bằng 31 nên

$$C_n^2 \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31 \Leftrightarrow n(n-1) = 992$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 992 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = -31 & \text{(loại)} \\ n = 32 & \text{(nhận)}. \end{bmatrix}$$

Vậy $n = 32$. □

BÀI 11. Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4. **ĐS:** 1120

Lời giải.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k \left(x^2\right)^{n-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_n^k (-2)^k x^{2n-3k}$.
Do tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97 nên

$$C_n^0 + C_n^1(-2) + C_n^2(-2)^2 = 97 \Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 97$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = -6 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)}. \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ số của x^4 trong khai triển là $C_8^4 (-2)^4 = 1120$. □

BÀI 12. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

① Biết n nguyên dương thỏa mãn điều kiện $C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ với $x > 0$. **ĐS:** 14784

② Biết rằng n là số nguyên dương thỏa $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2048$.Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, **ĐS:** 1320

③ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(\sqrt{x} - 3x^2\right)^n$, $(x > 0)$, biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048. **ĐS:** -4455

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$. **ĐS:** -2099520

Lời giải.

① Biết n nguyên dương thỏa mãn điều kiện $C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ với $x > 0$.
Do $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - 1 = 4095 \Leftrightarrow n = 12$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{12}^k \left(\dfrac{2}{x^3}\right)^{12-k} \left(\sqrt{x^5}\right)^k = C_{12}^k 2^{12-k} x^{\frac{-72+11k}{2}}$.
Số hạng chứa x^8 trong khai triển ứng với $\dfrac{-72+11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 8$.
Ta suy ra hệ số của x^8 trong khai triển là $C_{12}^8 2^4 = 7920$.

② Biết rằng n là số nguyên dương thỏa $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2048$.Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$.
Ta có $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^n b^n$.
Cho $a = 3, b = -1$ ta được

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{11}^k 2^{11-k} x^k$.
Ta suy ra hệ số của x^8 trong khai triển là $C_{11}^8 2^3 = 1320$.

③ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(\sqrt{x} - 3x^2\right)^n$, $(x > 0)$, biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048.
Đặt $P(x) = \left(\sqrt{x} - 3x^2\right)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1) = (-2)^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển là -2048 nên $(-2)^n = -2048 \Leftrightarrow n = 11$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{11}^k \left(\sqrt{x}\right)^{11-k} \left(-3x^2\right)^k = C_{11}^k (-3)^k x^{\frac{11+3k}{2}}$.
Số hạng chứa x^{10} ứng với $\dfrac{11+3k}{2} = 10 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy hệ số của x^{10} là $C_{11}^3 (-3)^3 = -4455$.

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$.
Ta có $(a+b)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 a^{2n+1} + C_{2n+1}^1 a^{2n} b + C_{2n+1}^2 a^{2n-1} b^2 + C_{2n+1}^3 a^{2n-2} b^3 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} b^{2n+1}$.
Cho $a = 1, b = 1$ ta được $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1}$ (1).
Cho $a = 1, b = -1$ ta được $C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + \cdots - C_{2n+1}^{2n+1} = 0$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \cdots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow n = 5$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{10}^k (2)^{10-k} (-3x)^k$.
Ta suy ra hệ số của x^7 trong khai triển là $C_{10}^7 2^3 (-3)^7 = -2099520$.

□

DẠNG 3.3. Chứng minh hoặc tính tổng

- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.
- $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh

① $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.

② $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.

Lời giải

① Xét nhị thức

$$(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + C_{2n}^3 x^{2n-3} + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.$$

Thay $x = 1$ ta được

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}.$$

Vậy $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.

② Xét nhị thức $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n$.
Thay $x = 3$ ta được

$$C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2^n.$$

Lại có $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
Vậy $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.

□

VÍ DỤ 2. Tính các tổng sau

① $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \cdots + C_5^5$. **ĐS:** $S = 32$.

② $S = 2C_{2010}^1 + 2^3 C_{2010}^3 + 2^5 C_{2010}^5 + \cdots + 2^{2009} C_{2010}^{2009}$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^{2010} - 1}{2}$.

Lời giải

① Ta có $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \cdots + C_5^5 = 2^5 = 32$.

② Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 x + C_{2010}^2 x^2 + C_{2010}^3 x^3 + \cdots + C_{2010}^{2009} x^{2009} + C_{2010}^{2010} x^{2010}.$$

Thay $x = 2$ ta được

$$C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2 C_{2010}^2 + 2^3 C_{2010}^3 + \cdots + 2^{2009} C_{2010}^{2009} + 2^{2010} C_{2010}^{2010} = 3^{2010}. \quad (1)$$

Thay $x = -2$ ta được

$$C_{2010}^0 - 2C_{2010}^1 + 2^2 C_{2010}^2 - 2^3 C_{2010}^3 + \cdots - 2^{2009} C_{2010}^{2009} + 2^{2010} C_{2010}^{2010} = 1. \quad (2)$$

Trừ hai vế (1) và (2) suy ra

$$2\left(2C_{2010}^1 + 2^3 C_{2010}^3 + 2^5 C_{2010}^5 + \cdots + 2^{2009} C_{2010}^{2009}\right) = 3^{2010} - 1.$$

Vậy $S = \dfrac{3^{2010} - 1}{2}$.

□

VÍ DỤ 3. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện sau

① $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=4095$. **ĐS:** $n=12$.

② $\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\mathrm{C}_{2n+1}^5+\mathrm{C}_{2n+1}^7+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1024$. **ĐS:** $n=5$.

Lời giải

① Ta có

$$\begin{aligned}&\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=4095\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=4095+\mathrm{C}_n^0\\ \Leftrightarrow\ &2^n=4096=2^{12}\Leftrightarrow n=12.\end{aligned}$$

② Ta có $\begin{cases}\mathrm{C}_{2n+1}^0+\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^2+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}\\ \mathrm{C}_{2n+1}^0-\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^2-\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}-\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=0.\end{cases}$
Trừ hai vế ta được

$$\begin{aligned}&2\left(\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}-\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}\right)=2^{2n+1}\\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n}-\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}\\ \Leftrightarrow\ &2^{2n}=1024=2^{10}\Leftrightarrow n=5.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh

① $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$.

② $k(k-1)\mathrm{C}_n^k=n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.

Lời giải

① Ta có $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}\Leftrightarrow\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (luôn đúng). Suy ra điều phải chứng minh.

② Ta có

$$\begin{aligned}k(k-1)\mathrm{C}_n^k=n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}\ &\Leftrightarrow\ k(k-1)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}=n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}\\ &\Leftrightarrow\ \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}\ \text{(luôn đúng).}\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

□

VÍ DỤ 5. Cho khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{11}x^{11}$. Hãy tìm hệ số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \ldots, a_{11}$?

ĐS: $a_7 = \frac{C_{11}^7 \cdot 2^7}{3^{11}}$, $a_8 = \frac{C_{11}^8 \cdot 2^8}{3^{11}}$

Lời giải

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{11}$ là

$$T_{k+1} = C_{11}^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k} \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)^k = C_{11}^k \cdot \frac{2^k}{3^{11}} \cdot x^k.$$

Do đó hệ số của số hạng tổng quát là $a_k = C_{11}^k \cdot \frac{2^k}{3^{11}} = \frac{C_{11}^k \cdot 2^k}{3^{11}}$.

Xét $\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{C_{11}^k \cdot 2^k}{C_{11}^{k+1} \cdot 2^{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(11-k)} < 1 \Leftrightarrow k < 7$. Suy ra $a_0 < a_1 < \cdots < a_6 < a_7$.

Tương tự $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7$. Suy ra $a_8 > a_9 > \cdots > a_{11}$.

Lại có $\frac{a_7}{a_8} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow a_7 = a_8$, nên $a_0 < a_1 < \cdots < a_6 < a_7 = a_8 > \cdots > a_{11}$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7 = \frac{C_{11}^7 \cdot 2^7}{3^{11}}$ và $a_8 = \frac{C_{11}^8 \cdot 2^8}{3^{11}}$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Chứng minh

① $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.

② $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

① Ta có $\begin{cases} C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n} & (1) \\ C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0. & (2) \end{cases}$

Cộng hai vế (1) và (2) ta được

$$2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}\right) = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Trừ hai vế (1) và (2) ta được

$$2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}\right) = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Vậy $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.

② Xét nhị thức $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^n x^n + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Trong khai triển trên thì hệ số của x^n là C_{2n}^n. (1)
Mặt khác

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n \cdot (x+1)^n \\ &= \left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\right) \cdot \left(\mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^0\right).\end{aligned}$$

Hệ số của x^n trong tích trên là $(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + (\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra

$$(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + (\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n.$$

□

BÀI 2. Tính các tổng sau

① $S = \mathrm{C}_{2010}^0 + 2\mathrm{C}_{2010}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2010}^2 + \cdots + 2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010}$. **ĐS:** $S = 3^{2010}$.

② $S = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{10}^9 + \mathrm{C}_{10}^{10}$. **ĐS:** $S = 386$.

Lời giải.

① Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = \mathrm{C}_{2010}^0 + \mathrm{C}_{2010}^1 x + \mathrm{C}_{2010}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2010}^{2010} x^{2010}.$$

Thay $x = 2$ ta được

$$\mathrm{C}_{2010}^0 + 2\mathrm{C}_{2010}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2010}^2 + \cdots + 2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010} = 3^{2010}.$$

Vậy $S = 3^{2010}$.

② Xét $S_1 = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} = 2^{10}$.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có

$$S = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{10}^9 + \mathrm{C}_{10}^{10} = \mathrm{C}_{10}^4 + \mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^0.$$

Do đó $S_1 = 2S + \mathrm{C}_{10}^5 \Rightarrow S = \dfrac{S_1 - \mathrm{C}_{10}^5}{2} = 386$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Chứng minh

① $\mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 - \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 0$.

② $3^{16}\mathrm{C}_{16}^0 - 3^{15}\mathrm{C}_{16}^1 + 3^{14}\mathrm{C}_{16}^2 - \cdots 3\mathrm{C}_{16}^{15} + \mathrm{C}_{16}^{16} = 2^{16}$.

③ $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 \cdot 3^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} \cdot (2^{2n} + 1)$.

④ $\mathrm{C}_{2001}^0 + 3^2\mathrm{C}_{2001}^2 + 3^4\mathrm{C}_{2001}^4 + \cdots + 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000} = 2^{2000} \cdot (2^{2001} - 1)$.

⑤ $2^n\mathrm{C}_n^0 + 2^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + 2^{n-4}\mathrm{C}_n^4 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

BÀI 4. Tính các tổng sau

① $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5$. **ĐS:** $S = 3^5$

② $S = 4^0C_8^0 + 4^1C_8^1 + 4^2C_8^2 + \cdots + 4^8C_8^8$. **ĐS:** $S = 5^8$

③ $S = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \cdots + C_{2010}^{2010}$. **ĐS:** $S = 2^{2010}$

④ $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \cdots + C_{100}^{100}$. **ĐS:** $S = 2^{99}$

⑤ $S = \dfrac{1}{2! \cdot 2012!} + \dfrac{1}{4! \cdot 2010!} + \cdots + \dfrac{1}{2012! \cdot 2!} + \dfrac{1}{2014!}$. **ĐS:** $S = \dfrac{2^{2013} - 1}{2014!}$

BÀI 5. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện

① $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + \cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$. **ĐS:** $n = 11$

② $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 512$. **ĐS:** $n = 5$

③ $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \cdots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1$. **ĐS:** $n = 4$

④ $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. **ĐS:** $n = 10$

BÀI 6. Chứng minh rằng

① $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

② $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$.

③ $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

④ $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

BÀI 7. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, với các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Hãy tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, \ldots, a_n$? **ĐS:** $n = 12$, $a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8$

BÀI 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A PHÉP THỬ

Định nghĩa 1. Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của phép thử đó mặc dù biết tập tất cả các kết quả của phép thử đó.

VÍ DỤ 1. Phép thử "Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất". Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ □

VÍ DỤ 2. Xét phép thử "Gieo hai đồng xu phân biệt". Nếu ký hiệu S là mặt sấp, N là mặt ngửa. Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

Không gian mẫu $\Omega = \{NN, SN, NS, SS\}$. □

VÍ DỤ 3. Xét phép thử T "Gieo 3 đồng xu phân biệt". Tính số phần tử của không gian mẫu.
ĐS: 8

Lời giải

Mỗi đồng xu có hai khả năng xuất hiện mặt S hay $N \Rightarrow$ không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{NNN, NSN, SNN, SSN, NNS, NSS, SNS, SSS\}.$$

Do vậy số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 8$. □

B BIẾN CỐ

Định nghĩa 2. Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

VÍ DỤ 4. Xét phép thử T "Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất". Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chấm chẵn". Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố A.

Lời giải

Biến cố $A = \{2;4;6\}$. □

! ① Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

② Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra gọi là một kết quả thuận lợi của A.

③ Biến cố A có ngoài cách cho bằng mô tả, có thể cho A dưới dạng liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của A.

C XÁC SUẤT

Định nghĩa 3. Xét phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn kết quả đồng khả năng. Biến cố A liên quan đến phép thử, $A \subset \Omega$. Xác suất của biến cố A là

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

! ① Với mọi biến cố A của phép thử có không gian mẫu là Ω. Ta luôn có $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

② $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$, trong đó $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A.

③ Với A, B là hai biến cố ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

VÍ DỤ 5. Xét phép thử T: "Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất". Tập các kết quả là tập hợp gồm tất cả các cặp số cho bởi bảng sau

Số chấm	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i;j)|i,j = \overline{1;6}\}$.

— Số phần tử của không gian mẫu là 36.

— Biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện trên mặt bằng 7".
Ta có $A = \{(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\} \Rightarrow n(A) = 6$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

VÍ DỤ 6. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố

① A: "Mặt có số chấm lẻ xuất hiện". **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

② B: "Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3". **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

③ C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2". **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

Lời giải

① A: "Mặt có số chấm lẻ xuất hiện".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.
Biến cố $A = \{1;3;5\} \Rightarrow n(A) = 3$.
Xác suất của A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$

② B: "Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3"
. Biến cố $B = \{6;3\} \Rightarrow n(B) = 2$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$.

③ C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2".
Biến cố $C = \{3;4;5;6\} \Rightarrow \mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{3}$.

□

VÍ DỤ 7. Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để

① lấy được quả màu trắng. **ĐS:** $\dfrac{4}{9}$ ② lấy được quả cầu xanh. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9$.

① Quả cầu được lấy có màu trắng, số cách lấy là 4.
Xác suất lấy quả cầu trắng là $\dfrac{4}{9}$.

② Quả cầu được lấy có màu đỏ, số cách lấy là 3.
Xác suất lấy được quả cầu đỏ là $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

□

VÍ DỤ 8. Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X. Ban quản lí chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A, 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C. Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong một hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa chất tạo nạc (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để cả 3 hộp lấy ra có đủ cả ba loại thịt ở các quầy A, B, C. **ĐS:** $\dfrac{24}{91}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{3}$.
Gọi X là biến cố "Cả ba của hàng đều có mẫu thịt được lấy".
Số phần tử của X là $n(X) = \mathrm{C}_{4}^{1}.\mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{6}^{1} = 120$.
Xác suất của X là $\mathrm{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{24}{91}$. □

VÍ DỤ 9. Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. **ĐS:** $\dfrac{2}{45}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^{3}$.
Giả sử 3 số ghi trên các quả cầu được chọn là a, b, c với $a < b < c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$.
Có hai khả năng $(a;b;c) = (3;4;5)$ hoặc $(a;b;c) = (6;8;10)$.
Gọi X là biến cố: "3 số ghi trên 3 quả cầu được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông".

Số phần tử của X là $n(X) = 2$.

Xác suất của biến cố X là $\mathrm{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{2}{45}$. □

VÍ DỤ 10. Trong một chiếc hộp 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên lấy ra không đủ cả ba màu. **ĐS:** $\dfrac{43}{91}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 viên lấy ra không đủ ba màu".
Biến cố A xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 4 viên đúng một màu, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_4^4 = 21$.

— **Trường hợp 2:** 4 viên có đúng hai màu
+ Hai màu đỏ-vàng, có $\mathrm{C}_{11}^4 - \mathrm{C}_6^4 - \mathrm{C}_5^4 = 310$.
+ Hai màu đỏ-trắng, có $\mathrm{C}_{10}^4 - \mathrm{C}_6^4 - \mathrm{C}_4^4 = 194$.
+ Hai màu vàng-trắng, có $\mathrm{C}_9^4 - \mathrm{C}_5^4 - \mathrm{C}_4^4 = 120$.
Tổng số cách lấy 4 viên đúng hai màu là $310 + 194 + 120 = 624$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 624 + 21 = 645$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{43}{91}$. □

DẠNG 4.1. Chọn hoặc sắp xếp đồ vật

D LÍ THUYẾT

- **Phương pháp:**

① **Phương pháp** 1: Tính xác suất theo định nghĩa.
Đếm số phần tử của không gian mẫu, số phần tử của biến cố.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

② **Phương pháp** 2: Tính xác suất của biến cố đối.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right).$$

Phương pháp này nên dùng khi xét trực tiếp có nhiều trường hợp khác nhau.

③ **Phương pháp** 3: Áp dụng quy tắc cộng và qua tắc nhân xác suất.

- **Kiến thức bổ sung:**

① Công thức đếm số phần tử của hợp hai tập hợp

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

② Công thức đếm số phần tử của hợp ba tập hợp

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C).$$

③ Phương pháp đặt song ánh $1-1$.
Khi cần đếm một tập A trực tiếp khó khăn ta có thể chỉ ra tập đó có sự tương ứng $1-1$ với tập B và khi đó chỉ cần đếm B.

VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một bình đựng 6 viên bi không giống nhau, trong đó có 2 xanh, 2 vàng và 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được

① 2 viên bi xanh. **ĐS:** $\dfrac{1}{15}$ ② 2 viên bi khác màu. **ĐS:** $\dfrac{4}{5}$

Lời giải

① Xác suất lấy được 2 viên bi xanh.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_6^2$.
Gọi A là biến cố "2 viên bi lấy được là bi xanh".
Số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_2^2$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{15}$.

② Xác suất lấy được hai viên bi khác màu.
Gọi B là biến cố "2 viên bi lấy được khác màu".
Biến cố B xảy ra khi 2 viên bi lấy được là 1 xanh - 1 vàng; 1 xanh - 1 đỏ; 1 vàng - 1 đỏ.
Số phần tử của B là $n(B)=\mathrm{C}_3^2\times 2\times 2=12$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{5}$.

□

VÍ DỤ 2. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 2 quả cầu đen, các quả cầu khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen. **ĐS:** $\dfrac{20}{77}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=\mathrm{C}_{12}^6$.
Gọi A là biến cố "Lấy được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen".
Số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^1$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{20}{77}$. □

VÍ DỤ 3. Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp

① Lấy được 3 viên bi màu đỏ. **ĐS:** $\frac{7}{44}$. ② Lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ. **ĐS:** $\frac{7}{11}$.

Lời giải

① Xác suất lấy được 3 viên bi màu đỏ.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.
Gọi A là biến cố "Lấy được 3 viên bi màu đỏ".
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_7^3 = 35$.
Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{44}$.

② Xác xuất lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.
Gọi B là biến cố "Lấy được ít nhất hai viên bi màu đỏ".
Số phần tử của biến cố B là $n(B) = C_7^3 + C_7^2 \cdot C_5^1 = 140$.
Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{11}$.

□

VÍ DỤ 4. Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu được chọn là khác màu. **ĐS:** $\frac{11}{17}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{18}^2 = 153$.
Gọi A là biến cố "Hai quả cầu được chọn không cùng màu".
Biến cố đối $\overline{A}$ của A là "2 viên bi được lấy cùng màu".
Ta có $n(\overline{A}) = C_3^2 + C_6^2 + C_9^2 = 54$.
Xác suất của biến cố A là $P(A) = 1 - n(\overline{A}) = 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{11}{17}$.

! Có thể tính trực tiếp $n(A) = C_3^1 \cdot C_6^1 + C_3^1 \cdot C_9^1 + C_9^1 \cdot C_6^1$.

□

VÍ DỤ 5. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ. **ĐS:** $\frac{12}{13}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$.
Gọi A là biến cố "Có ít nhất một viên bi màu đỏ được lấy".

Biến cố đối của A là $\overline{A}$ "3 viên bi được lấy đều màu xanh".
Số phần tử của $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = 1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{13}$. □

VÍ DỤ 6. Một hộp đựng 20 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 9 viên bi. Tính xác suất trong các trường hợp

① 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu. **ĐS:** $\dfrac{297}{8398}$

② 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu. **ĐS:** $\dfrac{8101}{8398}$

Lời giải

① Xác suất 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^9 = 167960$.
Gọi A là biến cố "9 viên bi được lấy có đúng hai màu".
Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên ta có
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - đỏ là C_{15}^9.
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - vàng là C_{12}^9.
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu đỏ - vàng là C_{13}^9.
Do đó số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{15}^9 + \mathrm{C}_{13}^9 + \mathrm{C}_{12}^9 = 5940$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{297}{8398}$.

② Xác suất 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu.
Gọi B là biến cố "9 viên bi được lấy có đủ cả 3 màu".
Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên không thể xảy ra trường hợp 9 viên một màu.
Do đó số phần tử của B là $n(B) = n(\Omega) - n(A) = 162020$.
Xác suất của B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{8101}{8398}$.

□

F BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số thứ tự từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{118}{231}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^6$.
Gọi m, n lần lượt là số thẻ có ghi số **chẵn**, số thẻ có ghi số **lẻ** được chọn.
Ta có $m + n = 6$. Do tổng của các số trên 6 thẻ là số lẻ nên cặp $(m;n) \in \{(1;5),(3;3),(5;1)\}$.
Gọi A là biến cố "Tổng số ghi trên 6 thẻ là số lẻ".
Ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_5^5 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 236$.
Xác suất cần tính bằng $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{118}{231}$ □

BÀI 2. Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, 2 viên bi vàng, lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất các biến cố

① A: "hai viên bi được lấy cùng màu xanh". **ĐS:** $\frac{1}{6}$

② B: "hai viên bi được lấy cùng màu đỏ ". **ĐS:** $\frac{1}{12}$

③ C: "hai viên bi được lấy cùng màu". **ĐS:** $\frac{5}{18}$

④ D: "hai viên bi được lấy khác màu". **ĐS:** $\frac{13}{18}$

Lời giải.

① A: "hai viên bi được lấy cùng màu xanh".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_9^2$.
Số phần tử của A là $n(A) = \mathrm{C}_4^2$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

② B: "hai viên bi được lấy cùng màu đỏ ".
Số phần tử của B là $n(B) = \mathrm{C}_3^2$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{12}$.

③ C: "hai viên bi được lấy cùng màu".
Ta có $n(C) = \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_2^2 = 10$.
Xác suất của C là $\mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{18}$.

④ D: "hai viên bi được lấy khác màu".
Biến cố đối của D là "Hai bi được lấy cùng màu".
Suy ra xác suất của biến cố D là $\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(C) = \dfrac{13}{18}$.

□

BÀI 3. Từ một hộp 13 bóng đèn, trong đó có 6 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên 5 bóng ra khỏi hộp. Tính xác suất sao cho

① Có nhiều nhất hai bóng hỏng. **ĐS:** $\frac{84}{143}$

② Có ít nhất một bóng không hỏng. **ĐS:** $\frac{427}{429}$

Lời giải.

① Xác suất có nhiều nhất hai bóng hỏng được lấy.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^5$.
Gọi A là biến cố "Có nhiều nhất hai bóng hỏng được lấy".
Số phần tử của biến cố A là $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_7^3 \cdot \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_6^0 \cdot \mathrm{C}_7^5 = 756$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{84}{143}$.

② Có ít nhất một bóng không hỏng.
Gọi B là biến cố "Có ít nhất một bóng hỏng được lấy trong 5 bóng được lấy ra".
Biến cố đối của B là $\overline{B}$: "Cả 5 bóng đều hỏng".
Số phần tử của $\overline{B}$ là $n\left(\overline{B}\right) = \mathrm{C}_6^5$.
Xác suất của B là $\mathrm{P}(B) = 1 - \overline{\mathrm{B}} = 1 - \dfrac{n\left(\overline{B}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{427}{429}$.

□

BÀI 4. Trong một hộp có 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy có cả bi xanh và bi đỏ. **ĐS:** $\dfrac{916}{1001}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^4$.
Số phần tử của biến cố A: "4 viên bi được lấy có cả bi xanh, bi đỏ" là

$$n(A) = \mathrm{C}_{14}^4 - \mathrm{C}_8^4 - \mathrm{C}_6^4 = 916.$$

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{916}{1001}$. □

BÀI 5. Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả 3 màu. **ĐS:** $\dfrac{48}{91}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố "4 viên bi lấy được có đủ cả 3 màu".

— **Trường hợp 1:** Có đúng 1 bi đỏ, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 420$.

— **Trường hợp 2:** Có đúng 2 bi đỏ được chọn, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 300$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 720$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{48}{91}$.

> **!** Có thể giải bài toán bằng cách gián tiếp. Biến cố đối $\overline{A}$ là "Bốn viên bi được chọn có đúng một màu hoặc đúng hai màu".
> Điều đó có nghĩa ta sẽ đếm số cách chọn 4 bi có đúng một màu; số cách chọn 4 bi có đúng hai màu.
> Cách giải này thể hiện ưu điểm khi số bị chọn lớn.

□

BÀI 6. Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ cả 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất. **ĐS:** $\dfrac{16}{91}$.

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 viên bi được chọn có đủ cả 3 màu và số bi đỏ là nhiều nhất".
Số bi đỏ nhiều nhất và trong 4 bi được chọn đủ cả ba màu khi có đúng 2 bi đỏ được chọn.
Do đó, số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 240$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{91}$. □

BÀI 7. Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ. **ĐS:** $\dfrac{35}{132}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^5$.
Gọi A là biến cố "5 viên bi được lấy có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ".
Biến cố A xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 1 bi đỏ, 1 bi xanh và 3 bi vàng được chọn. Số cách chọn là $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 120$.

— **Trường hợp 2:** 2 bi đỏ, 2 bi xanh và 1 bi vàng được chọn. Số cách chọn là $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 90$.

Số phần tử của biến cố A là $120 + 90 = 210$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{132}$. □

BÀI 8. Cho hai hộp bi, hộp thứ nhất có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng. Hộp thứ hai có 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên. Tính xác suất để hai viên bi được chọn ra có cùng màu. **ĐS:** $\dfrac{10}{21}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 42$.

Gọi A là biến cố: "Hai viên bi được chọn có cùng màu".

Trường hợp 1: Hai bi được chọn đều là màu đỏ: $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 8$.

Trường hợp 2: Hai bi được chọn đều là màu trắng: $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 12$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 + \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 20$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$. □

BÀI 9. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại. **ĐS:** $\dfrac{3}{11}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: "3 hộp được chọn có cả 3 loại".

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 60$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{11}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 10. Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm. **ĐS:** $\dfrac{17}{22}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^6 = 924$.

Gọi A là biến cố: "6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm".

Trường hợp 1: 6 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào: $\mathrm{C}_{10}^6 = 210$.

Trường hợp 2: 6 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm: $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 = 504$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 = 714$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{17}{22}$. □

BÀI 11. Trong đợt kiểm tra chất lượng sản xuất sản phẩm tiêu dùng, một đoàn thanh tra lấy ngẫu nhiên 5 sản phẩm từ 1 lô hàng của một công ty để kiểm tra. Tính xác suất để đoàn thanh tra lấy được ít nhất 2 phế phẩm. Biết rằng trong lô hàng đó có 100 sản phẩm, trong đó có 95 chính phẩm và 5 phế phẩm. **ĐS:** $\dfrac{357319}{18821880}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{100}^5 = 75287520$.

Gọi A là biến cố: "5 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 phế phẩm".

Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "5 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm".

Trường hợp 1: 5 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào: $\mathrm{C}_{95}^5 = 57940519$.

Trường hợp 2: 5 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{95}^4 = 15917725$.

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{95}^{5} + \mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{95}^{4} = 73858244$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{357319}{18821880}$. □

BÀI 12. Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô trong đó có 6 xe tốt. Họ điều động ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Tính xác suất sao cho 3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt. **ĐS:** $\dfrac{29}{30}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^{3} = 120$.

Gọi A là biến cố: "3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt".

Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "3 xe điều động đi không có xe tốt nào".

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{4}^{3} = 4$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{29}{30}$. □

BÀI 13. Trên giá sách có 5 quyển sách toán học, 4 quyển Vật lý và 3 quyển Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Tính xác suất sao cho:

① ít nhất 1 quyển Toán học. **ĐS:** $\dfrac{92}{99}$

② có đúng 2 quyển Vật lý. **ĐS:** $\dfrac{56}{165}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^{4} = 495$.

① Gọi A là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có ít nhất 1 quyển Toán học".
Biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho không có quyển Toán học nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{7}^{4} = 35$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{92}{99}$.

② Gọi B là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển Vật lý".
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = \mathrm{C}_{4}^{2} \cdot \mathrm{C}_{8}^{2} = 168$.
Vậy $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{56}{165}$.

□

BÀI 14. Trên một kệ sách có 12 quyển sách khác nhau, gồm 4 quyển tiểu thuyết, 6 quyển truyện tranh và 2 quyển truyện cổ tích. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển từ kệ sách. Tính xác suất sao cho sao cho 3 quyển được lấy:

① đôi một khác loại. **ĐS:** $\dfrac{12}{55}$

② đúng 2 quyển cùng một loại. **ĐS:** $\dfrac{37}{55}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^{3} = 220$.

① Gọi A là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sao cho 3 quyển sách đôi một khác loại".
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{4}^{1} \cdot \mathrm{C}_{6}^{1} \cdot \mathrm{C}_{2}^{1} = 48$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{55}$.

② Gọi B là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển cùng loại".
Trường hợp 1: 2 quyển tiểu thuyết, 1 quyển truyện tranh hoặc 1 quyển truyện cổ tích: $C_4^2 \cdot C_8^1 = 48$.
Trường hợp 2: 2 quyển truyện tranh, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện cổ tích: $C_6^2 \cdot C_6^1 = 90$.
Trường hợp 3: 2 quyển truyện cổ tích, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện tranh: $C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 10$.
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = C_4^2 \cdot C_8^1 + C_6^2 \cdot C_6^1 + C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 148$.
Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{37}{55}$.

□

BÀI 15. Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc. **ĐS:** $\dfrac{229}{323}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$.
Gọi B là biến cố: "Thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học".
Trường hợp 1: Thí sinh A rút được 2 câu đã học thuộc: $C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = 2025$.
Trường hợp 2: Thí sinh A rút được 3 câu đã học thuộc: $C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 = 1200$.
Trường hợp 3: Thí sinh A rút được 4 câu đã học thuộc: $C_{10}^4 = 210$.
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 + C_{10}^4 = 3435$.
Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{229}{323}$. □

BÀI 16. Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc. **ĐS:** $\dfrac{10}{13}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$.
Gọi A là biến cố "Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc".
Trường hợp 1: Bạn Thủy rút được 2 câu đã học thuộc: $C_8^2 \cdot C_7^2 = 588$.
Trường hợp 2: Bạn Thủy rút được 3 câu đã học thuộc: $C_8^3 \cdot C_7^1 = 392$.
Trường hợp 3: Bạn Thủy rút được 4 câu đã học thuộc: $C_8^4 = 70$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_8^2.C_7^2 + C_8^3.C_7^1 + C_8^4 = 1050$
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{13}$. □

BÀI 17. Đề cương ôn tập cuối năm môn Lịch sử 12 có 40 câu hỏi khác nhau. Đề thi kiểm tra học kỳ 2 gồm 3 câu hỏi trong 40 câu hỏi đó. Một học sinh chỉ học 20 câu trong đề cương ôn tập. Giả sử các câu hỏi trong đề cương đều có khả năng được chọn làm câu hỏi thi như nhau. Tính xác suất để ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{40}^3 = 9880$.
Gọi A là biến cố "ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học"
Trường hợp 1: Rút được 2 câu hỏi trong số 20 câu đã học: $C_{20}^2 \cdot C_{20}^1 = 3800$.
Trường hợp 2: Rút được 3 câu hỏi trong số 20 câu đã học: $C_{20}^3 = 1140$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{20}^{2}.\mathrm{C}_{20}^{1} + \mathrm{C}_{20}^{3} = 4940$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 18. Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu, được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt". **ĐS:** $\dfrac{625}{1566}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{30}^{5} = 142506$.

Gọi A là biến cố "đề thi lấy ra là một đề thi Tốt".

Vì trong một đề thi Tốt có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A.

Trường hợp 1: Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 trung bình, 1 khó: $\mathrm{C}_{15}^{3} \cdot \mathrm{C}_{10}^{1}.\mathrm{C}_{5}^{1} = 22750$.

Trường hợp 2: Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 trung bình, 1 khó: $\mathrm{C}_{15}^{2} \cdot \mathrm{C}_{10}^{2}.\mathrm{C}_{5}^{1} = 23625$.

Trường hợp 3: Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 trung bình, 2 khó: $\mathrm{C}_{15}^{2} \cdot \mathrm{C}_{10}^{1}.\mathrm{C}_{5}^{2} = 10500$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{15}^{3}.\mathrm{C}_{10}^{1}.\mathrm{C}_{5}^{1} + \mathrm{C}_{15}^{2}.\mathrm{C}_{10}^{2}.\mathrm{C}_{5}^{1} + \mathrm{C}_{15}^{2}.\mathrm{C}_{10}^{1}.\mathrm{C}_{5}^{2} = 56875$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{625}{1566}$. □

BÀI 19. Trong kì thi THPT Quốc Gia, Khoa làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được $0,2$ điểm. Khoa trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại Khoa chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của Khoa không dưới $9,5$ điểm. **ĐS:** $\dfrac{53}{512}$

Lời giải.

Bạn Khoa được không dưới $9,5$ điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên, khoa trả lời đúng ít nhất 3 câu.

Xác suất trả lời đúng một câu là $0,25$, trả lời sai là $0,75$

Xác suất Khoa trả lời đúng 3 câu trên 5 câu là: $\mathrm{C}_{5}^{3}.(0,25)^3.(0,75)^2 = \dfrac{45}{512}$.

Xác suất Khoa trả lời đúng 4 câu trên 5 câu là: $\mathrm{C}_{5}^{4}.(0,25)^4.(0,75) = \dfrac{15}{1024}$.

Xác suất Khoa trả lời đúng 5 câu là: $\mathrm{C}_{5}^{5}.(0,25)^5 = \dfrac{1}{1024}$.

Vậy xác suất Khoa được không dưới $9,5$ điểm là: $\mathrm{C}_{5}^{3}.(0,25)^3.(0,75)^2 + \mathrm{C}_{5}^{4}.(0,25)^4.(0,75) + \mathrm{C}_{5}^{5}.(0,25)^5 = \dfrac{53}{512}$.

□

DẠNG 4.2. Chọn hoặc sắp xếp người

LÍ THUYẾT

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để:

① Cả 3 em đều là học sinh giỏi. **ĐS:** $\frac{2}{145}$

② Có ít nhất 1 học sinh giỏi. **ĐS:** $\frac{18}{29}$

③ Không có học sinh trung bình. **ĐS:** $\frac{253}{580}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$.

① Gọi A là biến cố: "Cả 3 em được chọn đều là học sinh giỏi", ta có $n(A) = C_8^3 = 56$.
Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{145}$.

② Gọi B là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn có ít nhất 1 học sinh giỏi".
Suy ra $\overline{B}$ là biến cố "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh giỏi", ta có $n(\overline{B}) = C_{22}^3 = 1540$.
Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \frac{18}{29}$.

③ Gọi C là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh trung bình", ta có $n(C) = C_{23}^3 = 1771$.
Vậy xác suất của biến cố C là: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{253}{580}$.

□

VÍ DỤ 2. Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người đi công tác. Tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn. **ĐS:** $\frac{3}{7}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{16}^4 = 1820$.
Gọi A là biến cố: "Trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn".
Trường hợp 1: Số cách chọn 4 người trong đó có 2 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là: $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 420$.
Trường hợp 2: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 2 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là: $C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 = 240$.
Trường hợp 3: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 2 nhà hóa học là: $C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 120$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 780$.
Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{7}$.

□

VÍ DỤ 3. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ. **ĐS:** $\dfrac{4615}{5236}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^{4} = 52360$.
Gọi A là biến cố: "4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ".
Trường hợp 1: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 3 học sinh nam, 1 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{3} \cdot \mathrm{C}_{15}^{1} = 17100$
Trường hợp 2: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 2 học sinh nam, 2 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{2} = 19950$.
Trường hợp 3: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 1 học sinh nam, 3 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 9100$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{20}^{3}.\mathrm{C}_{15}^{1} + \mathrm{C}_{20}^{2}.\mathrm{C}_{15}^{2} + \mathrm{C}_{20}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 46150$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4615}{5236}$. □

VÍ DỤ 4. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam. **ĐS:** $\dfrac{12}{143}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{8} = 6435$.
Gọi A là biến cố: "8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam".
Trường hợp 1: 2 học sinh nam và 6 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{6} = 36$.
Trường hợp 2: 3 học sinh nam và 5 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{6}^{5} = 504$.
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{6} + \mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{6}^{5} = 540$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{143}$. □

VÍ DỤ 5. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam. **ĐS:** $\dfrac{325}{506}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^{5} = 53130$.
Gọi A là biến cố: "5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam".
Trường hợp 1: 1 học sinh nữ và 4 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{4} = 13650$.
Trường hợp 2: 2 học sinh nữ và 3 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 20475$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{4} + \mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 34125$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{325}{506}$. □

J BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ. **ĐS:** $\dfrac{38}{39}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{4} = 1365$.
Gọi A là biến cố: "4 người được chọn có ít nhất một nữ".
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố: "4 người được chọn không có nữ nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{7}^{4} = 35$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{38}{39}$. □

BÀI 2. Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tốp ca chào mừng ngày 22 tháng 12. Tính xác suất sao cho trong tốp ca có ít nhất một học sinh nữ. **ĐS:** $\dfrac{2273}{2387}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^{5} = 324632$.
Gọi A là biến cố: "5 người được chọn có ít nhất một nữ".
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố:"5 người được chọn không có nữ nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{20}^{5} = 15504$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{2273}{2387}$. □

BÀI 3. Một đội văn nghệ của trường THPT Năng Khiếu gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tốp ca. Tính xác suất để tốp ca có ít nhất 3 học sinh nữ. **ĐS:** $\dfrac{82}{143}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{8} = 6435$.
Gọi A là biến cố: "có ít nhất 3 học sinh nữ được chọn"
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố:"có không quá 2 học sinh nữ được chọn"
Trường hợp 1: không có học sinh nữ nào được chọn: $\mathrm{C}_{10}^{8} = 45$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nữ và 7 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{10}^{7} = 600$.
Trường hợp 3: 2 học sinh nữ và 6 học nam được chọn: $\mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{10}^{6} = 2100$.
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{10}^{8} + \mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{10}^{7} + \mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{10}^{6} = 2745$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{82}{143}$. □

BÀI 4. Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam. **ĐS:** $\dfrac{281}{462}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^{5} = 462$.
Gọi A là biến cố "5 học sinh được chọn có nhiều nhất 2 học sinh nam".
Trường hợp 1: không có học sinh nam nào được chọn: $\mathrm{C}_{6}^{5} = 6$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{6}^{4} = 75$.
Trường hợp 3: 2 học sinh nam và 3 học nữ được chọn: $\mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{3} = 200$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{6}^{5} + \mathrm{C}_{5}^{1} \cdot \mathrm{C}_{6}^{4} + \mathrm{C}_{5}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{3} = 281$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{281}{462}$. □

BÀI 5. Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2017 tại trường THPT X có 13 học sinh đạt điểm 9,0 môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12. **ĐS:** $\dfrac{9}{286}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^{3} = 286$.
Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12".
Trường hợp 1: 1 học sinh nam khối 11 và 2 học sinh nữ khối 12: $\mathrm{C}_{2}^{1} \cdot \mathrm{C}_{3}^{2} = 6$.
Trường hợp 2: 2 học sinh nam khối 11 và 1 học sinh nữ khối 12 được chọn: $\mathrm{C}_{2}^{2} \cdot \mathrm{C}_{3}^{1} = 3$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{2}^{1} \cdot \mathrm{C}_{3}^{2} + \mathrm{C}_{2}^{2} \cdot \mathrm{C}_{3}^{1} = 9$
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{9}{286}$. □

BÀI 6. Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ ? **ĐS:** $\dfrac{26}{49}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{7}^{1} \cdot \mathrm{C}_{7}^{1} = 49$.
Gọi A là biến cố: "Hai học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả tổ một và tổ hai "
Trường hợp 1: 1 học sinh nam tổ một và 1 học sinh nữ tổ hai: $\mathrm{C}_{3}^{1} \cdot \mathrm{C}_{2}^{1} = 6$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nữ tổ một và 1 học sinh nam tổ hai: $\mathrm{C}_{4}^{1} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1} = 20$
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{3}^{1} \cdot \mathrm{C}_{2}^{1} + \mathrm{C}_{4}^{1} \cdot \mathrm{C}_{5}^{1} = 26$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{26}{49}$. □

BÀI 7. Trong một tổ của lớp 12A có 12 học sinh gồm có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, trong đó có A (nam) là tổ trưởng và B (nữ) là tổ phó. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổ để tham gia hoạt động tập thể của trường nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Tính xác suất để sao cho nhóm học sinh được chọn có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ, trong đó phải có bạn A hoặc bạn B nhưng không có cả hai **ĐS:** $P = \dfrac{85}{396}$.

Lời giải.
Không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{12}^{5}$.
Ta xét hai trường hợp xảy ra cho yêu cầu bài toán là

- **TH1:** Có bạn A nhưng không có bạn B, khi đó ta cần chọn thêm 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Vậy có $\mathrm{C}_{6}^{2} \times \mathrm{C}_{4}^{2}$ cách chọn.
- **TH1:** Có bạn B nhưng không có bạn A, khi đó ta cần chọn thêm 3 học sinh nam và 1 học sinh nữ. Vậy có $\mathrm{C}_{6}^{3} \times \mathrm{C}_{4}^{1}$ cách chọn.

Vậy số cách chọn để yêu cầu bài toán thỏa mãn là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_{6}^{2} \times \mathrm{C}_{4}^{2} + \mathrm{C}_{6}^{3} \times \mathrm{C}_{4}^{1} = 170$.
Vậy ta suy ra xác suất cần tìm là $P = \dfrac{170}{\mathrm{C}_{12}^{5}} = \dfrac{85}{396}$. □

BÀI 8. Một đồn cảnh sát gồm có 9 người, trong đó có 2 trung tá An và Bình. Trong một nhiệm vụ cần huy động 3 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm C, 2 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm D và 4 đồng chí còn lại trực ở đồn. Tính xác suất sao cho hai trung tá An và Bình không ở cùng một khu vực làm nhiệm vụ. **ĐS:** $P = \dfrac{13}{18}$.

Lời giải.
Số cách chia 9 người ra làm việc ở ba địa điểm là $\mathrm{C}_{9}^{3} \times \mathrm{C}_{6}^{2} \times \mathrm{C}_{4}^{4}$.
Xét tình huống hai trung tá An và Bình cùng làm việc ở một địa điểm, ta có ba trường hợp

— **TH1:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm C, ta có $C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4$.

— **TH2:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm D, ta có $C_7^3 \times C_4^4$.

— **TH3:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm E, ta có $C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2$.

Vậy xác suất để phân công nhiệm vụ sao cho An và Bình không làm chung ở một địa điểm là

$$P = 1 - \frac{C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2}{C_9^3 \times C_6^2 \times C_4^4} = \frac{13}{18}.$$

□

BÀI 9. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang, trong 8 bạn có hai bạn tên An và Bình. Tìm xác suất sao cho

① Nam nữ ngồi xen kẽ nhau. **ĐS:** $P_1 = \frac{1}{35}$.

② Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_2 = \frac{1}{14}$.

③ Đầu ghế và cuối ghế bắt buộc phải là nam. **ĐS:** $P_3 = \frac{3}{14}$.

④ Tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_4 = \frac{13}{14}$.

⑤ Hai đầu ghế phải khác giới. **ĐS:** $P_5 = \frac{4}{7}$.

⑥ Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_6 = \frac{1}{35}$.

⑦ An và Bình luôn ngồi gần nhau. **ĐS:** $P_7 = \frac{1}{4}$.

⑧ An và bình không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_8 = \frac{3}{4}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ một cách tùy ý cho 8 bạn là 8! cách.

① Để các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta có $2 \times 4! \times 4!$ cách, suy ra xác suất là

$$P_1 = \frac{2 \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{1}{35}.$$

② Xem bốn bạn nam là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nữ thì có 5! cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nam, có 4! cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng $5! \times 4!$ cách xếp để bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau. Suy ra xác suất là $P_2 = \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{1}{14}$.

③ Để chọn hai bạn nam cho vị trí đầu và cuối, ta có A_4^2 cách, xếp 6 bạn còn lại vào các vị trí ở giữa, ta có 6! cách xếp. Vậy có $A_4^2 \times 6!$ cách, suy ra xác suất là $P_3 = \frac{A_4^2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{14}$.

④ Xem bốn bạn nữ là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nam thì có 5! cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nữ, có 4! cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng $5! \times 4!$ cách xếp để bốn bạn nữ ngồi cạnh nhau. Suy ra xác suất để tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau là $P_4 = 1 - \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{13}{14}$.

⑤ Hai đầu ghế khác giới nên có hai trường hợp xảy ra, vậy có $2 \times 4 \times 4$ cách xếp cho hai ghế đầu. Các ghế còn lại có 6! cách xếp, vậy nên có $2 \times 4 \times 4 \times 6!$ cách xếp.
Suy ra xác suất là $P_5 = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 6!}{8!} = \frac{4}{7}$.

⑥ Xem bốn bạn nam là một nhóm, bốn bạn nữ là một nhóm, xếp hai nhóm đó ta có 2! cách xếp, ở mỗi nhóm, có 4! cách xếp chỗ các thành viên trong đó, nên tổng cộng có $2! \times 4! \times 4!$ cách xếp.
Suy ra xác suất là $P_6 = \dfrac{2! \times 4! \times 4!}{8!} = \dfrac{1}{35}$.

⑦ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có 7! cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có 2! cách xếp. Vậy tổng cộng có $7! \times 2!$ cách xếp, suy ra xác suất là $P_7 = \dfrac{7! \times 2!}{8!} = \dfrac{1}{4}$.

⑧ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có 7! cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có 2! cách xếp. Vậy tổng cộng có $7! \times 2!$ cách xếp, suy ra xác suất để An và Bình không ngồi cạnh nhau là $P_8 = 1 - \dfrac{7! \times 2!}{8!} = \dfrac{3}{4}$.

□

BÀI 10. Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người phụ nữ và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho

① Đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{15}$.

② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người là 6! cách.

① Để đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông, có 4! cách.
Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có 2! cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.
Vậy có $4! \times 2!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là $P_1 = \dfrac{4! \times 2!}{6!} = \dfrac{1}{15}$.

② Để đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có A_3^2 cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có 4! cách.
Vậy có $A_3^2 \times 4!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là $P_2 = \dfrac{A_3^2 \times 4!}{6!} = \dfrac{1}{5}$.

□

K BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 11. Trong giờ Thể dục, tổ I lớp 11A có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam. **ĐS:** $P = \dfrac{7}{22}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là 12! cách.
Để người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là nam, ta có A_7^2 cách chọn học sinh xếp vào hai vị trí đó.
Các học sinh còn lại được xếp vào giữa, có 10! cách xếp.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{A_7^2 \times 10!}{12!} = \dfrac{7}{22}$. □

BÀI 12. Đội tuyển học sinh giỏi của trường THPT X có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho hai học sinh nữ không đứng cạnh nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{14}{55}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là 12! cách.
Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có 8! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có A_9^4 cách xếp các bạn nữ.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{8! \times \mathrm{A}_9^4}{12!} = \dfrac{14}{55}$. □

BÀI 13. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 5 học sinh đó là 5! cách.
Ta xem hai học sinh nữ là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn nam, ta có 4! cách xếp.
Trong nhóm hai học sinh nữ, hai bạn có 2! cách để đổi chỗ cho nhau.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{4! \times 2!}{5!} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI 14. Một tổ học sinh có 5 em nữ và 8 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có hai em nữ nào đứng cạnh nhau? **ĐS:** $P = \dfrac{14}{143}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 13 học sinh đó là 13! cách.
Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có 8! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có A_9^5 cách xếp các bạn nữ.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{8! \times \mathrm{A}_9^5}{13!} = \dfrac{14}{143}$. □

BÀI 15. Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A và B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A và B. **ĐS:** $P = \dfrac{5}{21}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 9 học sinh đó là 9! cách.
Ta xếp 5 học sinh nam vào hàng ngang, có 5! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 6 vị trí để các bạn nữ có thể đứng.
Xét hai bạn A và B là một nhóm, ta có có A_6^4 cách xếp các bạn nữ. Ở tại vị trí nhóm hai bạn A và B đứng, hai bạn có 2! cách đổi chỗ cho nhau, nên có tất cả $\mathrm{A}_6^4 \times 2!$ cách xếp nữ thỏa yêu cầu bài toán.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{5! \times \mathrm{A}_6^4 \times 2!}{9!} = \dfrac{5}{21}$. □

BÀI 16. Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho:

① Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{10}$.

② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{3}{10}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người lên bàn tròn là 5! cách.

① Để đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông vào bàn tròn, có 3! cách.
Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có 2! cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.
Vậy có $3! \times 2!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là $P_1 = \dfrac{3! \times 2!}{5!} = \dfrac{1}{10}$.

② Để đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có A_3^2 cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có 3! cách.
Vậy có $A_3^2 \times 3!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là $P = \dfrac{A_3^2 \times 3!}{5!} = \dfrac{3}{10}$.

□

BÀI 17. Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh một bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{126}$.

Lời giải.
Số cách ngồi tùy ý của 10 bạn là $|\Omega| = 9!$.
Để xếp chỗ cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta làm qua hai bước là

— Xếp 5 bạn nam vào bàn tròn, ta có 4! cách xếp.

— Để xếp các bạn nữ xen kẽ với các bạn nam, ta xếp các bạn nữ ngồi xen kẽ vào giữa các bạn nam, vì thế có 5! cách xếp các bạn nữ.

Vậy nên ta có $4! \times 5!$ cách xếp thỏa bài toán, suy ra xác suất cần tìm là $\mathrm{P} = \dfrac{4! \times 5!}{9!} = \dfrac{1}{126}$. □

BÀI 18. Trong một giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh – sinh viên có 8 người tham gia, trong đó có hai bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng bằng việc bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu. **ĐS:** $P = \dfrac{3}{7}$.

Lời giải.
Số cách chia 8 người thành hai bảng đấu một cách tùy ý là $C_8^4 \times C_4^4$.
Để A và B cùng thuộc vào một bảng đấu, ta làm các bước sau

— Chọn bảng đấu có cả A và B trong đó, ta có 2 cách để chọn.

— Trong bảng đã có A và B, chọn thêm hai người nữa, ta có C_6^2 cách chọn.

— Bốn người còn lại ở bảng còn lại nên có 1 cách chọn.

Vậy có $2 \times C_6^2$ cách chia bảng để A và B thuộc cùng một bảng đấu, suy ra xác suất là $P = \dfrac{2 \times C_6^2}{C_8^4 \times C_4^4} = \dfrac{3}{7}$.

□

BÀI 19. Chuẩn bị đón tết Bính Thân 2016, đội thanh niên tình nguyện của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sĩ huyện. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng một nữ. **ĐS:** $P = \dfrac{9}{28}$.

Lời giải.
Số cách chia ba nhóm làm việc là $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách.
Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ hai bạn nam và một bạn nữ.
Vậy nên có $C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1$ cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1}{C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3} = \frac{9}{28}.$$

□

BÀI 20. Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng A, B, C, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng Việt Nam ở 3 bảng khác nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{16}{55}$.

Lời giải.
Số cách chia 12 đội thành ba bảng đấu một cách tùy ý là $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$.
Để ba đội bóng Việt Nam thuộc vào ba bảng đấu khác nhau, ta làm các bước sau

— Chia ba đội Việt Nam ra ba bảng đấu, ta có 3! cách chia.

— Trong mỗi bảng chọn thêm ba đội nữa, ta có $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách chọn.

Vậy có $3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách chia bảng để các đội Việt Nam thuộc ba bảng đấu khác nhau, suy ra xác suất là $P = \dfrac{3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \dfrac{16}{55}$. □

BÀI 21. Trong cuộc thi "Tìm kiếm tài năng Việt", có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí thi đấu, ban tổ chức chia thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{3876}$.

Lời giải.
Số cách chia 20 bạn thành bốn nhóm một cách tùy ý là $C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$.
Để cả 5 bạn nữ cùng thuộc một nhóm, ta làm các bước sau

— Ta có 4 cách chọn nhóm cho 5 bạn nữ.

— Chọn thêm ba nhóm nữa, ta có $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$ cách chọn.

Vậy có $4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$ cách chia nhóm để các bạn nữ thuộc cùng một nhóm, suy ra xác suất là $P = \dfrac{4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5}{C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5} = \dfrac{1}{3876}$. □

BÀI 22. Để chuẩn bị tiêm phòng dịch Sởi – Rubella cho học sinh khối 11 và khối 12. Bệnh viện tỉnh A điều động 12 bác sỹ đến trường THPT B để tiêm phòng dịch gồm 9 bác sỹ nam và 3 bác sỹ nữ. Ban chỉ đạo chia 12 bác sỹ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 bác sỹ làm 3 công việc khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng một bác sỹ nữ. **ĐS:** $P = \dfrac{16}{55}$.

Lời giải.
Số cách chia ba nhóm làm việc là $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$ cách.
Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ ba bác sĩ nam và một bác sĩ nữ.
Vậy nên có $C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1$ cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

□

BÀI 23. Trong một giải thể thao cấp toàn quốc, có 17 thí sinh tham gia và trong đó có 5 thí sinh nữ. Ban tổ chức tiến hành chia thí sinh vào hai bảng A và B, mỗi bảng có 8 thí sinh, còn lại 1 thí sinh được đặc cách vào vòng trong. Tính xác suất để thí sinh được đặc cách là nữ và 4 thí sinh nữ còn lại đều nằm ở bảng A. **ĐS:** $P = \dfrac{5}{442}$.

Lời giải.
Số cách chia bảng tùy ý là $C_{17}^8 \times C_9^8$.
Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

— Chọn thí sinh được đặc cách, ta có 5 cách chọn.

— Chọn thêm 4 thí sinh cho bảng A, ta có C_{12}^4 cách chọn. Khi đó các thí sinh nam còn lại sẽ vào bảng B.

Vậy có $5 \times C_{12}^4$ cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là $P = \dfrac{5 \times C_{12}^4}{C_{17}^8 \times C_9^8} = \dfrac{5}{442}$. □

BÀI 24. Trong một buổi giao lưu văn nghệ, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Văn, 2 giáo viên Ngoại Ngữ đăng kí hát song ca. Nhằm tạo không khí giao lưu thân mật, ban tổ chức tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên được chia thành 5 cặp được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 5. Tính xác suất để cả 5 cặp đều gồm 2 giáo viên dạy khác môn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{945}$.

Lời giải.
Số cách chia thành 5 cặp tùy ý là $C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2$.
Để mỗi cặp đều là hai giáo viên khác môn thì mỗi giáo viên Toán sẽ hát chung với mốn khác. Vậy có 5! cách chia 5 giáo viên môn Văn và Ngoại Ngữ hát chung với 5 giáo viên Toán.
Suy ra xác suất là $P = \dfrac{5!}{C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2} = \dfrac{1}{945}$. □

BÀI 25. Trong một giải quần vợt quốc tế, có 16 vận động viên mà trong đó có 3 vận động viên là các "hạt giống" số 1, 2, 3 của mùa giải. Vận động viên X là một trong số 16 vận động viên đó và không phải là hạt giống. Ban tổ chức chia ngẫu nhiên các vận động viên vào bốn bảng A, B, C, D, và mỗi bảng có 4 vận động viên. Tính xác suất để X không chung bảng với bất kì vận động viên hạt giống nào. **ĐS:** $P = \dfrac{41}{91}$.

Lời giải.
Số cách chia bảng tùy ý là $C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$.
Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

— Ta có 4 cách chọn bảng cho thí sinh X.

— Chọn thêm 3 thí sinh cho bảng của thí sinh X, ta có C_{12}^3 cách chọn.

— Ta chia các vận động viên còn lại (có cả A, B, C, D) thành ba nhóm, có $C_{12}^4 \times C_8^4 \times \frac{4}{4}$ cách chia.

Vậy có $4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times \frac{4}{4}$ cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là

$$P = \frac{4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4}{C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{44}{91}.$$

□

BÀI 26. Một tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau, mỗi toa còn ít nhất 12 chổ trống. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau

① Tất cả cùng lên toa thứ II. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{531441}$.

② Tất cả cùng lên một toa. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{1}{177147}$.

③ Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III. **ĐS:** $P_3 = \dfrac{3080}{59049}$.

④ Toa I có 4 người. **ĐS:** $P_4 = \dfrac{C_{12}^4 \times 2^8}{3^{12}} \approx 0{,}238$.

⑤ Hai hành khách A và B cùng lên một toa. **ĐS:** $P_5 = \dfrac{1}{3}$.

⑥ Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người. **ĐS:** $P_6 = \dfrac{6160}{19683}$.

Lời giải.
Số cách chọn toa để ngồi một cách tùy ý của các hành khách là 3^{12}.

① Để tất cả cùng lên toa thứ II, ta có đúng 1 cách chọn, suy ra xác suất là $P_1 = \dfrac{1}{3^{12}} = \dfrac{1}{531441}$.

② Để tất cả cùng lên một toa, ta có 3 cách chọn, suy ra xác suất là $P_2 = \dfrac{3}{3^{12}} = \dfrac{1}{177147}$.

③ Ta có C_{12}^4 cách chọn 4 hành khách cho toa I, có C_8^5 cách chọn 5 hành khách cho toa II, còn lại ngồi vào toa thứ III.
Vậy có $C_{12}^4 \times C_8^5$ cách xếp chỗ, suy ra xác suất là $P_3 = \dfrac{C_{12}^4 \times C_8^5}{3^{12}} = \dfrac{3080}{59049}$.

④ Ta có C_{12}^4 cách chọn 4 hành khách cho toa I, các hành khách còn lại ngồi tùy ý ở toa thứ II và thứ III nên có 2^8 cách chọn.
Vậy có $C_{12}^4 \times 2^8$ cách xếp chỗ, suy ra xác suất là $P_4 = \dfrac{C_{12}^4 \times 2^8}{3^{12}}$.

⑤ Để chọn toa cho hai hành khách A và B, ta có 3 cách chọn. Các hành khách còn lại lên tàu một cách tùy ý nên có 3^{10} cách chọn. Suy ra xác suất là $P_5 = \dfrac{3 \times 3^{10}}{3^{12}} = \dfrac{1}{3}$.

⑥ Để chia 12 người ra thành ba nhóm như đề bài, ta có $C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3$. Phân phối các nhóm người đó lên ba toa tàu, ta có 3! cách. Suy ra xác suất là $P_6 = \dfrac{C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3 \times 3!}{3^{12}} = \dfrac{6160}{19683}$.

□

BÀI 27. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho

① Nam nữ ngồi đối diện nhau. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{8}{35}$. ② Nữ ngồi đối diện nhau. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{6}{35}$.

Lời giải.
Xem hai dãy ghế đối diện nhau lần lượt là A_1, B_1, C_1, D_1 và A_2, B_2, C_2, D_2.
Số cách xếp tùy ý 8 bạn vào hai dãy ghế là 8! cách.

① — Vị trí A_1 có 8 cách chọn, suy ra vị trí A_2 có 4 cách chọn.
— Vị trí B_1 có 6 cách chọn, suy ra vị trí B_2 có 3 cách chọn.
— Vị trí C_1 có 4 cách chọn, suy ra vị trí C_2 có 2 cách chọn.
— Vị trí D_1 có 2 cách chọn, suy ra vị trí D_2 có 1 cách chọn.
Vậy xác suất là $P_1 = \dfrac{8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1}{8!} = \dfrac{8}{35}$.

② Do nữ ngồi đối diện nhau nên hai nam cũng ngồi đối diện nhau
— Chọn hai cặp vị trí đối diện nhau cho nữ ngồi, ta có A_4^2 cách, sau đó, ta có 4! cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí đó.
— Ở các vị trí còn lại là dành cho nam, ta có 4! cách xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí đó.
Vậy xác suất là $P_2 = \dfrac{A_4^2 \times 4! \times 4!}{8!} = \dfrac{6}{35}$.

□

DẠNG 4.3. Chọn hoặc sắp xếp số

L LÍ THUYẾT

• **Một số kiến thức liên quan**

① Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 2 \Leftrightarrow$ chữ số hàng đơn vị của m là chữa số chẵn.

② Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 5 \Leftrightarrow$ chữ số hàng đơn vị của m bằng 0 hoặc bằng 5.

③ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 4 \Leftrightarrow$ hai chữ số cuối tạo thành số chia hết cho 4.

④ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 3 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số của m chia hết cho 3.

⑤ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 9 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số của m chia hết cho 9.

⑥ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 11 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng chẵn bằng tổng các chữ số ở hàng lẻ (tính từ trái qua phải).

⑦ Cho $m \in \mathbb{N}$, m được phân tích thành thừa số nguyên tố dạng $m = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$.
Khi đó mỗi ước số của m ứng với một bộ $(j_1; j_2; \ldots; j_n)$ trong đó $0 \leq j_1 \leq i_1; \ldots; 0 \leq j_n \leq i_n$.

⑧ Số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n = m, (m, n \in \mathbb{N}, n \leq m)$$

là C_{m-1}^{n-1}.

⑨ Mỗi bộ n số thực luôn có duy nhất một cách sắp xếp thứ tự từ bé đến lớn.

⑩ Cho n là số tự nhiên khác 0, tập số tự nhiên N được phân lớp thành các tập:
+ X_0 gồm các số chia m hết cho n, $m = k \cdot n, k \in \mathbb{N}$.
+ X_1 gồm các số tự nhiên m chia n dư 1, $m = k \cdot n + 1, k \in \mathbb{N}$.
...
+ X_{n-1} gồm các số tự nhiên m chia n dư $n-1$, $m = k(n-1), k \in \mathbb{N}$.

M VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau đôi một được lập từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của A. Tính xác suất để phần tử đó là số chẵn. **ĐS:** $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abc}$ là số thuộc vào tập A, ta có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập A là 120 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số chẵn thuộc vào tập A, ta có $3 \times \mathrm{A}_5^2 = 60$ số như vậy.
Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được là số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{3}{7}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abc}$ là số thuộc vào tập S, ta có $\mathrm{A}_7^3 = 210$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập S là 210 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập S, ta có $3 \times \mathrm{A}_6^2 = 90$ số như vậy.
Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}$. □

VÍ DỤ 3. Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên từ A hai phần tử. Tính xác suất để hai phần tử được lấy ra từ A có một số chẵn và một số lẻ. **ĐS:** $P = \dfrac{175}{719}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số thuộc vào tập A, ta có $6 \times \mathrm{A}_6^3 = 720$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý hai số tùy ý từ tập A là A_{720}^2 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số lẻ thuộc vào tập A, ta có $3 \times 5 \times \mathrm{A}_5^2 = 300$ số, vậy có $720 - 300 = 420$ số chẵn trong tập A.
Suy ra xác suất để chọn được hai số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{300 \times 420}{\mathrm{A}_{720}^2} = \dfrac{175}{719}$. □

VÍ DỤ 4. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{26}$.

Lời giải

Số cách chọn tùy ý 4 thẻ là C_{16}^4 cách.
Do có 8 số chẵn trong các số từ 1 đế 16 nên để chọn được 4 thẻ đánh số chẵn, ta có C_8^4 cách.
Suy ra xác suất để chọn được 4 thẻ mang số chẵn là $P = \dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{C}_{16}^4} = \dfrac{1}{26}$. □

VÍ DỤ 5. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử của X. Tính xác suất để hai số lấy được đều là số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi $\overline{ab}$ là số thuộc vào tập X, ta có $6 \times 6 = 36$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý hai số từ tập X là C_{36}^2.
Gọi $\overline{cd}$ là các số chẵn thuộc vào tập X.

— **TH1:** Số có dạng $\overline{c0}$, ta có 6 số như vậy.

— **TH2:** Xét $d \neq 0$, ta có $3 \times 5 = 15$ số như vậy.

Vậy có $6 + 15 = 21$ số chẵn trong tập hợp X.

Suy ra xác suất để chọn được hai số chẵn từ tập X là $P = \dfrac{C_{21}^2}{C_{36}^2} = \dfrac{1}{3}$. □

VÍ DỤ 6. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm có 2 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là chữ số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{2}{9}$.

Lời giải

Gọi $\overline{ab}$ là số thuộc vào tập S, ta có $9 \times 10 = 90$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập S là 90 cách.
Gọi $\overline{cd}$ là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập S, ta có $4 \times 5 = 20$ số như vậy.
Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{20}{90} = \dfrac{2}{9}$. □

VÍ DỤ 7. Cho E là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau đôi một được lấy từ: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E. Tính xác suất để phần tử được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn. **ĐS:** $\dfrac{1}{25}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E". Gọi A là biến cố "số được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn". Giả sử số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{abc}$, ta có

— a có 5 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn. Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

— Số được chọn $(\overline{abc})$ có 3 chữ số đều chẵn lấy từ các số $\{0, 2, 4\}$. Do đó a có 2 cách chọn, b có 2 cách chọn và c có 1 cách chọn. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Vậy xác suất để chọn được số có 3 chữ số đều chẵn từ E là $\dfrac{1}{25}$. □

VÍ DỤ 8. Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ). Tính xác suất lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{3}{4}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ)". Gọi A là biến cố "lấy được hai thẻ có tích hai số trên hai thẻ là số chẵn". Để có thể lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn, ta có các trường hợp sau đây:

— Hai thẻ lấy ra đều là thẻ chẵn, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ chẵn, hộp thứ hai là thẻ lẻ, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ lẻ, hộp thứ hai là thẻ chẵn, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 25 + 25 + 25 = 75$.

Lại có, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 10 \cdot 10 = 100$.
Suy ra, xác suất cần tìm:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Vậy xác suất để lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn là $\frac{3}{4}$. □

VÍ DỤ 9. Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn. **ĐS:** $\frac{13}{18}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau". Gọi A là biến cố "lấy được hai thẻ có tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn". Ta có

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_9^2 = 36$.

Trong hai thẻ lấy ra, ta xét các trường hợp sau đây:

— Một thẻ lẻ và một thẻ chẵn, có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 20$ (cách).

— Hai thẻ đều mang số chẵn, có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ (cách).

— Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 26$.

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

□

VÍ DỤ 10. Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Tích xác suất để tích 2 số được chọn là số chẵn. **ĐS:** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S". Gọi A là biến cố "tích 2 số được chọn là số chẵn". Giả sử số có hai chữ số thuộc S có dạng $\overline{ab}$. Ta có:

— Số phần tử của S là $n_S = 6 \cdot 6 = 36$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{36}^2 = 630$.

— Số các số chẵn thuộc S (xét hai trường hợp $b = 0$ và $b \neq 0$) là $6 + 5 \cdot 3 = 21$.

— Số các số lẻ thuộc S là $36 - 21 = 15$.

Trong hai số được chọn, ta xét các trường hợp sau:

— Có một số chẵn và một số lẻ, có $\mathrm{C}_{21}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 = 315$ (cách).

— Có hai số chẵn, có $\mathrm{C}_{21}^2 = 210$ (cách).

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 315 + 210 = 525$.

Xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{525}{630} = \frac{5}{6}.$$

□

N BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ. **ĐS:** $\frac{10}{21}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ tập X". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu bằng số cách đưa 9 số vào 6 chỗ nên $n_\Omega = \mathrm{A}_9^6 = 60480$. Gọi A là biến cố "số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ".

— Chọn 3 số lẻ đôi một từ các số $1, 3, 5, 7, 9$ có C_5^3 (cách).

— Chọn 3 số chẵn đôi một khác nhau từ các số $2, 4, 6, 8$ có C_4^3 (cách).

— Sắp xếp các chữ số trên để được số thỏa mãn biến cố A có $6!$ (cách).

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6! = 28800$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{28800}{60048} = \frac{10}{21}$. □

BÀI 2. Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2. **ĐS:** $\frac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 100 tấm thẻ". Khi đó: $n_\Omega = \mathrm{C}_{100}^3 = 161700$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2". Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó $\begin{cases} 1 \leq x, y, z \leq 100 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 2. \end{cases}$
Từ 1 đến 100 có 50 số chia hết cho 2 (N_1), 50 số chia cho 2 dư 1. Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1 có: $\mathrm{C}_{50}^3 = 19600$ (cách).

— Trong 3 số x, y, z có một số chia hết chia 2 và 2 số chia 2 dư 1, có: $\mathrm{C}_{50}^1 \cdot \mathrm{C}_{50}^2 = 61250$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 19600 + 61250 = 80850$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{80850}{161700} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 3. Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{127}{380}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 40 tấm thẻ". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{40}^3 = 9880$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 3".

Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó $\begin{cases} 1 \le x, y, z \le 40 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 40 có 13 số chia hết cho 3 (N_1), 14 số chia cho 3 dư 1 (N_2), 13 số chia cho 3 dư 2 (N_3). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1, N_2 hoặc N_3 có: $\mathrm{C}_{13}^3 + \mathrm{C}_{14}^3 + \mathrm{C}_{13}^3 = 936$ (cách).

— 3 số x, y, z mỗi số thuộc một loại, có: $\mathrm{C}_{13}^1 \cdot \mathrm{C}_{14}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^1 = 2366$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 936 + 2366 = 3302$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{3302}{9880} = \dfrac{127}{380}$. □

BÀI 4. Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{796}{2450}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba viên bi từ 50 viên bi". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{50}^3 = 19600$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3".

Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba viên bi chọn được. Khi đó: $\begin{cases} 1 \le x, y, z \le 50 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 50 có 16 số chia hết cho 3 (N_1), 17 số chia cho 3 dư 1 (N_2), 16 số chia cho 3 dư 2 (N_3). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1, N_2 hoặc N_3 có: $\mathrm{C}_{16}^3 + \mathrm{C}_{17}^3 + \mathrm{C}_{16}^3 = 1800$ (cách).

— 3 số x, y, z mỗi số thuộc một loại, có: $\mathrm{C}_{16}^1 \cdot \mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{16}^1 = 4352$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 1800 + 4352 = 6152$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6152}{19600} = \dfrac{796}{2450}$. □

BÀI 5. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm có 4 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lấy ngẫu nhiên từ tập X một số. Hãy tính xác suất để lấy được số tự nhiên từ tập X có tổng các chữ số bằng 14. **ĐS:** $\dfrac{1}{5}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên từ tập X một số", gọi A là biến cố "số được chọn có tổng các chữ số bằng 14. Ta có

— Số phần tử của tập X là $\mathrm{A}_6^4 = 360$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{360}^1 = 360$.

— Để tổng các chữ số của số được chọn bằng 14, ta có các bộ số: $\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 4! + 4! + 4! = 72$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{72}{360} = \dfrac{1}{5}$. □

BÀI 6. Chọn ngẫu nhiên 3 số bất kỳ từ tập $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12. **ĐS:** $\dfrac{14}{55}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba số từ tập S". Gọi A là biến cố "tổng các số được được chọn là có tổng bằng 12". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{11}^3 = 165$.

— Để tổng của ba số được chọn bằng 12, ta có các bộ số: $\{1,2,9\}$, $\{1,3,8\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,4,5\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 7 \cdot 3! = 42$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{42}{165} = \dfrac{14}{55}$.

□

BÀI 7. Cho tập hợp $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ và M là tập hợp tất cả các số gồm 2 chữ số phân biệt thuộc tập E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn có giá trị lớn hơn 7. **ĐS:** $\dfrac{2}{5}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số thuộc M", gọi A là biến cố "tổng của hai chữ số của số được chọn lớn hơn 7". Ta có:

— Số phần tử của M là $\mathrm{A}_6^2 = 30$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{30}^1 = 30$.

— Để tổng các chữ số của số được chọn lớn hơn 7, ta có các bộ số: $\{2,6\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{5,6\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 6 \cdot 2! = 12$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI 8. E là tập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lấy từ các số $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Lấy ngẫu nhiên một số trong E tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{13}{49}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 5". Gọi số có 5 chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_8^5 - \mathrm{A}_7^4 = 5880$.

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

  – a_5 là 5, a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 6 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn.
  – a_5 là 0, a_1 có 7 cách chọn, a_2 có 6 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1560$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{1560}{5880} = \dfrac{13}{49}$. □

BÀI 9. Gọi E là tập hợp số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được lập từ các số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5. **ĐS:** 0,488

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên có 3 chữ số lập từ $\{1,2,3,4,5\}$", gọi A là biến cố "hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5". Gọi số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$. Ta có:

— Số phần tử của E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{60}^2 = 1770$.

— Chọn một trong ba vị trí để đưa số 5 vào có 3 cách chọn. Đưa 4 số còn lại vào 2 vị trí có A_4^2 cách. Do đó, có tất cả $3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 36$ số thuộc E mà có mặt chữ số 5

— Để một số có ba chữ số từ E là số **không** có mặt 5, ta có: a_1, a_2, a_3 là các số thuộc $\{1,2,3,4\}$. Do đó, có tất cả $\mathrm{A}_4^3 = 24$ số.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $\mathrm{C}_{36}^1 \cdot \mathrm{C}_{24}^1 = 864$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{864}{1770} = \dfrac{144}{295} \approx 0{,}488$. □

BÀI 10. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,2,3,4,7$. Tập E có bao nhiêu phần tử? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của E, tính xác suất được chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{2}{5}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ $\{1,2,3,4,7\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 3". Gọi số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$. Ta có:

— Số phần tử của E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{60}^1 = 60$.

Gọi x, y, z là ba số trong số được chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $\begin{cases} x,y,z \in \{1,2,3,4,7\} \\ x+y+z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$
Ta có:

— Có 4 bộ số: $\{1,2,3\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,7\}$ lập thành số có 3 chữ số chia hết cho 3.

— Đưa mỗi bộ số vào ba chỗ $\overline{a_1a_2a_3}$ có 3! cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $4 \cdot 3! = 24$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 11. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10. **ĐS:** 0,148

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 30 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{30}^{10} = 30045015$.

— Trong 30 tấm thẻ đã cho có 15 tấm thẻ lẻ, 12 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 10, 3 tấm thẻ chẵn chia hết cho 10.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{15}^{5} \cdot C_{12}^{4} \cdot C_{3}^{1} = 4459455$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{4459455}{300450015} = \dfrac{99}{667} \approx 0{,}148$. □

BÀI 12. Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6. **ĐS:** 0,11

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 40 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 6". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là C_{40}^{10}.

— Trong 40 tấm thẻ đã cho có 20 tấm thẻ lẻ, 14 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 6, 6 tấm thẻ chẵn chia hết cho 6.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{20}^{5} \cdot C_{14}^{4} \cdot C_{6}^{1}$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{C_{20}^{5} \cdot C_{14}^{4} \cdot C_{6}^{1}}{C_{40}^{10}} = \dfrac{126}{1147} \approx 0{,}11$. □

BÀI 13. Có 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4. **ĐS:** 0,193

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 5 tấm thẻ từ 20 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{20}^{5} = 15504$.

— Trong 20 tấm thẻ đã cho có 10 tấm thẻ lẻ, 5 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 4, 5 tấm thẻ chẵn chia hết cho 4.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{1} \cdot C_{5}^{1} = 3000$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{3000}{15504} = \dfrac{125}{646} \approx 0{,}193$. □

BÀI 14. Gọi E là tập hợp các số có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập E. Tính xác suất để chọn được một số thuộc E và số đó chia hết cho 9. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử: "Chọn ngẫu nhiên một số từ tập E". Gọi A là biến cố "số chọn được chia hết cho 9". Ta có

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 3 = \dfrac{9 \cdot 9!}{2}$.

Do $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$ chia hết cho 9. Do đó, để có được số có 8 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 9 thì:

— Trong 10 số từ 0 đến 9 chỉ cần bỏ đi 2 số có tổng bằng 9, cụ thể ta bỏ các cặp số: $\{0,9\}, \{1,8\}, \{2,7\}, \{3,$

— Có 4 bộ số có mặt chữ số 0, mỗi bộ có $7 \cdot 7!$ số.

— Bộ không có số 0 là $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ có $8!$ số.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 4 \cdot 7 \cdot 7! + 8! = 181440$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{181440}{\dfrac{9 \cdot 9!}{2}} = \dfrac{1}{9}$. □

BÀI 15. Cho tập hợp $X = \{0,1,2,4,5,7,8\}$. Ký hiệu G là tập hợp tất cả các số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X, chia hết cho 5. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập G, tính xác suất để lấy được một số không lớn hơn 4000. **ĐS:** $\dfrac{6}{11}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số trong tập G". Gọi A là biến cố "lấy được một số không lớn hơn 4000". Gọi $\overline{abcd}$ là số có 4 chữ số khác nhau đôi một lấy từ các chữ số trên và chia hết cho 5. Ta có:

— Nếu $d = 0$ thì $\overline{abc}$ có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách chọn.

— Nếu $d = 5$ thì a có 5 cách chọn, b có 5 cách chọn và c có 4 cách chọn $\Rightarrow$ có 100 số.

Do đó, tập G có tất cả 220 số.
Giả sử $\overline{abcd} \in G$ và $\overline{abcd} \leq 4000$. Khi đó:

— $a \in \{1,2,3\}$ nên có 3 cách chọn.

— d có 2 cách chọn.

— $\overline{bc}$ có $\mathrm{A}_5^2 = 20$ cách chọn.

— Vậy nên có tất cả 120 số lấy từ G mà nhỏ hơn 4000.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n\Omega} = \dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$. □

BÀI 16. Gọi E là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: $1,2,3,4,5,6,7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ các số mới lập đó. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5. **ĐS:** $\dfrac{4}{7}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ các số thuộc E". Gọi A là biến cố "số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5". Gọi số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{abcd}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu $n_\Omega = \mathrm{A}_7^4 = 840$.

— Số $a \in \{1,2,3,4\}$ nên có 4 cách chọn. Đưa 6 số còn lại vào 3 vị trí có A_6^3 cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $4 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 480$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{480}{840} = \dfrac{4}{7}$. □

BÀI 17. Gọi E là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: $1,2,3,4,5,6,7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp E. Tính xác suất để số được chọn là số lớn hơn số 2016. **ĐS:** $\dfrac{6}{7}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp E". Gọi A là biến cố "số được chọn là số lớn hơn số 2016". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_7^4$.

— Số nhỏ hơn 2016 thì số đầu tiên bắt đầu là số 1, số cách đưa các số còn lại vào ba chỗ trống là A_6^3. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố $\overline{A}$ là $n_{\overline{A}} = \mathrm{A}_6^3$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = 1 - \dfrac{\mathrm{A}_6^3}{\mathrm{A}_7^4} = \dfrac{6}{7}$. □

BÀI 18. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{3}{5}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số khác nhau lấy từ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$". Gọi A là biến cố "số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ". Gọi số có 4 chữ số thỏa mãn bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_6^4 = 360$.

— Chọn ra hai số chẵn từ bộ $\{2, 4, 6\}$ có $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách. Chọn 2 trong 4 chỗ để đưa hai số chẵn vào có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách. Đưa hai số chẵn vào hai chỗ có 2! cách. Đưa ba số lẻ từ bộ $\{1, 3, 5\}$ vào 2 vị trí còn lại có $\mathrm{A}_3^2 = 6$ cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 216$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{216}{360} = \dfrac{3}{5}$. □

BÀI 19. Gọi X là tập các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt từ các chữ số: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lấy ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6. **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số từ X". Gọi A là biến cố "số được chọn có mặt chữ số 6".
Ta có số phần tử của X là $\mathrm{A}_6^4 = 360$.
Số kết quả thuận lợi của biến cố $\overline{A} = \mathrm{A}_5^4 = 120$.
Xác suất cần tìm là

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = 1 - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}.$$

□

BÀI 20. Cho tập X gồm các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Lấy ngẫu nhiên 2 số từ X. Tìm xác suất để 2 số được lấy có ít nhất 1 số chẵn. **ĐS:** 0,77

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên hai số từ X". Gọi A là biến cố "có ít nhất 1 số chẵn trong hai số được chọn".
Ta có, số phần tử của X là $n_X = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.
Giả sử $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ là số lẻ thuộc tập X. Khi đó, b_4 có 3 cách chọn, b_1 có 4 cách chọn, b_2 có 4 cách chọn, b_3 có 3 cách chọn. Suy ra, số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$.
Suy ra, xác suất để chọn được hai số lẻ là

$$P(\overline{A}) = \frac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = \frac{\mathrm{C}_{144}^2}{\mathrm{C}_{300}^2} = \frac{132}{575}.$$

Xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{443}{575} \approx 0{,}77$. □

BÀI 21. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ E. Tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ (các chữ liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ). **ĐS:** $\dfrac{5}{54}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ E", gọi A là biến cố "số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ". Xét các số có 9 chữ số khác nhau, ta có:

— Có 9 cách chọn chữ số ở vị trí đầu tiên.

— Có A_9^8 cách để đưa 9 chữ số còn lại vào 8 vị trí còn lại.

— Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9 \cdot \mathrm{A}_9^8 = 3265920$.

Xét các số thỏa mãn bài toán:

— Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và đứng cuối nên có 7 cách sắp xếp.

— Ta có A_5^2 cách chọn 2 số lẻ và đưa vào hai vị trí bên cạnh chữ số 0.

— Chọn hai trong 6 vị trí còn lại có C_6^2 cách. Chọn hai trong 3 số lẻ còn lại đưa vào hai vị trí vừa chọn có A_3^2 cách. Vậy có tất cả $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{A}_3^2 = 90$ cách để chọn ra hai số lẻ và xếp vào hai trong 6 vị trí còn lại.

— Cuối cùng, đưa 4 chữ số chẵn còn lại vào 4 vị trí có 4! cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 7 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot 90 \cdot 4! = 302400$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{302400}{3265920} = \dfrac{5}{54}$. □

BÀI 22. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số có 5 chữ số theo yêu cầu bài toán". Gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 3". Ta có:

— Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có C_5^3 cách.

— Chọn 2 trong 4 số để đưa vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 120$.

Để số được chọn chia hết cho 3 thì tổng các chữ số phải chia hết cho 3. Do số được chọn luôn có 3 chữ số 3 nên hai số còn lại phải chia hết cho 3. Ta có:

— Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có C_5^3 cách.

— Hai số còn lại thuộc các bộ số: $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $\mathrm{C}_5^3 \cdot 3 \cdot 2! = 60$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 23. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số tự nhiên trên, chọn ngẫu nhiên 1 số, tìm xác suất để số được chọn **không** bắt đầu bởi số 12. **ĐS:** $\dfrac{41}{42}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 1 số từ các số có 7 chữ số lập từ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ thỏa mãn đề bài". Gọi A là biến cố "số được chọn không bắt đầu bởi số 12". Gọi số có 7 chữ số thuộc không gian mẫu có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, ta có:

— Chọn 2 vị trí để đưa số 4 vào có C_7^2 cách.

— Đưa 5 chữ số còn lại vào 5 vị trí còn lại có 5! cách.

— Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_7^2 \cdot 5! = 2520$.

Xét trường hợp số có 7 chữ số như trên bắt đầu bằng số 12 thì:

— Đưa số 12 vào 2 vị trí a_1a_2 có 1 cách chọn.

— Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí còn lại để đưa hai số 4 vào có C_5^2 cách.

— Đưa 3 số còn lại vào 3 vị trí còn lại có 3! cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = n_\Omega - n_{\overline{A}} = 2520 - \mathrm{C}_5^2 \cdot 3! = 2460$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{2460}{2520} = \dfrac{41}{42}$. □

BÀI 24. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập E. Tìm xác suất để phần tử đó là một số không chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{11}{36}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 5". Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_7^5 - \mathrm{A}_6^4 = 2160$.

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

  – a_5 là 5, a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách chọn.
  – a_5 là 0, a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 660$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{660}{2160} = \dfrac{11}{36}$. □

BÀI 25. Có 12 số tự nhiên khác nhau trong đó có 5 số chẵn và 7 số lẻ, chọn ngẫu nhiên 3 số. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{23}{44}$

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có tổng số phần tử là $n_\Omega = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$. Gọi A là biến cố "tổng ba số được chọn là số chẵn". Ta xét các trường hợp sau:

— Chọn được ba số chẵn, có: $\mathrm{C}_5^3 = 10$ (cách).

— Chọn được một số chẵn và hai số lẻ, có: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_7^2 = 105$ (cách).

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $10 + 105 = 115$.
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{115}{220} = \dfrac{23}{44}$. □

BÀI 26. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho:

① Tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

② Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

③ Tổng số chấm bằng 7. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

④ Tổng số chấm nhỏ hơn 6. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

⑤ Tổng số chấm chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

⑥ Lần đầu là số nguyên tố, lần sau là số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

⑦ Có đúng 1 mặt 6 chấm xuất hiện. **ĐS:** $\dfrac{5}{18}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần". Ta có $n_\Omega = 6 \cdot 6 = 36$.

① Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm bằng 6 là: $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,3\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 3 \cdot 2! = 6$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

② Gọi A là biến cố "ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm". Ta có:

— Các bộ số có sự xuất hiện của mặt 1 chấm là: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 6 \cdot 2! = 12$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

③ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 7". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm bằng 7 là: $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 3 \cdot 2! = 6$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

④ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo nhỏ hơn 6". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm nhỏ hơn 6 là: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,2\}$, $\{2,3\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 6 \cdot 2! = 12$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

⑤ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo chia hết cho 5". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm chia hết cho 5 là: $\{1,4\}$, $\{2,3\}$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2 \cdot 2! = 4$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

⑥ Gọi A là biến cố "lần gieo đầu là số nguyên tố, lần 2 là số chẵn". Ta có:

— Các số nguyên tố nhỏ hơn 6 có ba số là $\{2,3,5\}$.

— Từ 1 đến 6 có tất cả 3 số chẵn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 3 \cdot 3 = 6$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

⑦ Gọi A là biến cố "có đúng một mặt 6 chấm xuất hiện". Ta có:

— Các bộ số có sự xuất hiện của đúng một số 6 là: $\{6,1\}$, $\{6,2\}$, $\{6,3\}$, $\{6,4\}$, $\{6,5\}$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 5 \cdot 2 = 10$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

□

BÀI 27. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4. Hãy xác định số phần tử của tập E. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập E, tính xác suất để số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau. **ĐS:** $\dfrac{3}{10}$

Lời giải.

Lập một số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ bộ 5 số $\{5,6,7,8,9\}$. Số phần tử của E là $5! = 120$. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc E", gọi A là biến cố "số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau". Xét các số thỏa mãn đề bài có dạng $\overline{abcde}$. Ta xét các trường hợp:

— $\overline{abc}$ là 3 chữ số lẻ. Chọn $\overline{abc}$ có $3! = 6$ cách. Chọn $\overline{de}$ có $2! = 2$. Do đó, số kết quả trong trường hợp này là $6 \cdot 2 = 12$.

— Các trường hợp $\overline{bcd}$ và $\overline{cde}$ là các số lẻ đều có kết quả tương tự trường hợp trên.

— Vậy số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 12 \cdot 3 = 36$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{120}^{1} = 120$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$. □

BÀI 28. Cho tập hợp $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có nhiều nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ tập E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp M. Tính xác suất lấy được một số thuộc tập M, sao cho tổng các chữ số của số đó bằng 10.**ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập M", gọi A là biến cố "tổng các chữ số của số được chọn là 10". Ta có:

— Số phần tử của M là $A_6^3 + A_6^2 + A_6^1 = 156$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{156}^1 = 156$.

— Để tổng của các chữ số của số được chọn là 10, ta có các bộ số: $\{4,6\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2! + 4 \cdot 3! = 26$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{26}{156} = \dfrac{1}{6}$. □

BÀI 29. Gọi E là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp E, tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4. **ĐS:** 0,29

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên ba số từ tập E", gọi A là biến cố 'trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4". Ta có:

— Số phần tử của tập E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{60}^3 = 34220$.

— Các số thuộc E không có chữ số 4 là $A_4^3 = 24$.

— Các số thuộc E có mặt chữ số 4 là $60 - 24 = 36$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = C_{36}^1 \cdot C_{24}^2 = 9936$.

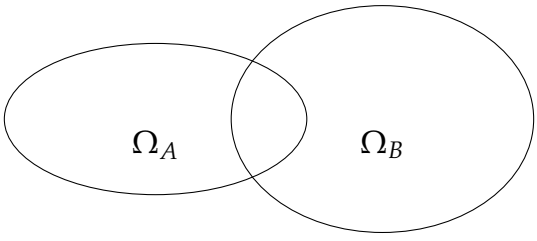
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{9936}{34220} \approx 0{,}29$. □

BÀI 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

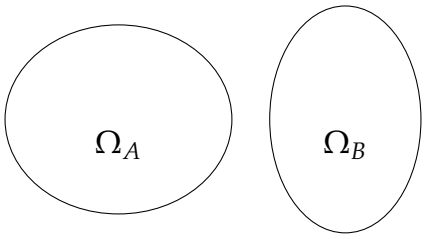
1 QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

Định nghĩa 1 (Biến cố hợp). Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B. Khi đó $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$.



VÍ DỤ 1. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi toán" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".
Khi đó $A \cup B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Lý".

Định nghĩa 2 (Biến cố xung khắc). Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó $\Omega_A \cap B = \varnothing$.



VÍ DỤ 2. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_1$" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_2$". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Định nghĩa 3 (Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc).

— Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì xác suất biến cố $A \cup B$ là $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

— Cho n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một là các biến cố xung khắc với nhau. Khi đó $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$.

VÍ DỤ 3. Cho một hộp đựng 4 viên bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để có ít nhất 2 viên bi xanh. **ĐS:** $\dfrac{22}{35}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.
Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi xanh". Có các trường hợp sau:

— Lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, số cách chọn là $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 18$.

— Lấy được 3 viên bi xanh, số cách chọn là $\mathrm{C}_4^3 = 4$.

Theo quy tắc cộng ta có $n(A) = 18 + 4 = 22$.
Vậy xác suất của A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{22}{35}$. □

VÍ DỤ 4. Trên một kệ sách có 7 quyển sách Toán, 6 quyển sách Lý và 4 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên từ kệ sách đó ra hai quyển sách. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách cùng một môn. **ĐS:** $\dfrac{21}{68}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^2 = 136$.
Gọi A là biến cố: "Lấy được hai quyển sách cùng một môn". Có các trường hợp sau:

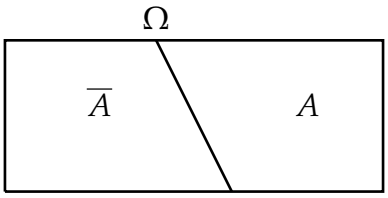
— Lấy được 2 quyển sách Toán, có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ cách.

— Lấy được 2 quyển sách Lý, có $\mathrm{C}_6^2 = 15$ cách.

— Lấy được 2 quyển sách Hóa, có $C_4^2 = 6$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có $n(A) = 21 + 15 + 6 = 42$.
Vậy xác suất của A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{42}{136} = \dfrac{21}{68}$. □

Định nghĩa 4 (Biến cố đối). Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối của nhau.
Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.



Câu hỏi 1: Hai biến cố đối nhau có phải là hai biến cố xung khắc?

Lời giải.
Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. □
Câu hỏi 2: Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối?
Lời giải.
Hai biến cố xung khắc không phải là hai biến cố đối. □

VÍ DỤ 5. Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn với xác suất $\dfrac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là bao nhiêu? **ĐS:** $\dfrac{5}{7}$

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn" thì $P(A) = \dfrac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$. □

VÍ DỤ 6. Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu. **ĐS:** $\dfrac{8}{105}$

b) Bốn quả lấy ra có đủ hai màu. **ĐS:** $\dfrac{97}{105}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

a) Gọi A là biến cố: "Bốn quả lấy ra cùng màu". Có hai trường hợp:

— Bốn quả lấy ra cùng màu trắng, có $C_6^4 = 15$ cách chọn.

— Bốn quả lấy ra cùng màu xanh, có $C_4^4 = 1$ cách chọn.

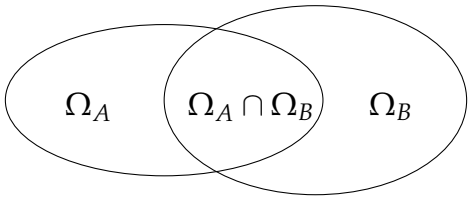
Theo quy tắc cộng thì $n(A) = 15 + 1 = 16$ cách chọn. Vậy xác suất của A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{210} = \dfrac{8}{105}$.

b) Gọi B là biến cố: "Bốn quả lấy ra có đủ hai màu" thì $B = \overline{A}$.
Suy ra $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{8}{105} = \dfrac{97}{105}$.

□

2 QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

Định nghĩa 5 (Biến cố giao). Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A và B cùng xảy ra", kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB) gọi là giao của hai biến cố A và B.



VÍ DỤ 7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán" và gọi B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".
Khi đó: $A \cap B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán và giỏi Lý"

Định nghĩa 6 (Hai biến cố độc lập). VÍ DỤ 8. Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố: "Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp" và gọi B là biến cố: "Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa". Khi đó A và B là 2 biến cố độc lập.

— Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.

— Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và B, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng là độc lập

Định nghĩa 7 (Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập). — Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

— Cho n biến cố $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:
$P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$ hay $P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

VÍ DỤ 9. Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\dfrac{3}{8}$. Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn.**ĐS:** $\dfrac{9}{64}$

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ nhất" thì $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{8}$.
Gọi B là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ hai" thì $\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{8}$.
Suy ra AB là biến cố: "Cầu thủ sút hai lần bóng đều vào được cầu môn".
Vì A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của AB là $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{64}$.
□

VÍ DỤ 10. Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,8. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Tính xác suất để:

a) Cả hai xạ thủ đều bắn trúng. **ĐS:** 0,56

b) Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia. **ĐS:** 0,06

c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia. **ĐS:** 0,94

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Xạ thủ thứ nhất bắn trúng" và B là biến cố: "Xạ thủ thứ hai bắn trúng" thì $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$. Ta có A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biến cố: "Cả hai xạ thủ đều bắn trúng" là AB nên $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

b) Biến cố: "Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia" là $\overline{AB}$.
Do A và B là độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập. Suy ra $\mathrm{P}(\overline{AB}) = \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

c) Biến cố: "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia" là $A \cup B$.
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

□

Áp dụng các nguyên tắc tính xác suất để giải bài toán, thường ta làm theo các bước sau:

— **Bước 1.** Gọi A là biến cố cần tính xác suất và A_i, $(i = \overline{1,n})$ là các biến cố liên quan đến A sao cho:
  + Biến cố A biểu diễn theo các biến cố A_i, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.
  + Hoặc xác suất các biến cố A_i tính toán dễ dàng hơn so với A.

— **Bước 2.** Biểu diễn biến cố A theo các biến cố A_i.

— **Bước 3.** Xác định mối liên hệ giữa các biến cố và áp dụng các nguyên tắc:
  + Nếu A_1, A_2 xung khắc $(A_1 \cap A_2 = \varnothing)$ thì $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)$.
  + Nếu A_1, A_2 bất kỳ thì $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cdot A_2)$.
  + Nếu A_1, A_2 độc lập thì $\mathrm{P}(A_1 \cdot A_2) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2$.
  + Nếu A_1, A_2 đối nhau thì $\mathrm{P}(A_1) = 1 - \mathrm{P}(A_2)$.

B BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được con trai (sinh được con trai rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh tiếp). Xác suất sinh được con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2. **ĐS:** 0,2499

Lời giải.
Xác suất sinh con gái là $1 - 0{,}51 = 0{,}49$.
Xác suất để cặp vợ chồng đó sinh được con trai ở lần sinh thứ 2 là $0{,}49 \cdot 0{,}51 = 0{,}2499$. □

BÀI 2. Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào một cái bia. Xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi xạ thủ là 0,6.

① Tính xác suất để trong 3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. **ĐS:** 0,288

② Muốn mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn phải có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất để mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn. **ĐS:** 0,648

Lời giải.

① Gọi X_i là xạ thủ thứ i bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ thứ i không bắn trúng bia. Ta có $\mathrm{P}(X_i) = 0{,}6; \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}4$.
Gọi A là biến cố "3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu".
Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X_1.\overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$.

② Gọi B là biến cố "mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn".
$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(X_1.X_2 \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1.X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3) = 0{,}6^3 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}648$.

□

BÀI 3. Hai xạ thủ A và B cùng bắn vào tấm bia mỗi người mỗi phát. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ A là 0,7. Tìm xác suất bắn trúng bia của xạ thủ B. Biết xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là 0,94. **ĐS:** 0,8

Lời giải.
Gọi X_A là xạ thủ A bắn trúng bia $\Rightarrow \overline{X_A}$ là xạ thủ A không bắn trúng bia $\Rightarrow \mathrm{P}(X_A) = 0{,}7, \mathrm{P}(\overline{X_A}) = 0{,}3$.
Gọi X_B là xạ thủ B bắn trúng bia $\Rightarrow \overline{X_B}$ là xạ thủ B không bắn trúng bia.
Gọi E là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia". $\overline{E}$ là biến cố "không ai bắn trúng bia"
$\Rightarrow \mathrm{P}(E) = 0{,}94 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{E}) = 0{,}06$.
Ta có $\mathrm{P}(\overline{E}) = \mathrm{P}(\overline{X_A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}3 \cdot \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}06 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}2 \Rightarrow \mathrm{P}(X_B) = 0{,}8$. □

BÀI 4. Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất ban trúng bia của họ lần lượt là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ Tính xác suất của các biến cố sau

① A: "cả hai đều bắn trúng". **ĐS:** $\frac{1}{15}$

② B: "cả hai đều bắn trượt". **ĐS:** $\frac{8}{15}$

③ C: "ít nhất một người bắn trúng". **ĐS:** $\frac{7}{15}$

④ D: "có đúng một người bắn trúng". **ĐS:** $\frac{2}{5}$

Lời giải.

① A: "cả hai đều bắn trúng". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

② B: "cả hai đều bắn trượt". Khi đó $\mathrm{P}(B) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

③ C: "ít nhất một người bắn trúng". Ta có biến cố B chính là biến cố đối của C. Khi đó $\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$.

④ D: "có đúng một người bắn trúng" tức là người thứ nhất bắn trúng người thứ 2 bắn trật hoặc người thứ nhất bắn trật người thứ hai bắn trúng. Ta có $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

□

BÀI 5. Có 3 người cùng đi câu cá; xác suất Câu được cá của người thứ nhất là 0,5; xác suất câu được cá của người thứ hai là 0,4; xác suất câu được cá của người thứ ba là 0,2. Tính xác suất biến cố:

① Có đúng 1 người câu được cá. **ĐS:** 0,46

② Có đúng 2 người câu được cá. **ĐS:** 0,26

③ Người thứ 3 luôn luôn câu được cá. **ĐS:** 0,2

④ Có ít nhất 1 người câu được cá. **ĐS:** 0,76

Lời giải.

① Gọi X_i là người thứ i câu được cá. Khi đó $\overline{X_i}$ là người thứ i không câu được cá. Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}5; \mathrm{P}(X_2) = 0{,}4; \mathrm{P}(X_3) = 0{,}2; \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 0{,}5; \mathrm{P}(\overline{X_2}) = 0{,}6; \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 0{,}8$.
Gọi A là biến cố "có đúng 1 người câu được cá". Ta có
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X_1.\overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}46$.

② Gọi B là biến cố "có đúng 2 người câu được cá". Ta có $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1.\overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$.

③ Gọi C là biến cố "người thứ 3 luôn luôn câu được cá". Khi đó $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(X_3) = 0{,}2$.

④ Gọi D là biến cố "có ít nhất 1 người câu được cá" $\Rightarrow \overline{D}$ là biến cố "không ai câu được cá". Ta có
$\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(\overline{D}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

□

BÀI 6. Một xạ thủ bắn vào bia 4 lần độc lập; xác suất bắn trúng một lần là 0,3. Tính xác suất biến cố:

① Cả 4 lần đều bắn trượt. **ĐS:** 0,2401

② Có đúng 3 lần bắn trúng. **ĐS:** 0,0756

③ Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt. **ĐS:** 0,21

④ Ít nhất 2 lần bắn trúng. **ĐS:** 0,2601

Lời giải.

① Gọi X_i là xạ thủ bắn trúng bia lần thứ i. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ không bắn trúng bia lần thứ i.
Ta có $\mathrm{P}(X_i) = 0{,}3, \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}7$.
Gọi A là biến cố "Cả 4 lần đều bắn trượt". Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}2401$.

② Gọi B là biến cố "Có đúng 3 lần bắn trúng". $\Rightarrow \mathrm{P}(B) = 4.(0{,}7 \cdot 0{,}3^3) = 0{,}0756$.

③ Gọi C là biến cố "Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt". $\Rightarrow \mathrm{P}(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

④ Gọi D là biến cố "Ít nhất 2 lần bắn trúng".
$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) + \mathrm{P}(B) +$
$+ (\mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) +$
$\mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4))$
$= (0{,}3)^4 + 0{,}0756 + 4.(0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7) = 0{,}2601$.

□

BÀI 7. Có hai hộp đựng thẻ, mỗi hộp đựng 12 thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong 2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12. **ĐS:** $\frac{23}{144}$

Lời giải.

Gọi X_i là từ hộp thứ i rút ra được một thẻ được ghi số 12. Khi đó $\overline{X_i}$ là từ hộp thứ i rút ra được một thẻ không ghi số 12. Ta có $\mathrm{P}(X_i) = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X_i}) = \dfrac{11}{12}$.
Gọi A là biến cố "2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "2 thẻ rút ra không có thẻ đánh số 12".
Ta có $\mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{11}{12} = \dfrac{121}{144} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{121}{144} = \dfrac{23}{144}$. □

BÀI 8. Có ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt của mỗi người là 0,6; 0,7 và 0,8. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia. **ĐS:** 0,976

Lời giải.

Gọi X_i là xạ thủ thứ i bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ thứ i không bắn trúng bia.
Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}6; \mathrm{P}(X_2) = 0{,}7; \mathrm{P}(X_3) = 0{,}8, \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 0{,}4; \mathrm{P}(\overline{X_2}) = 0{,}3; \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 0{,}2$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia.
Ta có $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$. □

BÀI 9. Có một xạ thủ mới tập bắn, bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn:

① Ít nhất một lần trúng bia. **ĐS:** 0,488

② Bắn trúng bia đúng lần thứ nhất. **ĐS:** 0,2

Lời giải.

① Gọi X_i là lần thứ i xạ thủ bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là lần thứ i xạ thủ không bắn trúng bia.
Ta có
$\mathrm{P}(X_i) = 0{,}2; \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}8$.
Gọi A là biến cố "ít nhất một lần trúng bia" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia. Ta có
$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 1 - 0{,}8^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

② Gọi B là biến cố "bắn trúng bia đúng lần thứ nhất". Ta có $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(X_1) = 0{,}2$.

□

BÀI 10. Việt và Nam thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4 (giả sử không có séc hòa). Tính xác suất Nam thắng trận?
ĐS: 0,11008

Lời giải.
Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4, xác suất Nam không thắng mỗi séc là $1-0{,}4=0{,}6$.
Xác suất Nam thắng cả 3 séc đầu: $0{,}4^3=0{,}064$.
Xác suất Nam thắng 3 séc trong 4 séc đầu: $0{,}4^3\cdot 0{,}6=0{,}0384$.
Xác suất Nam thắng cả 3 séc trong 5 séc: $0{,}4^3\cdot 0{,}6^2=0{,}02304$.
Vậy xác suất Nam thắng trận là: $0{,}064+0{,}0384+0{,}02304=0{,}11008$. □

BÀI 11. Một nhóm xạ thủ gồm có 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của một xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn trúng đích?
ĐS: 0,83

Lời giải.
Xác suất chọn 1 xạ thủ loại I và bắn trúng là $\dfrac{3}{10}\cdot 0{,}9=0{,}27$.
Xác suất chọn 1 xạ thủ loại II và bắn trúng là $\dfrac{7}{10}\cdot 0{,}8=0{,}56$.
Vậy xác suất để viên đạn trúng đích là $0{,}27+0{,}56=0{,}83$. □

BÀI 12. Có ba lô hàng. Người ta lấy một cách ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được một sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,5; 0,6 và 0,7. Tính xác suất để trong ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt? **ĐS:** 0,94

Lời giải.
Gọi X_i là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng tốt ở lô hàng thứ i. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng chưa tốt ở lô hàng thứ i.
Ta có $\mathrm{P}(X_1)=0{,}5, \mathrm{P}(X_2)=0{,}6, \mathrm{P}(X_3)=0{,}7, \mathrm{P}(\overline{X_1})=0{,}5, \mathrm{P}(\overline{X_2})=0{,}4, \mathrm{P}(\overline{X_3})=0{,}3$.
Gọi A là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng chưa tốt".
Ta có $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=\mathrm{P}(\overline{X_1})\cdot\mathrm{P}(\overline{X_2})\cdot\mathrm{P}(\overline{X_3})=1-0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=1-0{,}06=0{,}94$. □

BÀI 13. Một hộp chứa 11 bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{118}{231}$

Lời giải.
Từ 1 đến 11 có 6 số lẻ, 5 số chẵn. Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)=\mathrm{C}_{11}^6=462$.
Gọi A là biến cố chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau được số lẻ.

① **Trường hợp 1:** 1 số lẻ, 5 số chẵn $\mathrm{C}_6^1\cdot\mathrm{C}_5^5=6$.

② **Trường hợp 2:** 3 số lẻ, 3 số chẵn $\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_5^3=200$.

③ **Trường hợp 3:** 5 số lẻ, 1 số chẵn $\mathrm{C}_6^5\cdot\mathrm{C}_5^1=30$.

$\Rightarrow n(A)=6+200+30=236$. Vậy xác suất để kết quả thu được là số lẻ là $\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{118}{231}$.
□

BÀI 14. Một hộp có đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm một, không bỏ trở lại để kiểm tra cho đến khi lấy ra hai phế thì thôi. Tính xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải.

Xác suất lấy ra được chính phẩm $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, xác suất lấy ra được phế phẩm $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Vậy xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2 là $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. □

BÀI 15. Một thủ kho có một chùm chìa khóa gồm 10 chiếc hình thức giống nhau nhưng trong đó chỉ có 3 chìa là mở được kho. Anh ta mở ngẫu nhiên từng chìa khóa một cho đến khi mở được kho. Tính xác suất để:

① Anh ta mở được kho ở lần thứ 3. **ĐS:** 0,147

② Anh ta mở được kho mà không quá 3 lần mở. **ĐS:** 0,657

Lời giải.

① Gọi X_i là biến cố chọn được chìa khóa thứ i mở được kho. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố chọn được chìa khóa thứ i không mở được kho. Ta có $P(X_i) = 0{,}3; P(\overline{X_i}) = 0{,}7$.
Gọi A là biến cố "mở được kho ở lần thứ 3" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia. Ta có $P(A) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(X_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$.

② Gọi B là biến cố "mở được kho mà không quá 3 lần mở".
Ta có $P(B) = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}657$.

□

BÀI 16. Một nồi hơi có 3 van bảo hiểm hoạt động độc lập với xác suất hỏng của van 1, van 2, van 3 trong khoảng thời gian t tương ứng là 0,1; 0,2 và 0,3. Nồi hơi hoạt động an toàn nếu ít nhất một van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t? **ĐS:** 0,994
Lời giải.
Gọi X_i là biến cố van thứ i bị hỏng. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố van thứ i không bị hỏng.
Ta có $P(X_1) = 0{,}1; P(X_2) = 0{,}2; P(X_3) = 0{,}3$.
Gọi A là biến cố "nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố 3 van bị hỏng. Ta có
$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_3) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$. □

BÀI 17. Trong thời gian có dịch bệnh ở vùng dân cư. Cứ 100 người bệnh thì phải có 20 người đi cấp cứu. Xác suất để gặp người đi cấp cứu do mắc phải dịch bệnh của vùng đó là 0,08. Tìm tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó. **ĐS:** 0,016
Lời giải.
Tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó là $\frac{20}{100} \cdot 0{,}08 = 0{,}016$. □

BÀI 18. Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu ít nhất hai động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn. **ĐS:** 0,9999590464
Lời giải.
Gọi A là biến cố máy bay bay an toàn. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố máy bay bay không an toàn.

① **Trường hợp 1:** 5 động cơ hỏng $0{,}09^3 \cdot 0{,}04^2$.

② **Trường hợp 2:** 4 động cơ hỏng $0{,}09^3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}09^2 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}04^2$.

$\Rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}09^3 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}09^3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}09^2 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}04^2$
$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}9999590464$. □

BÀI 19. Ba cầu thủ sút phạt luân lưu 11 mét, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là $x; y$ và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn? **ĐS:**

Lời giải.

Xác suất để 3 cầu thủ cùng ghi bàn là $x \cdot y \cdot 0{,}6 = 0{,}336 \Leftrightarrow x \cdot y = 0{,}56 \quad (1)$.

Xác suất để không có cầu thủ nào ghi bàn là $(1-x)(1-y)(1-0{,}6) = 1 - 0{,}976 \quad (2)$.

Từ (1), (2) ta có $\begin{cases} x \cdot y = 0{,}56 \\ (1-x)(1-y) = 0{,}06 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0{,}56 \\ -x-y+xy = -0{,}94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0{,}56 \\ x+y = 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{7}{10} \end{cases}$. □

BÀI 20. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai được trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1. **ĐS:** $\dfrac{85293}{1048576}$

Lời giải.

Gọi x là số câu trả lời đúng $(0 \le x \le 10)$, khi đó số câu trả lời sai là $10 - x$. Để học sinh làm dưới 1 điểm thì số câu trả lời đúng thỏa mãn bất phương trình $5x + (10-x)(-2) < 1 \Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$.

① $x = 0$ không có câu đúng $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$.

② $x = 1$ có 1 câu đúng $\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{9}$.

③ $x = 2$ có 2 câu đúng $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8}$.

Vậy xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1 là $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} + \left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{9} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8} = \dfrac{85293}{1048576}$.

□

BÀI 21. Trong một lớp học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả hai tiến Anh và Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau:

① A: "Sinh viên được chọn học tiếng Anh". **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

② B: "Sinh viên được chọn học tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

③ C: "Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

④ D: "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và Tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

Lời giải.

① Theo đề số học sinh học tiếng Anh là 40, số học sinh học tiếng Pháp là 30, số học sinh học cả 2 môn Anh, Pháp là 20, số học sinh không học môn Anh, Pháp là $60 - (40 + 30 - 20) = 10$.
Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là $\dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$.

② Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Pháp là $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

③ Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

④ Xác suất chọn được sinh viên không học tiếng Anh và Tiếng Pháp là $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

□

BÀI 22. Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lý, 10% trượt cả Lý lẫn Toán. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho:

① Hai học sinh đó trượt Toán. **ĐS:** $\frac{1}{16}$

② Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó. **ĐS:** $\frac{1}{4}$

③ Hai học sinh đó không bị trượt môn nào. **ĐS:** $\frac{1}{4}$

④ Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn. **ĐS:** $\frac{3}{4}$

Lời giải.
Kí hiệu A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối I trượt Toán, Lí Hóa; B_1, B_2, B_3, lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối II trượt Toán, Lí Hóa. Rõ ràng với mọi (i, j), các biến cố A_i và B_j độc lập.

① Ta có $\mathrm{P}(A_1B_1) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

② Xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)\right) \\ =\ &\mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) \cdot (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\ =\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

.

③ Đặt $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.
Cần tính $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$. Do $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \\ &= \left[1 - \mathrm{P}(A)\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

.

④ Cần tính $\mathrm{P}(A \cup B)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

.

□

BÀI 23. Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn X trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của X không dưới 9,5 điểm. **ĐS:** $\dfrac{53}{512}$

Lời giải.

Thí sinh X không dưới 9,5 điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên có ít nhất 3 câu đúng. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\dfrac{1}{4}$, trả lời sai là $\dfrac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 3 trên 5 câu là $\mathrm{C}_5^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 4 trên 5 câu là $\mathrm{C}_5^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot\dfrac{3}{4}$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 5 trên 5 câu là $\mathrm{C}_5^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5$.

Vậy xác suất cần tính $\mathrm{P}=\mathrm{C}_5^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\mathrm{C}_5^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot\dfrac{3}{4}+\mathrm{C}_5^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{53}{512}$. □

BÀI 24. Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X dự thi hai môn trắc nghiệm môn Hóa và Lí. Đề thi của mỗi câu gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi bạn X làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng hai môn thi của X không dưới 19 điểm. **ĐS:** $\dfrac{81922}{4^{10}}$

Lời giải.

Thí sinh X không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Hóa và Lí có ít nhất 5 câu đúng. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\dfrac{1}{4}$, trả lời sai là $\dfrac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 5 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^5$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 6 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 7 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^7\left(\dfrac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 8 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^8\left(\dfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 9 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^9\left(\dfrac{1}{4}\right)^9\cdot\dfrac{3}{4}$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 10 trên 10 câu là $\mathrm{C}_{10}^{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$.

Vậy xác suất cần tính là

$$\mathrm{P}=\mathrm{C}_{10}^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5+\mathrm{C}_{10}^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+\mathrm{C}_{10}^7\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\mathrm{C}_{10}^8\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\mathrm{C}_{10}^9\left(\frac{1}{4}\right)^9\cdot\frac{3}{4}+\mathrm{C}_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{81922}{4^{10}}.$$

□

BÀI 6. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2

BÀI 1. Xếp ngẫu nhiên ba người nam và hai người nữ vào một dãy năm ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để được kiểu xếp mà giữa hai người nam có đúng 1 người nữ. **ĐS:** $\frac{1}{10}$

Lời giải.
Số cách xếp 3 nam và 2 nữ vào 5 ghế là 5! cách.
Gọi A là biến cố giữa hai người nam có đúng 1 người nữ:

— Xếp 3 nam vào 3 ghế số 1, 3, 5 là 3! cách.

— Xếp 2 nữ vào vào 2 ghế số 2, 4 là 2! cách.

Suy ra $\mathrm{n}(A) = 3!2!$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3!2!}{5!} = \dfrac{1}{10}$. □

BÀI 2. Gọi A là tập hợp tất cả các số gồm năm chữ số mà chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, hai chữ số còn lại khác nhau và thuộc tập hợp các chữ số 1, 2, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\frac{3}{4}$

Lời giải.
Gọi A là tập hợp các số x có dạng $\overline{abcde}$ thỏa yêu cầu. Ta có $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_4^2$.

Để x chia hết cho 3 thì $(a+b+c+d+e)\vdots 3$, do đó hai chữ số trong năm chữ số được chọn trong 4 bộ số $\{1;2\}$, $\{1;5\}$, $\{2;4\}$, $\{4;5\}$.
Do đó $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1 2!$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1 2!}{\mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_4^2} = \dfrac{3}{4}$. □

BÀI 3. Trong kì thi THTP Quốc Gia, Thành đoàn thành lập tổ công tác gồm 5 người được chọn ngẫu nhiên từ 15 cán bộ đoàn trường học và 10 cán bộ các quận, huyện để tìm các chỗ trọ miễn phí cho những thí sinh có điều kiện khó khăn. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường. **ĐS:** $\frac{381}{1265}$

Lời giải.
Ta có $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^5$.
Gọi A là biến cố trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường, có 3 phương án:

— Trong 5 người được chọn không có cán bộ đoàn trường: C_{10}^5.

— Trong 5 người được chọn có 1 cán bộ đoàn trường: $\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1$.

— Trong 5 người được chọn có 2 cán bộ đoàn trường: $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2$.

Do đó $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1 + \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1 + \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2}{\mathrm{C}_{25}^5} = \dfrac{381}{1265}$. □

BÀI 4. Trong một dự án nhà ở xã hội gồm có 5 tầng, mỗi tầng gồm có 6 căn hộ loại A và 4 căn hộ loại B. Một người mua nhà rút ngẫu nhiên căn hộ của mình. Tính xác suất để căn hộ anh ta rút được ở tầng 1 hoặc căn hộ loại A. **ĐS:** $\frac{17}{30}$

Lời giải.
Kí hiệu A, B, lần lượt là các biến cố: rút được căn hộ ở tầng 1, rút được căn hộ loại A.
Cần tính $\mathrm{P}(A \cup B)$. Ta có: $\mathrm{n}(\Omega) = 60$, $\mathrm{n}(A \cup B) = \mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(B) - \mathrm{n}(A \cap B) = 10 + 30 - 6 = 34$.
Vậy $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{34}{60} = \dfrac{17}{30}$. □

BÀI 5. Thực đơn ăn sáng tự chọn ở một khách sạn gồm 4 món xúp, 5 món bánh và 2 món cơm. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 3 món. Tính xác suất để 3 món được chọn có cả xúp, bánh và cơm. **ĐS:** $\frac{8}{33}$

Lời giải.
Gọi A là biến cố chọn được 3 món khác nhau.
Ta có số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^3$.
Số phần tử của biến cố A : $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{11}^3} = \dfrac{8}{33}$. □

BÀI 6. Trong kì thi THPT Quốc Gia, một hội đồng coi thi có 216 thí sinh tham gia dự thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT, trong đó trường X có 65 thí sinh dự thi. Sau buổi thi môn Toán, một phóng viên phỏng vấn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được phỏng vấn có ít nhất 2 học sinh ở trường X. **ĐS:** $\frac{208}{963}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{216}^3$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất 2 học sinh trường X".
Số phần tử của biến cố A : $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{65}^2\mathrm{C}_{151}^1 + \mathrm{C}_{65}^3$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{65}^2\mathrm{C}_{151}^1 + \mathrm{C}_{65}^3}{\mathrm{C}_{216}^3} = \dfrac{208}{963}$. □

BÀI 7. Có hai đơn vị cung cấp thực phẩm phục vụ ăn trưa cho công nhân của một nhà máy. Đơn vị thứ nhất cung cấp 3 loại thực phẩm, đơn vị thứ hai cung cấp 4 loại thực phẩm. Người phụ trách bếp ăn lấy mỗi loại thực phẩm một mẫu để đi kiểm tra và người kiểm tra chọn 3 mẫu bất kỳ. Tính xác suất để cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn. **ĐS:** $\frac{6}{7}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_7^3$.
Gọi A là biến cố "cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn". Có hai phương án:

— Có 1 loại của đơn vị thứ nhất và 2 loại của đơn vị thứ hai: $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2$.

— Có 2 loại của đơn vị thứ nhất và 1 loại của đơn vị thứ hai: $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1$.

Số phần tử của biến cố A : $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_7^3} = \dfrac{6}{7}$. □

BÀI 8. Trong đợt tình nguyện tiếp sức mùa thi, một trường học có 4 em lớp $11A$, 5 em lớp $11B$, 6 em lớp $11C$ đăng kí tham dự. Hỏi có bao nhiêu cách cử 7 em làm nhiệm vụ tại cổng trường đại học X sao cho mỗi lớp có ít nhất một em. **ĐS:** $\frac{661}{715}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^7$.
Gọi A là biến cố "mỗi lớp có ít nhất một em được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "có ít nhất một lớp không có em nào được chọn".
Do đó $\mathrm{n}(\overline{A}) = \mathrm{C}_9^7 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{11}^7$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_9^7 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{11}^7}{\mathrm{C}_{15}^7} = \dfrac{661}{715}$. □

BÀI 9. Ban chấp hành Đoàn của một trường THPT cần chọn ra một nhóm học sinh tình nguyện gồm 5 học sinh từ 9 học sinh lớp 10 và 7 học sinh lớp 11. Tính xác suất để trong nhóm được chọn có ít nhất một học sinh lớp 11. **ĐS:** $\frac{101}{104}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{16}^5$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất một học sinh lớp 11 được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có học sinh nào của lớp 11 được chọn".
Do đó $n(\overline{A}) = C_9^5$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_9^5}{C_{16}^5} = \dfrac{101}{104}$. □

BÀI 10. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ba người để biểu diễn tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào. **ĐS:** $\dfrac{89}{95}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^3$.
Gọi A là biến cố "không có cặp vợ chồng nào trong 3 người được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "có một cặp vợ chồng trong 3 người được chọn". Cách chọn:

— Bước 1 : Chọn một cặp vợ chồng từ 4 cặp: C_4^1.

— Bước 2 : Chọn người thứ ba từ 18 người còn lại: C_{18}^1.

Do đó $n(\overline{A}) = C_4^1 C_{18}^1$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_4^1 C_{18}^1}{C_{20}^3} = \dfrac{89}{95}$. □

BÀI 11. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm, thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm có lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào. **ĐS:** $\dfrac{64}{65}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{40}^3$ (Có xét hay không xét thứ tự không làm xác suất thay đổi).
Gọi A là biến cố "trong 3 học sinh không có cặp sinh đôi nào".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "trong 3 học sinh có 1 cặp sinh đôi". Cách chọn:

— Bước 1 : Chọn một cặp sinh đôi từ 4 cặp: C_4^1.

— Bước 2 : Chọn người thứ ba từ 38 người còn lại: C_{38}^1.

Do đó $n(\overline{A}) = C_4^1 C_{38}^1$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_4^1 C_{38}^1}{C_{40}^3} = \dfrac{64}{65}$. □

BÀI 12. Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi. **ĐS:** $\dfrac{99}{323}$

Lời giải.
Cách 1:
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^4$.
Gọi A là biến cố "trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi"
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra". Cách chọn:

— Lấy 4 chiếc giày không có chiếc nào cùng đôi chứng tỏ 4 chiếc đó lấy từ 4 đôi khác nhau đôi một, có C_{10}^4 cách chọn như vậy.

— Mỗi đôi lại có 2 cách chọn một chiếc giày đơn nên 4 đôi có 2^4 cách chọn.

Do đó $n(\overline{A}) = 2^4C_{10}^4$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2^4C_{10}^4}{C_{20}^4} = \dfrac{99}{323}$.

Cách 2:
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$.
Gọi A là biến cố "trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra". Cách chọn:

— Chiếc thứ 1 có 20 cách chọn.

— Chiếc thứ 2 có 18 cách chọn (do đã loại 1 đôi).

— Chiếc thứ 3 có 16 cách chọn (do đã loại 2 đôi).

— Chiếc thứ 4 có 14 cách chọn (do đã loại 3 đôi).

Do cách chọn 4 chiếc giày không xét tính thứ tự nên thực tế $n(\overline{A}) = \dfrac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!} = 3360$.

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3360}{4845} = \dfrac{99}{323}$. □

BÀI 13. Tìm số nguyên dương n để: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^0 = 243$. **ĐS:** $n = 5$

Lời giải.
Ta có:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Cho $x = 2$ ta được:

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^0$$
$$\Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

□

BÀI 14. Cho đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2n}$, $(n > 2, n \in \mathbb{Z}^+)$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1A_2 \ldots A_{2n}$. Tìm n? **ĐS:** $n = 8$

Lời giải.
Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2 \ldots, A_{2n}$ là C_{2n}^3.
Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường chéo lớn.
Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ có các đường chéo là đường chéo lớn. Ngược lại, với mọi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ tức C_n^2.
Theo giả thiết thì:

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\frac{n!}{2!(2n-3)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n - 1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$$

□

BÀI 15. Cho khai triển nhị thức: $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)=C_n^0 2^{\frac{x-1}{2}}+C_n^1 2^{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}} 2^{-\frac{x}{3}}+\ldots+C_n^{n-1}2^{\frac{x-1}{2}}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n 2^{\left(-\frac{x}{3}\right)^n}$ (với n là số nguyên dương), biết rằng trong khai triển đó: $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x. **ĐS:** $n=7$, $x=4$

Lời giải.

Từ $C_n^3=5C_n^1$ ta có $n\geq 3$ và

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow n^2-3n-28=0$$
$$\Rightarrow n_1=-4 \text{ (loại) hoặc } n_2=7.$$

Với $n=7$ ta có

$$C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3=140\Leftrightarrow 35\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=140\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x=4.$$

□

BÀI 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$, ($n$ là số nguyên dương và $x>0$). **ĐS:** 495

Lời giải.

Ta có

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow n^2-3n-28=0$$
$$\Rightarrow\frac{(n+2)(n+3)}{2!}=7(n+3)\Leftrightarrow n+2=7\cdot 2!=14\Leftrightarrow n=12.$$

□

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^k\cdot\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$

Ta có $x^{\frac{60-11k}{2}}=x^8\Rightarrow\frac{60-11k}{2}=8\Rightarrow k=4.$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^4=\frac{12!}{4!(12-4)!}=495.$

BÀI 17. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$. **ĐS:** $n=5$

Lời giải.

Ta có

$$\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n=x^{3n}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{2}{x}\right)^n=x^{3n}\left[\sum_{i=0}^n C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\sum_{k=0}^n C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k\right]=x^{3n}\left[\sum_{i=0}^n C_n^i x^{-2i}\sum_{k=0}^n C\right.$$

Trong khai triển trên, lũy thừa của x là $3n-3$ khi $-2i-k=-3$, hay $2i+k=3$.

Ta chỉ có hai trường hợp thỏa điều kiện này là $i=0,k=3$ hoặc $i=1,k=1$.

Nên hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3}=C_n^0\cdot C_n^3\cdot 2^3+C_n^1\cdot C_n^1\cdot 2$.

Do đó $a_{3n-3}=26n\Leftrightarrow\frac{2n(2n^2-3n+4)}{3}=26n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\ n=-\frac{7}{2}.\end{array}\right.$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm (vì n nguyên dương). □

BÀI 18. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$. **ĐS:** $a_8=238$

Lời giải.

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = \mathrm{C}_8^0 + \mathrm{C}_8^1x^2(1-x) + \mathrm{C}_8^2x^4(1-x)^2 + \mathrm{C}_8^3x^6(1-x)^3 + \mathrm{C}_8^4x^8(1-x)^4 + \mathrm{C}_8^5x^{10}(1-x)^5 + \mathrm{C}_8^6x^{12}(1-x)^6 + \mathrm{C}_8^7x^{14}(1-x)^7 + \mathrm{C}_8^8x^{16}(1-x)^8.$$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.
Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thứ tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là $\mathrm{C}_8^3 \cdot \mathrm{C}_3^2$, $\mathrm{C}_8^4 \cdot \mathrm{C}_4^0$.
Suy ra $a_8 = 168 + 70 = 238$. □

BÀI 19. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề thi nhất thiết phải có đủ 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2? **ĐS:** 56875

Lời giải.
Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3 nên có các trường hợp sau

— Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 23625$.

— Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó thì số các chọn là $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 = 10500$.

— Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là $\mathrm{C}_{15}^3 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 22750$.

Vì các cách chọn trên đôi một khác nau nên số đề kiểm tra có thể lập được là $23625 + 10500 + 22750 = 56875$. □

BÀI 20. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$. **ĐS:** 35

Lời giải.
Số hạng tổng quát của khai triển là

$$\mathrm{C}_7^k(\sqrt[3]{x})^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \mathrm{C}_7^k x^{\frac{7-k}{3}}x^{\frac{-k}{4}} = \mathrm{C}_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}, (k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le 7).$$

Số hạng không chứa x là số hạng tương ứng với k, $(k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le 7)$ thỏa mãn:

$$\frac{28-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4.$$

Số hạng không chứa x cần tìm là $\mathrm{C}_7^4 = 35$. □

BÀI 21. Tìm số nguyên dương n, biết rằng

$$\mathrm{C}_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2\mathrm{C}_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2\mathrm{C}_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3\mathrm{C}_{2n+1}^4 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{2n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

ĐS: 1002

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{2n+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^0 + \mathrm{C}_{2n+1}^1x + \mathrm{C}_{2n+1}^2x^2 + \mathrm{C}_{2n+1}^3x^3 + \ldots + \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Đạo hàm hai vế ta được

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n+1}^1 + 2\mathrm{C}_{2n+1}^2x + 3\mathrm{C}_{2n+1}^3x^2 + \ldots + (2n+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = -2$ ta có

$$\mathrm{C}_{2n+1}^1 - 2.2\mathrm{C}_{2n+1}^2 + 3.2^2\mathrm{C}_{2n+1}^3 - 4.2^3\mathrm{C}_{2n+1}^4 + \ldots + (2n+1) \cdot 2^{2n}\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1.$$

Theo giả thiết ta có $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$. □

BÀI 22. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ? **ĐS:** 207900

Lời giải.

— Có $C_3^1C_{12}^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

— Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1C_8^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.

— Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất, thứ hai thì có $C_1^1C_4^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$C_3^1 \cdot C_{12}^4 \cdot C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_1^1 \cdot C_4^4 = 207900.$$

□

BÀI 23. Tính giá trị của biểu thức: $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn:

$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$. **ĐS:** $\dfrac{3}{4}$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 3$.

Ta có

$$\begin{aligned} & C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\frac{(n+2)!}{2!n!} + 2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = 149 \\ \Leftrightarrow\ & n^2 + 4n - 45 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} n = 5 & \text{(nhận)} \\ n = -9 & \text{(loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $n = 5$ ta được $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{\dfrac{6!}{2!} + 3 \cdot \dfrac{5!}{2!}}{6!} = \dfrac{3}{4}$. □

BÀI 24. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. **ĐS:** 210

Lời giải.

Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}, C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}, \ldots, C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$.

Suy ra $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{n+1}$.

Ta có

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n+1} &= C_{2n+1}^0 + \left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n\right) + \left(C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{n+1}\right) + C_{2n+1}^{2n+1} \\ &= 2 + 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n\right) \end{aligned}$$

Cho $x = 1$ ta được $2^{2n+1} = 2 + 2\left(2^{20} - 1\right) = 2^{21} \Leftrightarrow n = 10 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^{10}$.

Ta có $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \left(x^{-4} + x^7\right)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^k \left(x^7\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{70-11k}$.

Số hạng chứa x^{26} ứng với $70 - 11k = 26 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} là $C_{10}^4 = 210$. □

BÀI 25. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** 225

Lời giải.
Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $C_{12}^4 = 495$.
số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

— Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 120$.

— Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 90$.

— Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 60$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120 + 90 + 60 = 270$.
Vậy, số cách chọn phải tìm là $495 - 270 = 225$. □

BÀI 26. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết $3^n \cdot C_n^0 + 3^{n-1} \cdot C_n^1 + 3^{n-2} \cdot C_n^2 - 3^{n-3} \cdot C_n^3 + \cdots + (-1)^n \cdot C_n^n = 2048$. **ĐS:** $2C_{11}^{10}$
Lời giải.
Trong khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ cho $a = 3, b = -1$ ta được kết quả

$$(3-1)^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11.$$

Do đó tìm được hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2+x)^{11}$ là $2C_{11}^{10}$. □

BÀI 27. Tìm hệ số của số x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5 + x^2 \cdot (1+3x)^{10}$. **ĐS:** 3320
Lời giải.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5$ là $(-2)^4 C_5^4 = 80$.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x^2 \cdot (1+3x)^{10}$ là $3^3 C_{10}^3 = 3240$.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5 + x^2 \cdot (1+3x)^{10}$ là $80 + 3240 = 3320$. □

BÀI 28. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n thỏa mãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{4} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các hệ số a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n. **ĐS:** 126720
Lời giải.
Ta có $(1+2x)^n = C_n^0 + 2C_n^1 x + 2^2 C_n^2 x^2 + \ldots + 2^n C_n^n x^n$.
Theo đề $(1+2x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ suy ra $a_0 = C_n^0, \dfrac{a_1}{2} = C_n^1, \ldots, \dfrac{a_n}{2^n} = C_n^n$.
Vì thế $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.
Khi đó ta có khai triển $(1+2x)^{12} = \sum_0^{12} C_{12}^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k$.
Xét bất phương trình $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3}$.
Tương tự $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \dfrac{23}{3}$. Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 8$.
Do đó $a_0 < a_1 < \ldots < a_7 < a_8 >$ và $a_8 > a_9 > a_{10} > \ldots > a_{12}$.
Vậy hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là $a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$. □

BÀI 29. Tìm số nguyên dương n thỏa $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$. **ĐS:** $n = 6$
Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \\ 2^{2n} &= (1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.
Từ giả thiết suy ra $2^{2n-1} = 2048 \Leftrightarrow n = 6$. □

BÀI 30. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton: $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, \forall x \neq 0$. **ĐS:** $-\frac{35}{16}x^5$

Lời giải.

$$5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n = 7 \quad (\text{vì } n \text{ nguyên dương}).$$

Khi đó $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k C_7^k}{2^{7-k}} x^{14-3k}$.

Số hạng chứa x^5 ứng với $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Do đó số hạng cần tìm là $\frac{(-1)^3 \cdot C_7^3}{2^4} x^5 = -\frac{35}{16}x^5$. □

BÀI 31. Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ. **ĐS:** $\frac{443}{506}$

Lời giải.

Số cách chọn 4 học sinh trong lớp là $C_{25}^4 = 12650$.

Số cách chọn 4 học sinh có cả nam và nữ là $C_{15}^1 \cdot C_{10}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 = 11075$.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$. □

BÀI 32. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn là số chẵn. **ĐS:** $\frac{3}{7}$

Lời giải.

Số phần tử của S là $A_7^3 = 210$.

Số cách chọn một số chẵn từ S là $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

Xác suất cần tính bằng $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$. □

BÀI 33. Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu. **ĐS:** $\frac{10}{21}$

Lời giải.

Số cách chọn 2 viên bi, mỗi viên từ một hộp là $7 \cdot 6 = 42$.

Số cách chọn 2 viên bi đỏ, mỗi viên từ một hộp là $4 \cdot 2 = 8$.

Số cách chọn 2 viên bi trắng, mỗi viên từ một hộp là $3 \cdot 4 = 12$.

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu là $P = \frac{8+12}{42} = \frac{10}{21}$. □

BÀI 34. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại. **ĐS:** $\frac{3}{11}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{12}^3 = 220$.

Số cách chọn 3 hộp sữa có đủ 3 loại là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$. Do đó xác suất cần tính là $P = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

□

BÀI 35. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn? **ĐS:** $\frac{1}{26}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{16}^4 = 1820$.
Gọi E là biến số "4 thẻ được đánh số chẵn".
Số kết quả thuận lợi cho biến cố "4 thẻ được đánh số chẵn" là $C_8^4 = 70$.
Xác suất cần tính là $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{70}{1820} = \dfrac{1}{26}$. □

BÀI 36. Trong đợt ứng phó dịch MERS – CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên ba đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn. **ĐS:** $\dfrac{209}{230}$

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$.
Gọi E là biến cố: có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn.
Số kết quả thuận lợi cho biến cố E là $C_{20}^2 \cdot C_5^1 + C_{20}^3 = 2090$.
Vậy $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{2090}{2300} = \dfrac{209}{230}$. □

BÀI 37. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa vào phòng học đó. **ĐS:** $\dfrac{1}{90}$

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$.
Gọi E là biến cố: "B mở được cửa phòng học". Ta có

$$E = \{(0;1;9), (0;2;8), (0;3;7), (0;4;6), (1;2;7), (1;3;6), (1;4;5), (2;3;5)\}.$$

Do đó $n(E) = 8$. Vậy $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{90}$. □

CHƯƠNG 3 DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Bài toán. Chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.
Phương pháp.

— Bước 1. Với $n = 1$, ta chứng minh $P(1)$ đúng.

— Bước 2. Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq 1$.
Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

! Để chứng minh mệnh đề chứa biến $P(n)$ đúng với $n \geq p$, p là số nguyên dương. Ta cũng làm các bước tương tự như trên.

— Bước 1. Với $n = p$, ta chứng minh $P(p)$ đúng.

— Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k \geq p$.
Ta cần chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.
Kết luận, mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n

Thực hiện theo các bước đã nêu ở phần tóm tắt lí thuyết.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có

① $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ② $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Lời giải

① Đặt $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.
Do đó, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

② Đặt $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. (1)

Với $n = 1$ thì $T_1 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 = 1^3$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.
Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$T_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$T_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left[(k+1)+1\right]^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, ta có

$$T_{k+1} = T_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right]}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.
Do đó, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Nhận xét. *Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $T_n = S_n^2$.*

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có

① $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3. ② $u_n = 9^n - 1$ chia hết cho 8.

Lời giải

① Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$ chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ chia hết cho 3.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ chia hết cho 3.
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3(k+1)^2 + 5k + 5 \\ &= \left(k^3 + 3k^2 + 5k\right) + 3(k+1)^2 + 3k + 6. \end{aligned}$$

Vì $\left(k^3 + 3k^2 + 5k\right) \vdots 3$, $3(k+1)^2 \vdots 3$, $3k \vdots 3$ và $6 \vdots 3$ nên $u_{k+1} \vdots 3$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 1$ ta có $u_1 = 9^1 - 1 = 8$ chia hết cho 8. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 9^k - 1$ chia hết cho 8.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 9^{k+1} - 1$ chia hết cho 8.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9 \cdot 9^k - 9 + 8 = \left[9\left(9^k - 1\right) + 8\right] \vdots 8.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, ta luôn có

① $3^n > n^2 + 4n + 5$. ② $2^n > 2n + 1$.

Lời giải

① Với $n = 3$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $3^k > k^2 + 4k + 5$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 \text{ hay } 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10.$$

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^k > 3(k^2 + 4k + 5) \Leftrightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 + 2k^2 + 6k + 5 \Rightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 \text{ (vì } k \geq 3).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 3$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 3, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^k > 2k + 1$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$ hay $2^{k+1} > 2k + 3$.
Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k + 2k + 2. \quad (2)$$

Vì $k \geq 3$ nên $2k \geq 6$. Do đó (2) tương đương với

$$2^{k+1} > 2k + 6 + 2 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k + 3.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

① $1+3+6+10+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

② $1\cdot4+2\cdot7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

③ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

④ $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

⑤ $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ với mọi $n\geq2$, $n\in\mathbb{N}$.

⑥ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$.

Lời giải.

① Đặt $S_n=1+3+6+10+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (1)

Với $n=1$ thì $S_1=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{6}=1$. Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\geq1$, $k\in\mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k=1+3+6+10+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1}=1+3+6+10+\cdots+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1}=S_k+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{6}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}.$$

Vậy (1) đúng với $n=k+1$.

Do đó, $1+3+6+10+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ với mọi số tự nhiên $n\geq1$.

② Đặt $S_n=1\cdot4+2\cdot7+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$. (1)

Với $n=1$ thì $S_1=1(1+1)^2=1\cdot4=4$. Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\geq1$, $k\in\mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k=1\cdot4+2\cdot7+\cdots+k(3k+1)=k(k+1)^2.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1}=1\cdot4+2\cdot7+\cdots+k(3k+1)+(k+1)[3(k+1)+1]=(k+1)[(k+1)+1]^2=(k+1)(k+2)^2.$$

Thật vậy, ta có

$S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k^2+k+3k+4) = (k+1)(k+2)^2$.

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

③ Đặt $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3}{6}$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{6} = \frac{(k+1)\,[k(2k+3)+2(2k+3)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

④ Đặt $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]} = \frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]} \\ &= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+} \\ &= \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

⑤ Đặt $S_n = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$. (1)

Với $n = 2$ thì $S_2 = \dfrac{2(2^2-1)(3\cdot 2+2)}{12} = 4 = 1\cdot 2^2$. Vậy (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \cdots + (k-1)k^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \cdots + [(k+1)-1](k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2]}{12}$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + k(k+1)^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k(k+1)^2 = k\left[\frac{3k^3+14k^2+21k+10}{12}\right]$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

⑥ Đặt $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n-1}{2^n}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{2^1-1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k-1}{2^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n-1}{2^n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

① $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

② $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

③ $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

④ $u_n = 7\cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

Lời giải.

① Với $n=1$ ta có $u_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 + 11k$ chia hết cho 6.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$ chia hết cho 6.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k(k+1) + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k(k+1) + 12.$$

Vì $\left(k^3 + 11k\right) \vdots 6, 3k(k+1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$ nên $u_{k+1} \vdots 6$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n=1$ ta có $u_1 = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)$ chia hết cho 6.
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) = 2k^3 + 6k(k+1) + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 \\ &= \left[(2k^3 - 3k^2 + k) + 6k(k+1) - 6k\right] \vdots 6. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

③ Với $n=1$ ta có $u_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ chia hết cho 9. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ chia hết cho 9.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 60k - 4 - 45k + 18 = \left[4\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k + 18\right] \vdots 9.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

④ Với $n=1$ ta có $u_1 = 7 \cdot 2^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 10$ chia hết cho 5. Vậy mệnh đề đúng với $n=1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}$ chia hết cho 5.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$ chia hết cho 5.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 4 \cdot 7 \cdot 2^{2k-2} + 9 \cdot 3^{2k-1} = \left[4\left(7^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) + 5 \cdot 3^{2k-1}\right] \vdots 5.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI 3. Chứng minh rằng

① $2^{n+2} > 2n + 5$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

② $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

① Với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^{k+2} > 2k + 5$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $2^{(k+1)+2} > 2(k+1) + 5$ hay $2^{k+3} > 2k + 7$.
Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+2} > 2(2k+5) \Leftrightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 + 2k + 3 \Rightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 \,(\text{vì } k \geq 1 \text{ nên } 2k + 3 > 0).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$k^k \geq (k+1)^{k-1} \Leftrightarrow \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$(k+1)^{k+1} \geq [(k+1)+1]^{(k+1)-1} \text{ hay } (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k.$$

Thật vậy, với mọi số dương k ta có

$$\begin{aligned}(k+1)^2 > k(k+2) &\Rightarrow (k+1)^{2k} > [k(k+2)]^k \\ &\Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^k} > \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1 \\ &\Rightarrow (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

① $2+5+8+\cdots+(3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$.

② $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

③ $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1) = n^2(n+1)$.

④ $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

⑤ $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

⑥ $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$, với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

⑦ $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

Lời giải.

① Đặt $S_n = 2+5+8+\cdots+(3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$. (1)
Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(3\cdot 1+1)}{2} = 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.
Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 2+5+8+\cdots+(3k-1) = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2+5+8+\cdots+(3k-1)+[3(k+1)-1] = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) = \frac{3k^2+k+2(3k+2)}{2} = \frac{3k^2+7k+4}{2}$$
$$= \frac{3k^2+3k+4k+4}{2} = \frac{3k(k+1)+4(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $2+5+8+\cdots+(3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

② Đặt $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2 = 1\cdot 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

③ Đặt $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = 1^2(1+1) = 2 = 1\cdot 2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + k(3k-1) = k^2(k+1).$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + (k+1)\,[3(k+1)-1] = (k+1)^2[(k+1)+1] = (k+1)^2(k+2).$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+2) = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)\left(k^2+3k+2\right)$$
$$= (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2).$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + n(3n-1) = n^2(n+1)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

④ Đặt $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = 1 = 1^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3}{3}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} = \frac{(k+1)\left(4k^2+8k+6\right)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

⑤ Đặt $S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. (1)

Với $n = 1$ thì $S_1 = \dfrac{2 \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{3} = 4 = 2^2$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots (2k)^2 + [2(k+1)]^2 = \frac{2(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{3} = \frac{2(k+1)(k+2)(}{3}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1) + 12(k+1)^2}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{3} = \frac{2(k+1)(2k^2+3k+4k+6)}{3} = \frac{2(k+1)\left[k(2k+3)+2(2k+3)\right]}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.

Do đó, $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

⑥ Đặt $S_n = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\left(1 - \dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$. (1)

Với $n = 2$ thì $S_2 = \dfrac{2+1}{2 \cdot 2} = \dfrac{3}{4} = 1 - \dfrac{1}{4}$. Vậy (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k \cdot \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.
Do đó, $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

⑦ Đặt $S_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$. (1)
Với $n = 1$ thì $S_1 = \frac{3}{4}-\frac{2\cdot 1+3}{4\cdot 3^1} = \frac{1}{3}$. Vậy (1) đúng với $n = 1$.
Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{k}{3^k} = \frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$, tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4\cdot 3^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4}-\frac{6k+9-4k-4}{4\cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4\cdot 3^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$.
Do đó, $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

□

BÀI 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

① $u_n = n^3 - n$ chia hết cho 3.
② $u_n = 13^n - 1$ chia hết cho 6.
③ $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.
④ $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.
⑤ $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.
⑥ $u_n = 2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

Lời giải.

① Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = k^3 - k$ chia hết cho 3.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ chia hết cho 3.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3(k^2+k).$$

Vì $(k^3-k) \vdots 3$, $3(k^2+k) \vdots 3$ nên $u_{k+1} \vdots 3$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 1$ ta có $u_1 = 13^1 - 1 = 12$ chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13 + 12 = 13(13^k - 1) + 12.$$

Vì $13\left(13^k - 1\right) \vdots 6, 12 \vdots 6$ nên $u_{k+1} \vdots 6$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

③ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18$ chia hết cho 9. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 4^k + 6k + 8$ chia hết cho 9.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$ chia hết cho 9.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8 = 4(4^k + 6k + 8) - 18k - 18 = 4(4^k + 6k + 8) - 18(k+1).$$

Vì $4(4^k + 6k + 8) \vdots 9, 18(k+1) \vdots 9$ nên $u_{k+1} \vdots 9$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

④ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 3^{2\cdot 1+1} + 2^{1+2} = 35$ chia hết cho 7. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2}$ chia hết cho 7.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2}$ chia hết cho 7.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) - 7 \cdot 2^k.$$

Vì $9\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) \vdots 7, 7 \cdot 2^k \vdots 7$ nên $u_{k+1} \vdots 7$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

⑤ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 133$ chia hết cho 133. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 11^{k+2} - 12^{2(k+1)-1}$ chia hết cho 133.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 11^{k+2} - 12^{2(k+1)-1} = 11 \cdot 11^{k+1} - 12^2 \cdot 12^{2k-1} = \left[11\left(11^{k+1} - 12^{2k-1}\right) - 133 \cdot 12^{2k-1}\right] \vdots 133.$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

⑥ Với $n = 1$ ta có $u_1 = 2^{4\cdot 1} - 1 = 15$ chia hết cho 15. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là $u_k = 2^{4k} - 1$ chia hết cho 15.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1$ chia hết cho 15.
Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1 = 2^{4k+4} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 16 + 15 = 16\left(2^{4k} - 1\right) + 15.$$

Vì $16\left(2^{4k} - 1\right) \vdots 15, 15 \cdot 2^k \vdots 15$ nên $u_{k+1} \vdots 15$. Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI 6. Chứng minh rằng

① $2^{n+1} > 2n+3$ với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

② $3^{n-1} > n(n+2)$ với mọi $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

③ $(n!)^2 \geq n^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

④ $2^n > n^2$ với mọi $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

① Với $n = 2$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^{k+1} > 2k+3$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $2^{(k+1)+1} > 2(k+1)+3$ hay $2^{k+2} > 2k+5$.
Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+1} > 2(2k+3) \Leftrightarrow 2^{k+2} > 2k+5+2k+1. \quad (2)$$

Vì $k \geq 2$ nên $2k+1 > 0$. Khi đó từ (2) suy ra

$$2^{k+2} > 2k+5.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với $n = 4$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 4, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $3^{k-1} > k(k+2)$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $3^{(k+1)-1} > (k+1)[(k+1)+2]$ hay $3^k > (k+1)(k+3)$.
Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^{k-1} > 3k(k+2) \Leftrightarrow 3^k > k^2+4k+3+2k^2+2k-3. \quad (2)$$

Vì $k \geq 4$ và $2k^2+2k-3 = 2k(k-4)+10(k-4)+37$ nên $2k^2+2k-3 > 0$. Khi đó từ (2) suy ra

$$3^k > k^2+4k+3 \Leftrightarrow 3^k > (k+1)(k+2).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

③ Trước hết ta chứng minh $n^n \geq (n+1)^{n-1}$. Thật vậy, với $n = 1$ ta được khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có $k^k > (k+1)^{k-1}$ hay $\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k \geq \dfrac{1}{k+1}$. Ta cần chứng minh khẳng định cũng đúng khi $n = k+1$.
Ta có

$$k^2+2k+1 \geq k^2+2k \Rightarrow \frac{k+1}{k+2} \geq \frac{k}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq \frac{1}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \geq \frac{1}{k+2}.$$

Vậy $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Trở lại bài toán. Ta cũng chứng minh bài toán bằng quy nạp.
Với $n = 1$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $(k!)^2 \geq k^k$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $[(k+1)!]^2 \geq (k+1)^{k+1}$.
Thật vậy, ta có

$$[(k+1)!]^2 = [k!(k+1)]^2 = (k!)^2(k+1)^2 \geq k^k(k+1)^2 \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^2 = (k+1)^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

④ Trước hết, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh trước kết quả $n^2 > 2n+1$ với mọi $n \in \mathbb{N},\ n \geq 5$.
Với $n = 5$ ta thấy bất đẳng thức là đúng.
Giả sử bất đẳng thức trên đúng với $n = k \geq 5, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $k^2 > 2k+1$.
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $(k+1)^2 > 2(k+1)+1$.
Thật vậy, ta có

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2 > 3k + 3 > 2k + 3.$$

Vậy $n^2 > 2n+1$ với mọi $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$.
Trở lại với bài toán.
Với $n = 5$ ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.
Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k \geq 5, k \in \mathbb{N}$, tức là ta có $2^k > k^2$. (1)
Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là $2^{k+1} > (k+1)^2$.
Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k+1$.
Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

BÀI 2. DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn,

— $u_1 = u(1)$ là số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).

— $u_2 = u(2)$ là số hạng thứ hai.

— $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ hoặc viết tắt là (u_n).

2 CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

— **Cách 1.** Dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát.

— **Cách 2.** Dãy số cho bởi hệ thực thức truy hồi.

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

3 DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

— Dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n < u_{n+1}$.

— Dãy số (u_n) là dãy số giảm khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $u_n > u_{n+1}$.

4 DÃY SỐ BỊ CHẶN

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

— Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \leq u_n \leq M$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Tìm số hạng của dãy số cho trước

Phương pháp giải: Từ công thức số hạng tổng quát ta thay giá trị n phù hợp để tìm số hạng cần tìm hoặc dùng hệ thức truy hồi để tìm số hạng đó.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính u_{50} và u_{99}.

Lời giải

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $0; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{5}; \ldots; \dfrac{n-1}{3n+1}; \ldots$

Ta có $u_{50} = \dfrac{50-1}{3 \cdot 50 + 1} = \dfrac{49}{151}$ và $u_{99} = \dfrac{99-1}{3 \cdot 99 + 1} = \dfrac{49}{149}$. □

VÍ DỤ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính u_8.

Lời giải

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 3; 7; 15; \ldots; 2^n - 1; \ldots$

Ta có $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, $u_5 = 31$, $u_6 = 63$, $u_7 = 127$, $u_8 = 255$. □

VÍ DỤ 3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases} \text{(dãy số Phi-bô-na-xi).}$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính u_7.

Lời giải

Dạng khai triển của dãy số đã cho là $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots$
Ta có $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$. □

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau đây

① Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$ ② Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải

① Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 2$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2 \\ u_3 - u_2 &= 2 \\ u_4 - u_3 &= 2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n - u_{n-1} &= 2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 1.$$

② Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\cdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2 \end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \geq 1. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

① Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 12, u_4 = 24, u_5 = 48$.
Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\cdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2. \end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

② Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 36, u_4 = 100, u_5 = 225$.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + n^3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = n^3$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2^3 \\ u_3 - u_2 &= 3^3 \\ u_4 - u_3 &= 4^3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n - u_{n-1} &= n^3. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 \Leftrightarrow u_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \Leftrightarrow u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

③ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{1}{2}, u_3 = \dfrac{1}{3}, u_4 = \dfrac{1}{4}, u_5 = \dfrac{1}{5}$.
Dễ thấy $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Từ công thức $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ hay $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = 1$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} &= 1 \\
\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} &= 1 \\
\frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_3} &= 1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} &= 1.
\end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n}.$$

④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$, $u_4 = 8$, $u_5 = 11$.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 3$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
u_2 - u_1 &= 3 \\
u_3 - u_2 &= 3 \\
u_4 - u_3 &= 3 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
u_n - u_{n-1} &= 3.
\end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 4.$$

⑤ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 11$, $u_2 = 102$, $u_3 = 1003$, $u_4 = 10004$, $u_5 = 100005$.
Từ công thức $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} - n - 1 = 10u_n - 10n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} - (n+1)}{u_n - n} = 10, \forall$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
\frac{u_2 - 2}{u_1 - 1} &= 10 \\
\frac{u_3 - 3}{u_2 - 2} &= 10 \\
\frac{u_4 - 4}{u_3 - 3} &= 10 \\
&\cdots\cdots \\
\frac{u_n - n}{u_{n-1} - (n-1)} &= 10.
\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n - n}{u_1 - 1} = 10^{n-1} \Rightarrow u_n - n = 10^{n-1}(u_1 - 1) \Leftrightarrow u_n = 10^n + n.$$

⑥ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1$, $u_2 = 8$, $u_3 = 15$, $u_4 = 22$, $u_5 = 29$.
Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 7$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 7 \\ u_3 - u_2 &= 7 \\ u_4 - u_3 &= 7 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n - u_{n-1} &= 7. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)7 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 7n - 7 \Leftrightarrow u_n = 7n - 6.$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \forall n \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

① Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 3$, $u_2 = \sqrt{10}$, $u_3 = \sqrt{11}$, $u_4 = \sqrt{12}$, $u_5 = \sqrt{13}$.
Ta thấy $u_n > 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Từ công thức $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ suy ra

$$u_{n+1}^2 = 1 + u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2^2 - u_1^2 &= 1 \\ u_3^2 - u_2^2 &= 1 \\ u_4^2 - u_3^2 &= 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n^2 - u_{n-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n^2 - u_1^2 = n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = u_1^2 + n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = n + 8 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{n+8}.$$

② Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 13$, $u_4 = 29$, $u_5 = 61$.
Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n + 3$ với mọi $n \geq 1$ suy ra

$$u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 3 = 2(u_n + 3), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2+3}{u_1+3}&=2\\ \frac{u_3+3}{u_2+3}&=2\\ \frac{u_4+3}{u_3+3}&=2\\ &\cdots\cdots\\ \frac{u_n+3}{u_{n-1}+3}&=2.\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n+3}{u_1+3}=2^{n-1}\Rightarrow u_n+3=2^{n-1}(u_1+3)\Leftrightarrow u_n+3=4\cdot 2^{n-1}\Leftrightarrow u_n=2^{n+1}-3.$$

③ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1=5$, $u_2=6$, $u_3=10$, $u_4=17$, $u_5=27$.
Từ công thức $u_{n+1}=u_n+3n-2$ với mọi $n\geq 1$ suy ra $u_{n+1}-u_n=3n-2$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}u_n&=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}+u_{n-2})+\cdots+(u_2-u_1)+u_1=3(n-1)-2+3(n-2)-2\cdots+3\cdot 1-\\ &=3\left[(n-1)+(n-2)+\cdots+1\right]+(n-1)\cdot(-2)+5=3\cdot\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}-2n+2+5\\ &=\frac{3(n^2-n)-4n+14}{2}=\frac{3n^2-7n+14}{2}.\end{aligned}$$

④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là $u_1=-1$, $u_2=-1$, $u_3=-1$, $u_4=-1$, $u_5=-1$.
Từ công thức $u_{n+1}=2u_n+1$ với mọi $n\geq 1$ suy ra

$$u_{n+1}+1=2u_n+2,\forall n\geq 1\Leftrightarrow u_{n+1}+1=2(u_n+1),\forall n\geq 1\Rightarrow\frac{u_{n+1}+1}{u_n+1}=2,\forall n\geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2+1}{u_1+1}&=2\\ \frac{u_3+1}{u_2+1}&=2\\ \frac{u_4+1}{u_3+1}&=2\\ &\cdots\cdots\\ \frac{u_n+1}{u_{n-1}+1}&=2.\end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n+1}{u_1+1}=2^{n-1}\Rightarrow u_n+1=2^{n-1}(u_1+1)\Leftrightarrow u_n=-1.$$

□

DẠNG 2.2. Xét tính tăng, giảm của dãy số

— ***Phương pháp 1.*** *Xét dấu của hiệu số* $u_{n+1}-u_n$.

- *Nếu với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ *ta luôn có* $u_{n+1}-u_n>0$ *thì* (u_n) *là dãy số tăng.*
- *Nếu với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ *ta luôn có* $u_{n+1}-u_n<0$ *thì* (u_n) *là dãy số giảm.*

— ***Phương pháp 2.*** *Với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$ *thì có thể so sánh tỉ số* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *với số* 1.

- *Nếu* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ *thì* (u_n) *là dãy số tăng.*
- *Nếu* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ *thì* (u_n) *là dãy số giảm.*

— ***Phương pháp 3.*** *Nếu dãy số* (u_n) *được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh* $u_{n+1}>u_n$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ *(hoặc* $u_{n+1}<u_n$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$*)*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

① Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$.

② Dãy số (v_n) với $v_n=\dfrac{n+2}{4^n}$.

Lời giải

① Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $u_n=2-\dfrac{3}{n+1}$. Khi đó

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{(n+1)+1}-\left(-\frac{3}{n+1}\right)=\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n+2}=\frac{3n+6-3n-3}{(n+1)(n+2)}=\frac{3}{(n+1)(n+2)}>0,\forall$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

② Xét tỉ số sau

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{(n+1)+2}{4^{n+1}}}{\dfrac{n+2}{4^n}}=\frac{n+3}{4\cdot 4^n}\cdot\frac{4^n}{n+2}=\frac{n+3}{4(n+2)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)}. \qquad (*)$$

Vì $n\geq 1$ nên

$$n+2\geq 3\Leftrightarrow 4(n+2)\geq 12\Leftrightarrow\frac{1}{4(n+2)}\leq\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+2)}\leq\frac{1}{3}.$$

Do đó, từ $(*)$ suy ra $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ với mọi $n\geq 1$.
Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

□

VÍ DỤ 2. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}, n \geq 2. \end{cases}$

Lời giải

Ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$ và (u_n) là dãy số dương. Ta chứng minh $u_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.
Với $n = 1$ thì khẳng định trên là đúng.
Giả sử khẳng định trên đúng khi $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$, tức là ta luôn có $u_k < 2$.
Ta cần chứng minh $u_{k+1} < 2$. Thật vậy,

$$u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} < \sqrt{2+2} = 2.$$

Vậy $u_n < 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Từ công thức $u_n = \sqrt{2+u_{n-1}}$ suy ra

$$u_n^2 = 2 + u_{n-1} \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + u_{n-1} - u_{n-1}^2 \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n-1}+1)(2-u_{n-1}).$$

Do (u_n) là dãy số dương và $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $(u_{n-1}+1)(2-u_{n-1}) > 0$. Suy ra

$$u_n^2 - u_{n-1}^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = n^2 + 4n - 3$.
② $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.
③ $u_n = 3^n - n$.
④ $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$.
⑤ $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.
⑥ $u_n = 2n - \sqrt{4n^2-1}$.

Lời giải.

① Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) - 3 - (n^2+4n-3) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - 3 - n^2 - 4n + 3 \\ &= 2n + 5 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

② Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1 - (2n^3 - 5n + 1) = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 + 1 - 2n^3 + 5 \\ &= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + 3(n-1) > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

③ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3^{n+1} - (n+1) - (3^n - n) = 3^{n+1} - n - 1 - 3^n + n = 3 \cdot 3^n - 1 - 3^n \\ &= 2 \cdot 3^n - 1 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

④ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2\right) = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

⑤ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$
$$= \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$
$$= \frac{-n^2-(n-1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

⑥ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \dfrac{1}{2n+\sqrt{4n^2-1}}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+\sqrt{4n^2-1}}{2(n+1)+\sqrt{4(n+1)^2-1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

□

BÀI 2. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

② $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

③ $u_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

④ $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}$.

Lời giải.

① Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n}} = \sqrt{\frac{n+1}{4n}} < \sqrt{\frac{n+1}{n+1}} = 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

② Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

③ Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

④ $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt{n}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \frac{3^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4n+4}{9n}}.$$

Ta có

$$\frac{4n+4}{9n} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9n} \leq \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} < 1, \forall n \geq 1.$$

Suy ra $u_{n+1} < u_n$.
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = -n^2 - 2n + 1$.

② $u_n = \frac{n-1}{n+1}$.

③ $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$.

④ $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$.

⑤ $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

⑥ $\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$.

Lời giải.

① Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 - (-n^2 - 2n + 1) = -n^2 - 2n - 1 - 2n - 2 + 1 + n^2 + 2n - 1$$
$$= -2n - 3 < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

② Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = 1 - \frac{2}{n+1}$. Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+1)+1} - \left(-\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2n+4-2n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

③ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}$. Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 + \frac{6}{n+2} - \left(3n - 5 + \frac{6}{n+1}\right) = 3n - 2 + \frac{6}{n+2} - 3n + 5 - \frac{6}{n+1}$$
$$= 3 + \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1}. \qquad (*)$$

Vì $n \geq 1$ nên

$$2 \leq n+1 < n+2 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \frac{6}{n+2} < \frac{6}{n+1} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{n+2} \geq 2 \\ -\frac{6}{n+1} \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1} \geq -1.$$

Do đó, từ $(*)$ suy ra $u_{n+1} - u_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.
Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số tăng.

④ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4n^2+2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+2} - \frac{2n+1}{4n^2+2} = \frac{2n+3}{4n^2+8n+6} - \frac{2n+1}{4n^2+2} \\ &= \frac{(2n+3)(4n^2+2) - (2n+1)(4n^2+8n+6)}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} = \frac{8n^3+12n^2+4n+6-8n^3-20n^2-20n}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} \\ &= \frac{-8n^2-16n}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

⑤ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+\sqrt{n^2-1}}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

⑥ Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$. Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+2}+1} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) đã cho là dãy số giảm.

□

BÀI 4. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

② $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

③ $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$.

④ $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải.

① $u_n = \frac{3^n}{n^2}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n^2}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

② $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{n+2+2n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

③ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét tỉ số
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{1+n+n^2}}{\sqrt{2+n+(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{n^2+3n+3}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+2+2n}} < 1, \forall n \geq 1.$$
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

④ Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli
$$(1+a)^n \geq 1+na, \forall a \geq -1, n \in \mathbb{Z}^+.$$
Xét tỉ số
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$
$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (với } a = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1).$$
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

□

BÀI 5. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

① $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1) \cdot 2^n. \end{cases}$

② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n}. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}. \end{cases}$

Lời giải.

① Ta có
$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

② Ta có $u_1 = 1 > -1$, giả sử $u_k > -1$, khi đó $u_{k+1} = 2u_k + 1 > -1$. Vậy $u_n > -1, \forall n \geq 1$.
Khi đó
$$u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1 > 0, \forall n \geq 1.$$
Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

③ Ta có $u_1 = 2 > 1$, giả sử $u_k > 1$, khi đó $u_{k+1} = 2u_k - 1 > 2 - 1 = 1$. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 1 - u_n = u_1 - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

④ Ta có

$$u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

⑤ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Ta có $u_2 = \dfrac{2u_1}{3 + u_1} = \dfrac{6}{6} = 1 < u_1$.
Ta dự đoán

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (*)$$

Thật vậy, ta thấy $(*)$ đúng khi $n = 1$.
Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k \geq 1$, $(k \in \mathbb{N})$, tức là ta có $u_k < u_{k-1}$.
Khi đó

$$u_{k+1} = \frac{2u_k}{3 + u_k} = \frac{2u_k + 6 - 6}{3 + u_k} = 2 - \frac{6}{u_k + 3}.$$

Vì $u_k < u_{k-1}$ nên $\dfrac{6}{u_k + 3} > \dfrac{6}{u_{k-1} + 3}$, suy ra $u_{k+1} < 2 - \dfrac{6}{u_{k-1} + 3} = u_k$.
Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó, dãy số (u_n) là dãy số giảm.

⑥ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
Ta có $u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{7} > u_1$.
Ta dự đoán

$$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, $(*)$ đúng với $n = 1$.
Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k \geq 1$, $(k \in \mathbb{N})$, tức là ta có $u_k > u_{k-1}$.
Khi đó

$$u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3} > \sqrt{2u_{k-1} + 3} = u_k \text{ (do } u_k > u_{k-1}).$$

Vậy $(*)$ đúng với $n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó, dãy số (u_n) là dãy số tăng.

□

DẠNG 2.3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp giải: Sử dụng khái niệm dãy số bị chặn.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

① Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n - 1}{n + 3}$.

② Dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

① Ta có $u_n > 0$ bới mọi $n \geq 1$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.
Lại có $u_n = 2 - \dfrac{7}{n+3} < 2$ với mọi $n \geq 1$. Vậy (u_n) bị chặn trên.
Do đó (u_n) bị chặn.

② Ta có
$$v_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1.$$
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $0 < u_n < 1$.
Vậy (u_n) bị chặn.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

② $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$.

③ $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

④ $u_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Lời giải.

① Ta có $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \geq 2, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới.

② Ta có $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3(3n+2)}$.
Dễ thấy $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.
Lại có
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+5)} - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)}\right) = \frac{-5}{(3n+2)(3n+5)} < 0, \forall n \geq 1.$$
Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm nên $u_{n+1} \leq u_1 = 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

③ Ta có $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \geq 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.
Lại có
$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n} = 1, \forall n \geq 1.$$
Cho nên dãy số (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

④ Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.
Ta có $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Khi đó $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

□

BÀI 2. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với

① $u_n = 1 + (n-1)\cdot 2^n$.

② $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$.

③ $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$.

④ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{2}. \end{cases}$

Lời giải.

① Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)\cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1$. Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Lại có $u_n = 1 + (n-1)\cdot 2^n \geq 1, \forall n \geq 1$. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

② Ta có $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)} \leq \dfrac{2}{3}, \forall n \geq 1$.
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n+1)} - \left(\frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)}\right) = \frac{35}{(3n-2)(3n+1)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Mặt khác

$$0 < \frac{1}{3n-2} \leq 1, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{35}{3(3n-2)} \geq -\frac{35}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} > \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} \geq \frac{2}{3} - \frac{35}{3} \Leftrightarrow -11 \leq u <$$

Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

③ Ta có $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1} = n + 2 - \dfrac{1}{n+1}$.
Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$u_{n+1} - u_n = n + 3 - \frac{1}{n+2} - \left(n + 2 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Suy ra $u_n \geq u_1 = \dfrac{5}{2}$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới.

④ Ta có $u_1 = 2 > 1$, giả sử $u_k > 1$, khi đó $u_{k+1} = \dfrac{u_n+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$. Vậy $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+1}{2} - u_n = \frac{1-u_n}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.
Suy ra $u_n \leq u_1 = 2$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn trên. Vì vậy, dãy số (u_n) bị chặn.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

① $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$.

② $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

③ $u_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$.

④ $u_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

Lời giải.

① Ta có $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1} = 1 - \dfrac{4}{3n+3} < 1, \forall n \geq 1$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.
Mặt khác, $\dfrac{3n-1}{3n+1} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

② Ta có $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.
Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm nên $u_{n+1} \leq u_1 = \dfrac{1}{2}$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

③ Ta có $u_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} > 0, \forall n \geq 1$ nên dãy số bị chặn dưới.
Lại có $\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \dfrac{2n-1}{n} \leq \dfrac{2n}{n} = 2$ nên dãy số bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

④ Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.
Ta có $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Cho nên (u_n) bị chặn trên.
Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

□

BÀI 4. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số (u_n) với

① $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$.

② $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$.

③ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 5. \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 4. \end{cases}$

Lời giải.

① Ta có $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)} \le \dfrac{7}{5}, \forall n \ge 1.$

Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+12)} - \left(\frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)}\right) = \frac{24}{(5n+7)(5n+12)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Mặt khác

$$0 < \frac{1}{5n+7} \le \frac{1}{12}, \forall n \ge 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{24}{5(5n+7)} \ge -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \ge \frac{7}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 1 \le u_n < \frac{7}{5}.$$

Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

② Ta có

$$u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}. \tag{1}$$

Dễ thấy, với mọi $n \ge 1$ ta có, $-1 \le \dfrac{1}{2n^2-3} \le \dfrac{1}{5}$.
Do đó từ (1) suy ra $-2 \le u_n \le 1, \forall n \ge 1$.
Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.
Lại có $u_1 = -2; u_2 = 1; u_3 = \dfrac{2}{3}$ nên dãy số không tăng không giảm.

③ Ta có $u_1 = 1 < 15$, giả sử $u_k < 15$, khi đó $u_{k+1} = \dfrac{2}{3}u_k + 5 < \dfrac{2}{3} \cdot (15) + 5 = 15$. Vậy $u_n < 15, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15 - u_n}{3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Suy ra $u_n \ge u_1 = 1$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới.

④ Ta có $u_1 = 4 < 8$, giả sử $u_k < 8$, khi đó $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{2} + 4 < \dfrac{8}{2} + 4 = 8$. Vậy $u_n < 8, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 4 - u_n = \frac{8 - u_n}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.
Suy ra $u_n \ge u_1 = 4$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn dưới. Vì vậy, dãy số (u_n) bị chặn.

□

BÀI 5. Cho dãy số (u_n) định bởi $u_n = \dfrac{an^4+2}{2n^4+5}$. Định a để dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải.
Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a(n+1)^4+2}{2(n+1)^4+5} - \frac{an^4+2}{2n^4+5} = \frac{\left[a(n+1)^4+2\right](2n^4+5) - (an^4+2)\left[2(n+1)^4+5\right]}{\left[2(n+1)^4+5\right](2n^4+5)}$$
$$= \frac{(5a-4)\left[(n+1)^4 - n^4\right]}{\left[2(n+1)^4+5\right](2n^4+5)}.$$

Lại có

$$(n+1)^4 > n^4, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (n+1)^4 - n^4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Để dãy số (u_n) là dãy số tăng thì

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 5a - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{5}.$$

Vậy với $a > \frac{4}{5}$ thì dãy số (u_n) là dãy số tăng. □

🗁 EM CÓ BIẾT?

DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Leonardo da Pisa) là một nhà Toán học nổi tiếng người Italia. Trong cuốn sách Liber Abacci, năm 1202, ông có viết bài toán sau:
"Một đôi thỏ (gồm một con thỏ đực và một con thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được mội đôi thỏ con (cùng gồm một thỏ đực và thỏ cái); mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có môi đôi thỏ sơ sinh."
Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng thứ 3 sẽ có $1 + 1 = 2$ đôi thỏ. Sang tháng tư, vì chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này có $1 + 2 = 3$ đôi thỏ. Sang tháng 5, hai đôi thỏ gồm đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3 cùng sinh con nên tháng này có $3 + 2 = 5$ đôi thỏ, ...
Khái quát, nếu kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n, thì với $n \geq 3$, ta có

$$F_n = F_{n-1} + \text{ số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do đó các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $(n-1)$ chưa thể sinh con ở tháng thứ n và mỗi đôi thỏ ở tháng thứ $(n-2)$ sẽ sinh ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ con được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2} (số thỏ có ở tháng thứ $(n-2)$).
Như vậy

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Việc giải quyết bài toán trên của Fibonacci dẫn đến việc khảo sát dãy số (F_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3). \end{cases}$$

Dãy số trên sau này nhà toán học Pháp Edouard Lucas gọi là dãy số Fibonacci.

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nhận xét tính chất chung đặc biệt của các dãy số sau

- Dãy số $2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots$
- Dãy số $-5, -2, 1, 4, 7, 10$.
- Dãy số $20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, \ldots\ldots$

1. Định nghĩa
Định nghĩa 1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không

đổi, nghĩa là: (u_n) là cấp số cộng khi và chỉ khi $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + d$. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n = d$ (không đổi) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Tính chất

Tính chất 1. Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả 1. Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

3. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lí 1. *Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$.*

! Để tìm n số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa điều kiện, ta cần nhớ:

- Nếu n lẻ, cần đặt số hạng cần tìm là x, công sai: d.
- Nếu n chẵn, cần đặt số hạng cần tìm là $x - d$, công sai: $2d$.

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Định lí 2. *Giả sử (u_n) là 1 cấp số cộng có công sai d. Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ (S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có: $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.*

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó?

① Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$. **ĐS:** $d = 19, u_1 = 14$

② Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$. **ĐS:** $d = -3, u_1 = -2$

Lời giải

① Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - 19n + 5 = 19n + 19 - 5 - 19n + 5 = 19$.
Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$, số hạng đầu $u_1 = 14$.

② Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 + 3n - 1 = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3$.
Do đó dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$, số hạng đầu $u_1 = -2$.

□

VÍ DỤ 2. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$

Lời giải

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là A, B, C. Khi đó ta có $A+B+C=\pi$.
Do ba góc A, B, C của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $A+C=2B$.
Do đó $2B+B=\pi \Rightarrow 3B=\pi \Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$.
Do tam giác ABC vuông nên giả sử $C=\dfrac{\pi}{2}$ khi đó công sai d của cấp số cộng là $d=C-B=\dfrac{\pi}{6}$.
Vậy góc A của tam giác là $A=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$. □

VÍ DỤ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó. **ĐS:** 5 cm, 4 cm, 3 cm

Lời giải

Giả sử ba cạnh của tam giác vuông lần lượt là a, b, c trong đó a là cạnh huyền và $a>b>c$.
Do tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm nên $a+b+c=12$.
Mặt khác a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a+c=2b$.
Khi đó $2b+b=12 \Leftrightarrow 3b=12 \Leftrightarrow b=4$ cm. Giả sử công sai của cấp số cộng là d thì $a=4-d$, $c=4+d$.
Do tam giác vuông cạnh huyền là a nên $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow (4-d)^2=4^2+(4+d)^2 \Leftrightarrow -16d=16 \Leftrightarrow d=-1$.
Vậy $a=5$ cm, $c=3$ cm. □

VÍ DỤ 4. Một cấp số cộng có 10 số hạng, trong đó số hạng đầu bằng 5, số hạng cuối bằng 23. Tìm cấp số cộng đó? **ĐS:** 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

Lời giải

Ta có $u_{10}=u_1+9d \Leftrightarrow 23=5+9d \Leftrightarrow d=2$.
Vậy cấp số cộng cần tìm là 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. □

VÍ DỤ 5. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293. **ĐS:** 4, 9, 14

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d$, x, $x+d$ trong đó d là công sai của cấp số cộng.
Khi đó ta có $x-d+x+x+d=27 \Leftrightarrow 3x=27 \Leftrightarrow x=9$.
Mà $(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=293 \Leftrightarrow (9-d)^2+81+(9+d)^2=293 \Leftrightarrow 2d^2-50=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=5 \\ d=-5. \end{array}\right.$
Với $d=5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14. Với $d=-5$ thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.
Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14. □

VÍ DỤ 6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30. **ĐS:** 1, 2, 3, 4

Lời giải

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ với $2d$ là công sai của cấp số cộng.
Khi đó ta có $x-3d+x-d+x+d+x+3d=10 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.
Mặt khác

$$(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=30 \Leftrightarrow 4x^2+20d^2=30 \Leftrightarrow d^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\dfrac{1}{2} \\ d=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x=\dfrac{5}{2}$ thì $d=\dfrac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.
Với $x=\dfrac{5}{2}$ thì $d=-\dfrac{1}{2}$, khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.
Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4. □

VÍ DỤ 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3+u_{28}=100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó. **ĐS:** 1500

Lời giải

Ta có $S_{30}=\dfrac{30(u_1+u_{30})}{2}=\dfrac{30(u_1+2d+u_{30}-2d)}{2}=\dfrac{30(u_3+u_{28})}{2}=\dfrac{30\cdot 100}{2}=1500$. □

VÍ DỤ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6=18$ và $S_{10}=110$. Tính S_{20}. **ĐS:** $S_{20}=620$

Lời giải

Giả sử cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công sai là d.
Ta có $S_6=6u_1+\dfrac{6\cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1+15d=18$. (1)
$S_{10}=10u_1+\dfrac{10\cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1+45d=110$. (2)
Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 6u_1+15d=18 \\ 10u_1+45d=110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-7 \\ d=4. \end{cases}$
Khi đó $S_{20}=20u_1+\dfrac{20\cdot 19}{2}d=20\cdot(-7)+190\cdot 4=620$. □

VÍ DỤ 9. Tính các tổng sau:

① $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$. **ĐS:** $S=(n+1)^2$

② $S=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$. **ĐS:** $S=5050$

Lời giải

① $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$.
Xét cấp số cộng (u_k), $k\in\mathbb{N}^*$ với số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$.

Ta có $u_k = u_1 + (k-1)d \Leftrightarrow 2n+1 = 1+2(k-1) \Leftrightarrow k = n+1$.
Vậy $S = \dfrac{k(u_1+u_k)}{2} = \dfrac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2$.

② $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \cdots + 3$.
Xét cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 199$ và công sai $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$.
Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$.
Khi đó $S = \dfrac{n(u_1+u_{50})}{2} = \dfrac{50(199+3)}{2} = 5050$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng

① $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 3, d = 4, u_{20} = 79, S_{20} = 820$

② $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 1, d = 3, u_{20} = 58, S_{20} = 590$

③ $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = \dfrac{5}{2}, d = \dfrac{3}{2}, u_{20} = 31, S_{20} = 335$

④ $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = 3, d = 1, u_{20} = 22, S_{20} = 250 \\ u_1 = -11, d = \dfrac{19}{5}, u_{20} = \dfrac{306}{5}, S_{20} = 502 \end{array}\right.$

Lời giải.

① $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 3$, công sai là $d = 4$.
Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$.
Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \dfrac{20(u_1+u_{20})}{2} = \dfrac{20(3+79)}{2} = 820$.

② $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.
Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$.
Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \dfrac{20(u_1+u_{20})}{2} = \dfrac{20(1+58)}{2} = 590$.

③ $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = \dfrac{5}{2}$, công sai là $d = \dfrac{3}{2}$.
Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = \dfrac{5}{2} + 19 \cdot \dfrac{3}{2} = 31$.
Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \dfrac{20(u_1+u_{20})}{2} = \dfrac{20\left(\dfrac{5}{2}+31\right)}{2} = 335$.

④ $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 & (1) \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 52 & (2). \end{cases}$

Từ (1), ta có $u_1 + 5d = 8 \Leftrightarrow u_1 = 8 - 5d$, thay vào (2)

$$(8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 52 \Leftrightarrow 20d^2 - 96d + 76 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = \dfrac{19}{5}. \end{array}\right.$$

Với $d = 1$ thì $u_1 = 3$. Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 1 = 22$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \dfrac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \dfrac{20(3 + 22)}{2} = 250$.

Với $d = \dfrac{19}{5}$ thì $u_1 = -11$. Khi đó số hạng thứ 20 là $u_{20} = u_1 + 19d = -11 + 19 \cdot \dfrac{19}{5} = \dfrac{306}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{20} = \dfrac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \dfrac{20\left(-11 + \dfrac{306}{5}\right)}{2} = 502$.

□

BÀI 2. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

① $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 3, d = 4$

② $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 3, d = 4$

③ $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = -5, d = 2$

④ $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = 2, d = 2 \\ u_1 = -17, d = 2 \end{array}\right.$

⑤ $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$ **ĐS:** Không tồn tại

⑥ $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = 9, d = -2 \\ u_1 = 5, d = -2 \end{array}\right.$

⑦ $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 1, d = 3$

⑧ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = 5, d = -2 \\ u_1 = 1, d = 2 \end{array}\right.$

⑨ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = 1, d = 2 \\ u_1 = 7, d = -2 \end{array}\right.$

⑩ $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = -3, d = 2 \\ u_1 = 5, d = -2 \end{array}\right.$

⑪ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1 = -2, d = 3 \\ u_1 = 10, d = -3 \end{array}\right.$

12 $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=-12 \\ u_1\cdot u_2\cdot u_3=8. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1=-4-3\sqrt{2}, d=3\sqrt{2} \\ u_1=-4+3\sqrt{2}, d=-3\sqrt{2} \end{array}\right.$

13 $\begin{cases} S_4=20 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}=\dfrac{25}{24}. \end{cases}$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} u_1=2, d=2 \\ u_1=8, d=-2 \\ u_1=5+\sqrt{145}, d=-\dfrac{2\sqrt{145}}{3} \\ u_1=5-\sqrt{145}, d=\dfrac{2\sqrt{145}}{3} \end{array}\right.$

14 $\begin{cases} u_1+u_5=\dfrac{5}{3} \\ u_3\cdot u_4=\dfrac{65}{72}. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1=\dfrac{1}{3}, d=\dfrac{1}{4}$

Lời giải.

1 $\begin{cases} u_7=27 \\ u_{15}=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+6d=27 \\ u_1+14d=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3 \\ d=4. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=3$, công sai là $d=4$.

2 $\begin{cases} u_9=5u_2 \\ u_{13}=2u_6+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+8d=5u_1+5d \\ u_1+12d=2u_1+10d+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1-3d=0 \\ -u_1+2d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3 \\ d=4. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=3$, công sai là $d=4$.

3 $\begin{cases} u_2+u_4-u_6=-7 \\ u_8-u_7=2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+d+u_1+3d-u_1-5d=-7 \\ u_1+7d-u_1-6d=2u_1+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-d=-7 \\ 2u_1+5d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-5 \\ d=2. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=-5$, công sai là $d=2$.

4 $\begin{cases} u_3-u_7=-8 \\ u_2\cdot u_7=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+2d-u_1-6d=-8 \\ (u_1+d)(u_1+6d)=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ u_1^2+14u_1-51=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ \left[\begin{array}{l} u_1=3 \\ u_1=-17. \end{array}\right. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=3$, công sai là $d=2$ hoặc $u_1=-17$, $d=2$.

5 $\begin{cases} u_6+u_7=60 \\ u_4^2+u_{12}^2=1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6+d=60 & (1) \\ (u_6-2d)^2+(u_6+6d)^2=1170. & (2) \end{cases}$
Từ (1), suy ra $d=60-2u_6$, thay vào (2), ta có

$$(5u_6-120)^2+(360-11u_6)^2=1170 \Leftrightarrow 146u_6^2-9120u_6+142830=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

6 $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2=155 \\ S_3=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=155 & (1) \\ 3u_1+3d=21. & (2) \end{cases}$
Từ (2), ta có $3u_1+3d=21 \Rightarrow d=7-u_1$, thay vào (1)

$$u_1^2+7^2+(14-u_1)^2=155 \Leftrightarrow 2u_1^2-28u_1+90=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=9 \\ u_1=5. \end{array}\right.$$

Với $u_1=9$ thì $d=-2$. Với $u_1=5$ thì $d=2$.
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=9$, công sai là $d=-2$ hoặc $u_1=5$, $d=2$.

⑦ $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 12 \\ 5u_1 + 10d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 3$.

⑧ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 9 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ (3 - d)^2 + 9 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} u_2 = 3 \\ d^2 = 4. \end{cases}$
Do $d^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -2 \\ d = 2 \end{array}\right.$. Với $u_2 = 3$ và $d = 2$ thì $u_1 = u_2 - d = 1$. Với $u_2 = 3$ và $d = -2$ thì $u_1 = u_2 - d = 5$.
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5$, $d = -2$.

⑨ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84. & (2) \end{cases}$
Từ (2), suy ra $d = \dfrac{16 - 4u_1}{6}$. Thay vào (2), ta có

$$\begin{aligned} & u_1^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{6}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{3}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow\ & u_1^2 + \left(\frac{2u_1 + 16}{6}\right)^2 + \left(\frac{-u_1 + 16}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2u_1 + 16}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow\ & 36u_1^2 + (2u_1 + 16)^2 + 4(16 - u_1)^2 + 9(16 - 2u_1)^2 = 3024 \\ \Leftrightarrow\ & 80u_1^2 - 640u_1 + 560 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} u_1 = 1 \Rightarrow d = 2 \\ u_1 = 7 \Rightarrow d = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 1$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 7$, $d = -2$.

⑩ $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 5 & (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45. & (2) \end{cases}$
Từ (2), suy ra $u_1 = 1 - 2d$, thay vào (2) ta có

$$(1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45 \Leftrightarrow 4d^4 - 5d^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d^2 = 4 \\ d^2 = -\dfrac{11}{4} \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = -2. \end{array}\right.$$

Với $d = 2$ thì $u_1 = 1 - 2d = -3$. Với $d = -2$ thì $u_1 = 1 - 2d = 5$.
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = -3$, công sai là $d = 2$ hoặc $u_1 = 5$, $d = -2$.

⑪ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_3 = 20 & (1 \\ (u_3 - 2d)^2 + (u_3 - d)^2 + u_3^2 + (u_3 + d)^2 + (u_3 + 2d)^2 = 170. & (2 \end{cases}$
Từ (1), suy ra $u_3 = 4$. Thay vào (2), ta có

$$(4 - 2d)^2 + (4 - d)^2 + 4^2 + (4 + d)^2 + (4 + 2d)^2 = 170 \Leftrightarrow 9d^2 = 90 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -3 \\ d = 3. \end{array}\right.$$

Với $u_3 = 4$, $d = -3$ thì $u_1 = u_3 - 2d = 10$. Với $u_3 = 4$, $d = 3$ thì $u_1 = u_3 - 2d = -2$.
Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 10$, công sai là $d = -3$ hoặc $u_1 = -2$, $d = 3$.

⑫ $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=-12 \\ u_1\cdot u_2\cdot u_3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2=-12 \\ (u_2-d)u_2(u_2+d)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2=-4 \\ (-4-d)\cdot(-4)\cdot(-4+d)=8 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} u_2=-4 \\ d^2=18. \end{cases}$

Do $d^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=3\sqrt{2} \\ d=-3\sqrt{2} \end{array}\right.$. Với $u_2=-4$, $d=3\sqrt{2}$ thì $u_1=-4-3\sqrt{2}$. Với $u_2=-4$, $d=-3\sqrt{2}$ thì $u_1=-4+3\sqrt{2}$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=-4-3\sqrt{2}$, công sai là $d=3\sqrt{2}$ hoặc $u_1=-4+3\sqrt{2}$, $d=-3\sqrt{2}$.

⑬ $\begin{cases} S_4=20 & (1) \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}=\dfrac{25}{24} & (2). \end{cases}$

Từ (1), suy ra $u_1+u_4=u_2+u_3=10$ và $u_1=5-\dfrac{3}{2}d$.

Từ (2), ta có

$$\frac{u_1+u_4}{u_1\cdot u_4}+\frac{u_2+u_3}{u_2\cdot u_3}=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1+3d)}+\frac{10}{(u_1+d)(u_1+2d)}=\frac{25}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{\left(5-\dfrac{3}{2}d\right)\left(5+\dfrac{3}{2}d\right)}+\frac{10}{\left(5-\dfrac{1}{2}d\right)\left(5+\dfrac{1}{2}d\right)}=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25-\dfrac{9}{4}d^2}+\frac{10}{25-\dfrac{1}{4}d^2}=\frac{25}{24}$$

$$\Leftrightarrow 10\left(25-\frac{9}{4}d^2+25-\frac{1}{4}d^2\right)=\frac{25}{24}\left(25-\frac{9}{4}d^2\right)\left(25-\frac{1}{4}d^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{75}{128}d^4-\frac{1925}{48}d^2+\frac{3625}{24}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d^2=\dfrac{580}{9} \\ d^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=\pm\dfrac{2\sqrt{145}}{3} \\ d=\pm 2. \end{array}\right.$$

Với $d=\dfrac{2\sqrt{145}}{3}$ thì $u_1=5-\sqrt{145}$. Với $d=-\dfrac{2\sqrt{145}}{3}$ thì $u_1=5+\sqrt{145}$.

Với $d=2$ thì $u_1=2$. Với $d=-2$ thì $u_1=8$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=5+\sqrt{145}$, công sai là $d=-\dfrac{2\sqrt{145}}{3}$; $u_1=5-\sqrt{145}$, $d=\dfrac{2\sqrt{145}}{3}$; $u_1=2$, $d=2$; $u_1=8$, $d=-2$.

⑭ $\begin{cases} u_1+u_5=\dfrac{5}{3} \\ u_3\cdot u_4=\dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_3=\dfrac{5}{3} \\ u_3\cdot u_4=\dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3=\dfrac{5}{6} \\ u_4=\dfrac{13}{12}. \end{cases}$

Khi đó ta có $u_4=u_3+d \Leftrightarrow d=u_4-u_3=\dfrac{13}{12}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{4}$. Mặt khác $u_3=u_1+2d \Leftrightarrow u_1=u_3-2d=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1=\dfrac{1}{3}$, công sai là $d=\dfrac{1}{4}$.

□

BÀI 3. Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

① $\begin{cases} S_{12}=34 \\ S_{18}=45. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1=\dfrac{31}{9}$, $d=-\dfrac{1}{9}$ ② $\begin{cases} u_5=10 \\ S_{10}=5. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1=86$, $d=-19$

③ $\dfrac{S_{20}}{5}=\dfrac{S_{10}}{3}=\dfrac{S_5}{2}$. **ĐS:** $u_1=0, d=0$ ④ $\begin{cases}S_{20}=2S_{10}\\ S_{15}=3S_5.\end{cases}$ **ĐS:** $u_1=0, d=0$

Lời giải.

① Áp dụng công thức $S_n=\dfrac{(u_n+u_1)\cdot n}{2}=\dfrac{(2u_1+(n-1)d)\cdot n}{2}$ trong đó u_1 là số hạng đầu, d là công sai.

Ta có $\begin{cases}S_{12}=34\\ S_{18}=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(2u_1+11d)\cdot 12}{2}=34\\ \dfrac{(2u_1+17d)\cdot 18}{2}=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+11d=\dfrac{17}{3}\\ 2u_1+17d=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{31}{9}\\ d=\dfrac{-1}{9}.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu là $u_1=\dfrac{31}{9}$ và công sai $d=\dfrac{-1}{9}$.

② Ta có $\begin{cases}u_5=10\\ S_{10}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+4d=10\\ \dfrac{(2u_1+9d)\cdot 10}{2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+4d=10\\ 2u_1+9d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=86\\ d=-19.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu là $u_1=86$ và công sai $d=-19$.

③ $\dfrac{S_{20}}{5}=\dfrac{S_{10}}{3}=\dfrac{S_5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}3S_{20}=5S_{10}\\ 2S_{10}=3S_5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}30\cdot(2u_1+19d)=25\cdot(2u_1+9d)\\ 10\cdot(2u_1+9d)=\dfrac{15\cdot(2u_1+4d)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+69d=0\\ 2u_1+24d=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}u_1=0\\ d=0.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu là $u_1=0$ và công sai $d=0$.

④ $\begin{cases}S_{20}=2S_{10}\\ S_{15}=3S_5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(2u_1+19d)\cdot 20}{2}=\dfrac{2\cdot(2u_1+9d)\cdot 10}{2}\\ \dfrac{(2u_1+14d)\cdot 15}{2}=\dfrac{3\cdot(2u_1+4d)\cdot 5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=0\\ d=0.\end{cases}$

Vậy số hạng đầu là $u_1=0$ và công sai $d=0$.

□

BÀI 4. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, u_3, \ldots$ có công sai d.

① Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}. **ĐS:** $S_{23}=460$

② Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính $A=u_6+u_{11}$ và $B=u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$. **ĐS:** $A=49, B=98$

③ Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính S_{19}. **ĐS:** $S_{19}=1064$

④ Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính $C=u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$. **ĐS:** $C=87$

Lời giải.

① Ta có $u_2+u_{22}=40\Leftrightarrow u_1+d+u_1+21d=40\Leftrightarrow 2u_1+22d=40$.

Khi đó $S_{23}=\dfrac{(2u_1+22d)\cdot 23}{2}=\dfrac{40\cdot 23}{2}=460$.

② Ta có

$$\begin{aligned}u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147&\Leftrightarrow u_1+u_1+3d+u_1+6d+u_1+9d+u_1+12d+u_1+15d=1\\&\Leftrightarrow 6u_1+45d=147\\&\Leftrightarrow 2u_1+15d=49\\&\Leftrightarrow (u_1+5d)+(u_1+10d)=49\\&\Leftrightarrow u_6+u_{11}=49.\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 2u_1+15d=49 &\Leftrightarrow 4u_1+30d=98\\ &\Leftrightarrow u_1+(u_1+5d)+(u_1+10d)+(u_1+15d)=98\\ &\Leftrightarrow u_1+u_6+u_{11}+u_{16}=98. \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned} u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224 &\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+7d+u_1+11d+u_1+15d=224\\ &\Leftrightarrow 4u_1+36d=224\\ &\Leftrightarrow 2u_1+18d=112\\ &\Leftrightarrow \frac{(2u_1+18d)\cdot 19}{2}=1064\\ &\Leftrightarrow S_{19}=1064. \end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned} u_{23}+u_{57}=29 &\Leftrightarrow 2u_1+78d=29\\ &\Leftrightarrow 6u_1+234d=87\\ &\Leftrightarrow (u_1+9d)+(u_1+69d)+(u_1+156d)+3u_1=87\\ &\Leftrightarrow u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1=87. \end{aligned}$$

□

BÀI 5. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

① Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105. **ĐS:** 3, 5, 7

② Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83. **ĐS:** 3, 5, 7

③ Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155. **ĐS:** 5, 7, 9

Lời giải.

① Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d$, x, $x+d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=15\\(x-d)\cdot x\cdot(x+d)=105\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=15\\x(x^2-d^2)=105\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\5(25-d^2)=105\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\d^2=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\d=\pm 2.\end{cases}$$

Với $d=2$ thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.
Với $d=-2$ thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.
Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

② Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d$, x, $x+d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=15\\(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=83\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=15\\3x^2+2d^2=83\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\3\cdot5^2+2d^2=83\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\d^2=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\d=\pm2.\end{cases}$$

Với $d=2$ thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.
Với $d=-2$ thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.
Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

③ Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-d$, x, $x+d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=21\\(x-d)^2+x^2+(x+d)^2=155\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=21\\3x^2+2d^2=155\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\3\cdot7^2+2d^2=155\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\d^2=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\d=\pm2.\end{cases}$$

Với $d=2$ thì ba số hạng liên tiếp là 5, 7, 9.
Với $d=-2$ thì ba số hạng liên tiếp là 9, 7, 5.
Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 5, 7, 9.

□

BÀI 6. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

① Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70. **ĐS:** $-2, 1, 4, 7$

② Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66. **ĐS:** Không tồn tại

③ Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504. **ĐS:** 0, 6, 12, 18

④ Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384. **ĐS:**
$\left[\begin{array}{l}2,4,6,8\\5-\sqrt{241},\dfrac{15-\sqrt{241}}{3},\dfrac{15+\sqrt{241}}{3},5+\sqrt{241}\end{array}\right.$

⑤ Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\dfrac{25}{24}$ và các số này là những số nguyên. **ĐS:** 2, 4, 6, 8

⑥ Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. **ĐS:** $30^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 150^\circ$

Lời giải.

① Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=10\\(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=10\\4x^2+20d^2=70\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\4\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+20d^2=70\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\d^2=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\d=\pm\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là -2, 1, 4, 7.

② Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=22\\(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=22\\4x^2+20d^2=66\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{11}{2}\\4\cdot\left(\dfrac{11}{2}\right)^2+20d^2=66\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{11}{2}\\d^2=\dfrac{-11}{4}\ \text{(loại)}.\end{cases}$$

Vậy không tồn tại bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

③ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=36\\(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=504\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=36\\4x^2+20d^2=504\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\4\cdot9^2+20d^2=504\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\d^2=9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\d=\pm3.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 6, 12, 18.

④ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=20\\(x-3d)(x-d)(x+d)(x+3d)=384\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\(x^2-d^2)(x^2-9d^2)=384\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\(25-d^2)(25-9d^2)=384\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\9d^4-250d^2+241=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d^2=1\\d^2=\dfrac{241}{9}\end{array}\right.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d=\pm1\\d=\pm\dfrac{\sqrt{241}}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8 hoặc $5-\sqrt{241}$, $\dfrac{15-\sqrt{241}}{3}$, $\dfrac{15+\sqrt{241}}{3}$, $5+\sqrt{241}$.

⑤ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d$ là công sai trong đó $2d\in\mathbb{Z}$.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=20\\\dfrac{1}{x-3d}+\dfrac{1}{x-d}+\dfrac{1}{x+d}+\dfrac{1}{x+3d}=\dfrac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=20\\\dfrac{1}{5-3d}+\dfrac{1}{5-d}+\dfrac{1}{5+d}+\dfrac{1}{5+3d}=\dfrac{25}{24}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\dfrac{10}{25-9d^2}+\dfrac{10}{25-d^2}=\dfrac{25}{24}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\9d^4-250d^2+241=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d^2=1\\d^2=\dfrac{241}{9}\end{array}\right.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\\left[\begin{array}{l}d=\pm1\text{ (thỏa mãn)}\\d=\pm\dfrac{\sqrt{241}}{3}\text{ (loại vì }2d\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy bốn số hạng nguyên liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8.

⑥ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ trong đó $2d>0$ là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=360^\circ\\ x+3d=5(x-3d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=360^\circ\\ 4x=18d\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=90^\circ\\ 4\cdot 90^\circ=18d\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=90^\circ\\ d=20^\circ.\end{cases}$$

Vậy bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là $30^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 150^\circ$.

□

BÀI 7. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480. **ĐS:** 0, 4, 8, 12, 16

Lời giải.
Gọi năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $x-2d$, $x-d$, x, $x+d$, $x+2d$ trong đó d là công sai.
Theo đề bài ta có

$$\begin{cases}(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d)=40\\ (x-2d)^2+(x-d)^2++x^2+(x+d)^2+(x+2d)^2=480\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x=40\\ 5x^2+10d^2=480\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ 5\cdot 8^2+10d^2=480\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ d^2=16\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ d=\pm 4.\end{cases}$$

Vậy năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 4, 8, 12, 16. □

BÀI 8. Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6. **ĐS:** 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20

Lời giải.
Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có $u_4=11$.
Do d dương nên $u_5>u_3$.
Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có $u_5-u_3=6$.
Ta có

$$\begin{cases}u_4=11\\ u_5-u_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=11\\ (u_1+4d)-(u_1+2d)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3\cdot 3=11\\ d=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\ d=3.\end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là $u_1=2$, $u_2=5$, $u_4=11$, $u_6=17$, $u_7=20$. □

BÀI 9. Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm cấp số cộng đó. **ĐS:** $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_3+u_5=28 \\ u_5+u_7=140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1+6d=28 \\ 2u_1+10d=140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-70 \\ d=28. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$.

□

BÀI 10. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó. **ĐS:** 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_8=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3 \\ u_1+7d=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=3 \\ d=3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

□

BÀI 11. Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng. **ĐS:** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1=7 \\ u_8=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=7 \\ u_1+7d=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=7 \\ d=4. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

□

BÀI 12. Giữa các số 4 và 67, hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.**ĐS:** $u_1=4$, $d=3$

Lời giải.

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là u_1, công sai d. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1=4 \\ u_{22}=67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4 \\ u_1+21d=67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4 \\ d=3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67.

□

BÀI 13. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: "Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...". Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế? **ĐS:** 77 hàng

Lời giải.

Gọi u_n là số cây trồng ở hàng thứ n.
Theo đề bài ta có $u_1=1; u_2=2; u_3=3, \ldots$.
Dễ thấy u_n là cấp số cộng với số hạng đầu là $u_1=1$, công sai $d=1$.
Giả sử với 3003 cây trồng được n_o hàng. Khi đó ta có

$$\frac{[2u_1+(n_o-1)d]\,n_o}{2}=3003 \Leftrightarrow \frac{[2\cdot 1+(n_o-1)]\,n_o}{2}=3003 \Leftrightarrow n_o^2+n_o-6006=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_o=77 \text{ (thỏa mãn)} \\ n_o=-78 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy có 77 hàng được trồng. □

BÀI 14. Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu cây được trồng? **ĐS:** 406623 cây

Lời giải.
Gọi u_n là số cây trồng ở hàng thứ n,
Theo đề bài ta có u_n là cấp số cộng với $u_1 = 9$, $u_{10} = 54$, $u_n = 2014$.
Ta có $u_{10} = 54 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 54 \Leftrightarrow d = 5$.
Mặt khác

$$u_n = 2014 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 2014 \Leftrightarrow 9 + (n-1)\cdot 5 = 2014 \Leftrightarrow n = 402.$$

Khi đó tổng số cây của tất cả các hàng là

$$S_{402} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]\, n}{2} = \frac{(2\cdot 9 + 401\cdot 5)\cdot 402}{2} = 406623.$$

Vậy công viên đó có tất cả 406623 cây được trồng.

□

BÀI 15. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Lời giải.
Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ là số tiền tiết kiệm của ngày 1/1, 2/1,..., 8/3.
Theo đề bài ta có (u_n) lập thành cấp số cộng với công sai $d = 500$.
Từ ngày 1/1 đến ngày 8/3, bạn A tiết kiệm được ít nhất là $\frac{[2\cdot 500 + (67-1)\cdot 500]\cdot 67}{2} = 1139000 >$ 800000.
Vậy bạn A đủ tiền để mua quà cho mẹ mùng 8/3.

□

BÀI 16. Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3, ... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng? **ĐS:** 85 phòng

Lời giải.
Gọi u_n là số phòng của tầng thứ n. Theo đề bài ta có $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 = u_3 - u_4 = \cdots = u_{29} - u_{30} = 4$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -4$.
Ta có

$$S_{30} = 1890 \Leftrightarrow \frac{(2u_1 - 29\cdot 4)\cdot 30}{2} = 1890 \Leftrightarrow u_1 = 121$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 121 - 4(n-1) = -4n + 125$.
Khi đó tầng 10 có số phòng là $u_{10} = -4\cdot 10 + 125 = 85$. □

BÀI 17. Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh X đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là

Phương án 1: Người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

Phương án 2: Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quí đầu tiên và kể từ qúy làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500000 đồng mỗi qúy.

Biết rằng mỗi năm có 4 qúy. Nếu em là người lao động, em sẽ chọn phương án nào ? **ĐS:** Phương án 2

Lời giải.

Theo đề bài, số tiền công nhân nhận được ở mỗi kỳ theo từng phương án lập thành một cấp số cộng, cụ thể

Phương án 1:

Giá trị ban đầu $u_1 = 36$ (triệu), công sai $d = 3$ (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm nên $n = 10$.

Suy ra $u_{10} = u_1 + (n-1) \cdot d = 36 + (10-1) \cdot 3 = 63$ (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{10} = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5 \cdot (36 + 63) = 495 \quad \text{(triệu)}.$$

Phương án 2:

Giá trị ban đầu $u_1 = 7$ (triệu), công sai $d = 0{,}5$ (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm, mà mỗi năm có 4 quí nên $n = 40$.

Suy ra $u_{40} = u_1 + (n-1) \cdot d = 7 + (40-1) \cdot 0{,}5 = 26{,}5$ (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{40} = \frac{40}{2}(u_1 + u_{40}) = 20 \cdot (7 + 26{,}5) = 670 \quad \text{(triệu)}.$$

Vậy nếu là người lao động, em sẽ chọn phương án 2. □

BÀI 18. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

① $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x$. **ĐS:** $x = -\frac{11}{4}$ hoặc $x = 1$

② $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab$. **ĐS:** $x = 2y - z$

Lời giải.

① Để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì

$$\begin{aligned} & a + c = 2b \\ \Leftrightarrow\ & 10 - 3x + 7 - 4x = 2(2x^2 + 3) \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11}{4} \\ x = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x = -\frac{11}{4}$ và $x = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

② Tương tự, để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$. Do đó

$$\begin{aligned} x &= a^2 - bc = (2b - c)^2 - bc = 4b^2 - 5bc + c^2 \\ y &= b^2 - ca = b^2 - c \cdot (2b - c) = b^2 - 2bc + c^2 \\ z &= c^2 - ab = c^2 - b \cdot (2b - c) = -2b^2 + bc + c^2 \end{aligned}$$

Nhận xét $2y - z = 4b^2 - 5bc + c^2 = x$.

Vậy $x = 2y - z$ với $y = b^2 - ca, z = c^2 - ab, a + c = 2b$.

□

BÀI 19. Tìm các nghiệm của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm này phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng. **ĐS:** 3, 5, 7

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 theo thứ tự là 3 nghiệm của phương trình đã cho.
Do x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$ và $d > 0$ với d là công sai của cấp số cộng đã cho.
Mà theo định lý Vi-ét thì $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Leftrightarrow 3x_2 = 15 \Leftrightarrow x_2 = 5$.
Mặt khác

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 105 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_3 = 21 &\Leftrightarrow (x_2 - d)(x_2 + d) = 21 \\ &\Leftrightarrow 25 - d^2 = 21 \\ &\Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Vậy $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$. □

BÀI 20. Giải các phương trình sau:

① $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \cdots + x = 970$. **ĐS:** $x = 96$

② $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \cdots + x = 245$. **ĐS:** $x = 47$

③ $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \cdots + (x + 28) = 155$. **ĐS:** $x = 1$

④ $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \cdots + (2x + 96) = 1010$. **ĐS:** $x = 1$

Lời giải.

① Ta có $1, 6, 11, \cdots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 1$, $u_n = x$ và $d = 5$.
Suy ra $u_n = u_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 5 \Leftrightarrow x = 5n - 4$.
Mà $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \cdots + x = 970 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}(1 + x) = 970 \quad (1)$.
Thay $x = 5n - 4$ vào (1), ta được

$$5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = 20 & \text{(nhận)} \\ n = -\dfrac{97}{5} & \text{(loại)}. \end{bmatrix}$$

Với $n = 20 \Rightarrow x = 96$.
Vậy $x = 96$ là nghiệm của phương trình đã cho.

② Ta có $2, 7, 12, \cdots, x$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2$, $u_n = x$ và $d = 5$.
Suy ra $u_n = u_1 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 3 \Leftrightarrow x = 5n - 3$.
Mà $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \cdots + x = 245 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}(2 + x) = 245 \quad (2)$.
Thay $x = 5n - 3$ vào (2), ta được

$$5n^2 - n - 490 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n = 10 & \text{(nhận)} \\ n = -\dfrac{49}{5} & \text{(loại)}. \end{bmatrix}$$

Với $n = 10 \Rightarrow x = 47$.
Vậy $x = 47$ là nghiệm của phương trình đã cho.

③ Ta có $(x + 1), (x + 4), (x + 7), \cdots, (x + 28)$ là một cấp số cộng với $u_1 = x + 1$, $u_n = x + 28$ và $d = 3$.
Suy ra $u_n = u_1 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow x + 28 = x + 1 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow n = 10$.
Mà $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \cdots + (x + 28) = 155 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}(x + 1 + x + 28) = 155 \quad (3)$.
Thay $n = 10$ vào (3), ta được $x = 1$.
Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

④ Ta có $(2x+1)$, $(2x+6)$, $(2x+11)$, $\cdots$, $(2x+96)$ là một cấp số cộng với $u_1 = 2x+1$, $u_n = 2x+96$ và $d = 5$.
Suy ra $u_n = u_1 + (n-1)\cdot 5 \Leftrightarrow 2x+96 = 2x+1+(n-1)\cdot 5 \Leftrightarrow n = 20$.
Mà $(2x+1)+(2x+6)+(2x+11)+\cdots+(2x+96) = 1010 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2}(2x+1+2x+96) = 1010$ (4).
Thay $n = 20$ vào (4), ta được $x = 1$.
Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

□

BÀI 21. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

① $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

② $a^2 + 8bc = (2b+c)^2$.

③ $2(a+b+c)^3 = 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right]$.

④ ba số: $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ cũng là một cấp số cộng.

⑤ ba số: $b^2 + bc + c^2$, $a^2 + ac + c^2$, $a^2 + ab + b^2$ cũng là một cấp số cộng.

⑥ ba số: $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}; \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $(a, b, c > 0)$ cũng là một cấp số cộng.

Lời giải.

① Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
Do đó

$$a^2 + 2bc = (2b-c)^2 + 2bc = 4b^2 - 2bc + c^2 = 2b(2b-c) + c^2 = 2ba + c^2 = c^2 + 2ab.$$

Vậy $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ (đpcm).

② Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
Do đó

$$a^2 + 8bc = (2b-c)^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b+c)^2.$$

Vậy $a^2 + 8bc = (2b+c)^2$ (đpcm).

③ Vì a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$.
Do đó

$$\begin{aligned}
\text{VT} &= 2(a+b+c)^3 = 2(3b)^3 = 54b^3 \\
\text{VP} &= 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right] \\
&= 9\left[(2b-c)^2(b+c) + b^2(2b-c+c) + c^2(2b-c+b)\right] \\
&= 9\left[(4b^2 - 4bc + c^2)(b+c) + b^2(2b) + c^2(3b-c)\right] \\
&= 9\left[4b^3 - 4b^2c + bc^2 + 4b^2c - 4bc^2 + c^3 + 2b^3 + 3bc^2 - c^3\right] \\
&= 9\cdot(6b^3) = 54b^3 = \text{VT}.
\end{aligned}$$

Vậy $2(a+b+c)^3 = 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right]$ (đpcm).

④ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b \Rightarrow a=2b-c$.
Do đó

$$\begin{aligned} a^2-bc &= (2b-c)^2-bc = 4b^2-5bc+c^2 \\ b^2-ca &= b^2-c\cdot(2b-c) = b^2-2bc+c^2 \\ c^2-ab &= c^2-b\cdot(2b-c) = -2b^2+bc+c^2. \end{aligned}$$

Nhận xét

$$(a^2-bc)+(c^2-ab) = (4b^2-5bc+c^2)+(-2b^2+bc+c^2) = 2b^2-4bc+2c^2 = 2(b^2-2bc+c^2) = 2(b$$

Vậy ba số: a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab là một cấp số cộng.

⑤ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b \Rightarrow a=2b-c$.
Xét

$$\begin{aligned} 2(a^2+ac+c^2)-(a^2+ab+b^2) &= a^2+a(2c-b)+2c^2-b^2 \\ &= (2b-c)^2+(2b-c)(2c-b)+2c^2-b^2 \\ &= b^2+bc+c^2 \\ \Rightarrow (b^2+bc+c^2)+(a^2+ab+b^2) &= 2(a^2+ac+c^2). \end{aligned}$$

Vậy ba số: $b^2+bc+c^2, a^2+ac+c^2, a^2+ab+b^2$ cũng là một cấp số cộng.

⑥ Vì ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b \Rightarrow a-b=b-c=\dfrac{1}{2}(a-c)$.
Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{a-b} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Vậy ba số: $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}; \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, (a,b,c>0)$ cũng là một cấp số cộng.

□

BÀI 22. Cho ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác không. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{b+c}; \dfrac{1}{c+a}; \dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.
Vì ba số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $a^2+c^2=2b^2$.
Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b} &\Leftrightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} = \frac{b-c}{(c+a)(a+b)} \\ &\Leftrightarrow a^2-b^2 = b^2-c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2+c^2 = 2b^2. \end{aligned}$$

Vậy ba số: $\dfrac{1}{b+c}; \dfrac{1}{c+a}; \dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành cấp số cộng. □

BÀI 23. Cho tam giác ABC có $\tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2}, \tan\dfrac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2} &\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\\
&\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{\cos B+1}{2}=\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow \cos B+1=2\sin^2\frac{B}{2}+2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \cos B+1=1-\cos B+\cos A+\cos C\\
&\Leftrightarrow 2\cos B=\cos A+\cos C.
\end{aligned}$$

Vậy $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. □

BÀI 24. Cho tam giác ABC có $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba cạnh: a, b, c theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2} &\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\\
&\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\\
&\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}=2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin B=-\cos\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)-\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\right]\\
&\Leftrightarrow \sin B=-\sin B+2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C\\
&\Leftrightarrow 2b=a+c.
\end{aligned}$$

Vậy ba cạnh: a, b, c theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. □

BÀI 25. Tìm tham số m để phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng trong các trường hợp sau:

① $f(x)=x^4-2mx^2+2m-1$. **ĐS:** $m=5$ hoặc $m=\frac{5}{9}$

② $f(x)=x^4+2(m+1)x^2+4$. **ĐS:** $m=-\frac{13}{3}$

③ $f(x) = x^4 + (3m+5)x^2 + (m+1)^2$. **ĐS:** không có m thỏa

④ $f(x) = x^4 - 10mx^2 + 9m$. **ĐS:** $m = 1$

Lời giải.

① Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \qquad (1).$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 2m \\ 9t_1^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (nhận)} \\ m = \dfrac{5}{9} \text{ (nhận).} \end{cases}$$

Vậy với $m \in \left\{\dfrac{5}{9}; 5\right\}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

② Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2(m+1)t + 4 = 0 \qquad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4 > 0 \\ -2(m+1) > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -2(m+1) \\ t_1 t_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -2(m+1) \\ 9t_1^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{2}{3} \\ 10t_1 = -2(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{13}{3} \text{ (nhận).}$$

Vậy với $m = -\dfrac{13}{3}$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

③ Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (3m+5)t + (m+1)^2 = 0 \qquad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+5)^2 - 4(m+1)^2 > 0 \\ -(3m+5) > 0 \\ (m+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > -\dfrac{7}{5} \end{array}\right. \\ m < -\dfrac{5}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -(3m+5) \\ t_1 t_2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -(3m+5) \\ 9t_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{3m+5}{10} \\ 9t_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \text{ (loại)} \\ m = -\dfrac{25}{19} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy không có giá trị m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

④ Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 10mt + 9m = 0 \qquad (1)$$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm t_1, t_2 phân biệt dương phân biệt, tức là $0 < t_1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 9m > 0 \\ 10m > 0 \\ 9m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{9}{25} \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{9}{25}.$$

Đặt $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$, ta có $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 10m \\ t_1 t_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 10m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 1 \text{ (nhận).} \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì $m = 1$.

□

BÀI 26. Tìm tham số m để phương trình: $x^3-(3m+1)x^2+2mx=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng ? **ĐS:** $m=-\dfrac{1}{3}$

Lời giải.

Ta có $x^3-(3m+1)x^2+2mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-(3m+1)x+2m=0 \quad (1). \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ 2m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2-2m+1>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2+(m-1)^2>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0.$$

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và $x_3=0$, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=3m+1 \\ x_1x_2=2m \end{cases}$ (I).

Do vai trò của x_1, x_2 như nhau, ta chỉ cần xét hai trường hợp sau

TH1: x_1, x_2 cùng dương hoặc cùng âm, khi đó $x_1+x_3=2x_2 \Rightarrow x_1=2x_2$. Kết hợp với (I), ta có

$$\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=3m+1 \\ x_1x_2=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_2=\dfrac{1}{3}(3m+1) \\ x_1x_2=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_2=\dfrac{1}{3}(3m+1) \\ (3m+1)^2=9m \quad (*). \end{cases}$$

$(*) \Leftrightarrow 9m^2-3m+1=0 \Rightarrow$ vô nghiệm, do đó không có m thỏa.

TH2: x_1 và x_2 trái dấu, x_3 nằm giữa, khi đó $x_1+x_2=2x_3 \Rightarrow x_1=-x_2$. Kết hợp với (I) ta có

$$\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_1+x_2=3m+1 \\ x_1x_2=2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ 0=3m+1 \\ -x_1^2=2m \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3} \text{ (nhận).}$$

Với $m=-\dfrac{1}{3}$ phương trình đã cho có ba nghiệm lập thành một cấp số cộng. □

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Cấp số nhân). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow n\geq 2,\ u_n=u_{n-1}\cdot q.$$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân và $q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $n\geq 1$.

! — Khi $q=1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

— Khi $q=0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1,0,0,0,\ldots,0,\ldots$

— Khi $u_1=0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0,0,0,0,\ldots,0,\ldots$

Định lí 1 (Số hạng tổng quát của cấp số nhân). *Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 2$.*

! Nếu (u_n) là cấp số nhân với các số hạng khác 0 thì

$$u_m = u_k \cdot q^{m-k},\ k < m,\ \ q^{m-k} = \frac{u_m}{u_k},\ k < m$$

Định lí 2 (Tính chất các số hạng của cấp số nhân). *Trong cấp số nhân (u_n), bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u^2{}_k = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, k \geq 2$.*

! Nếu a, b, c là ba số khác 0 thì "a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$ ".

! Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} \cdot u_{m+k}, k < m$.

Định lí 3 (Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân). *Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.*

— *Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.*

— *Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$.*

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

① Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$. **ĐS:** Là cấp số nhân có $u_1 = -27, q = 9$

② Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$. **ĐS:** Không là cấp số nhân

Lời giải

① Ta có $u_n \neq 0$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -27$, công bội $q = 9$.

② Dãy số (u_n) có $u_1 = 5, u_2 = 250, u_3 = 9375$ và $u_2^2 \neq u_1 \cdot u_3$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

□

VÍ DỤ 2. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. **ĐS:** $a = 3, b = 1$

Lời giải

— Ta có $a, a+2b, 2a+b$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a+2b=\dfrac{a+2a+b}{2} \Leftrightarrow a=3b$ (1).

— Ta có $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow (ab+5)^2=(b+1)^2\cdot(a+1)^2$ (2).

— Từ (1), (2) suy ra

$$(3b^2+5)^2=[(b+1)(3b+1)]^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3b^2+5=3b^2+4b+1 \\ 3b^2+5=-(3b^2+4b+1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} b=1 \\ 6b^2+4b+6=0. \text{ (Vô nghiệm)} \end{bmatrix}$$

— Vậy $b=1, a=3$ thỏa mãn.

□

VÍ DỤ 3. Một cấp số nhân có tám số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó. **ĐS:** 4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2

Lời giải

Giả sử cấp số nhân có số hạng đầu u_1, công bội q. Ta có

$$\begin{cases} u_1=4374 \\ u_8=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4374 \\ u_1\cdot q^7=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4374 \\ q^7=\dfrac{1}{2187} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=4374 \\ q=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Cấp số nhân cần tìm là 4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2. □

VÍ DỤ 4. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết

① $\begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_5-u_3=144. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1=12, q=2$

② $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1=1, q=3$

Lời giải

① Ta có

$$\begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_5-u_3=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4-u_2=72 \\ u_4\cdot q-u_2\cdot q=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1\cdot q^3-u_1\cdot q=72 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=2 \\ u_1=\dfrac{72}{q^3-q}=\dfrac{72}{6}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=12 \\ q=2. \end{cases}$$

② Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_1\cdot q^3+u_2\cdot q^3+u_3\cdot q^3=351 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ q^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ q=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{13}{1+q+q^2}=\dfrac{13}{13}=1 \\ q=3. \end{cases}$$

□

VÍ DỤ 5. Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366. **ĐS:** $S = 59040$

Lời giải

— Giả sử cấp số nhân có n số hạng, số hạng đầu u_1, công bội q.

— Ta có $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{54}{18} = 3$.

— Ta có $u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 2187 = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$.

— Tổng các số hạng là $S_8 = u_1 \cdot \dfrac{1-q^8}{1-q} = 18 \cdot \dfrac{1-3^8}{1-3} = 59040$.

Chú ý: Có thể dùng công thức tính tổng $S = \dfrac{u_đ - u_c}{1-q} + u_c = \dfrac{18 - 39366}{1-3} + 39366 = 59040$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau

① $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 3, q = 2$

② $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 5$ hoặc $q = \dfrac{1}{2}, u_1 = 160$

③ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = \dfrac{1215}{19}, q = \dfrac{2}{3}$

④ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 2$ hoặc $q = \dfrac{1}{2}, u_1 = 8$

⑤ $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5. \end{cases}$ **ĐS:** $u_1 = 1, \left[\begin{array}{l} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2} \end{array}\right.$ hoặc $u_1 = 2, \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

⑥ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{2}, u_1 = 4$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_1 \cdot q + u_5 \cdot q = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 51 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{51}{q^4 + 1} = \dfrac{51}{17} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2. \end{cases}$$

② Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_6=165 \\ u_3+u_4=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1\cdot q^5=165 \\ u_1\cdot q^2(1+q)=60 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^5\right)=165 \\ \dfrac{q^4-q^3+q^2-q+1}{q^2}=\dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^5\right)=165 \\ 4q^4-4q^3-7q^2-4q+4=0. \end{cases}$$

Xét phương trình $4q^4-4q^3-7q^2-4q+4=0 \Leftrightarrow 4\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-4\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-7=0.$

Đặt $q+\dfrac{1}{q}=t$, với $|t|\geq 2$, ta có $4t^2-4t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=-\dfrac{3}{2}. \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Ta có $t=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{2} \\ q=2. \end{array}\right.$

— Với $q=2$ thì $u_1=\dfrac{165}{q^5+1}=5.$

— Với $q=\dfrac{1}{2}$ thì $u_1=\dfrac{165}{q^5+1}=160.$

③ Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=135 \\ u_4+u_5+u_6=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=135 \\ u_1\cdot q^3+u_2\cdot q^3+u_3\cdot q^3=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=135 \\ q^3=\dfrac{8}{27} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=135 \\ q=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\dfrac{135}{1+q+q^2}=\dfrac{1215}{19} \\ q=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

④ Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1\cdot u_2\cdot u_3=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_2\cdot(u_1\cdot u_3)=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_2^3=64 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_2}{q}+u_2+u_2\cdot q=14 \\ u_2=4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{q}+1+q=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

— Với $q=2$ thì $u_1=2.$

— Với $q=\dfrac{1}{2}$ thì $u_1=8.$

⑤ Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1^2+u_3^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3=3-u_1 \\ u_1^2+(3-u_1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3=3-u_1 \\ 2u_1^2-6u_1+4=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=1 \\ u_1=2. \end{array}\right.$$

— Với $u_1 = 1$ thì $q^2 + 1 = 3$, do đó $\left[\begin{array}{l} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$

— Với $u_1 = 2$ thì $q^2 + 1 = \dfrac{3}{2}$, do đó $\left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$

⑥ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 7 - u_2 \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1u_3 = 21 - u_2^2. \end{cases}$

Suy ra $(7 - u_2)^2 - 2u_2^2 = 21 - u_2^2 \Leftrightarrow u_2 = 2$.

Khi đó

$$u_1 + u_2 + u_3 = 7 \Leftrightarrow \frac{u_2}{q} + u_2 + u_2 \cdot q = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

— Với $q = 2$ thì $u_1 = 1$.

— Với $q = \dfrac{1}{2}$ thì $u_1 = 4$.

□

BÀI 2. Tìm a, b biết rằng $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. **ĐS:** $(1;1); (-1+\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}); (-1-\sqrt{2}; -3-2\sqrt{2})$

Lời giải.

Do $1, a, b$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng nên ta có phương trình

$$1 + b = 2a. \quad (1)$$

Do $1, a^2, b^2$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân nên ta có phương trình

$$b^2 = a^4. \quad (2)$$

Từ $(1) \Rightarrow b = 2a - 1 \quad (3)$. Thay vào (2), ta được

$$a^4 = (2a-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a^2 + 2a - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \pm \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Thay a vào (3), ta có

— Với $a = 1 \Rightarrow b = 1$.

— Với $a = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 + 2\sqrt{2}$.

— Với $a = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 - 2\sqrt{2}$.

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn là $(1;1); (-1+\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}); (-1-\sqrt{2}; -3-2\sqrt{2})$. □

BÀI 3. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó. **ĐS:** $(80;40;20;10)$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có $u_1 = 160, u_6 = 5$. Do $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \dfrac{u_6}{u_1} = \dfrac{5}{160} = \dfrac{1}{32} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$.

Vậy 4 số cần tìm là $u_2 = u_1 \cdot q = 80, u_3 = u_2 \cdot q = 40, u_4 = u_3 \cdot q = 20, u_5 = u_4 \cdot q = 10$. □

BÀI 4. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được 1 cấp số cộng. Tìm 3 số đó. **ĐS:** $(5;15;45)$

Lời giải.

Gọi ba số cần tìm là $0 < x < y < z$. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ xz=y^2 \\ (x-1)+(z-19)=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=65 & (1) \\ xz=y^2 & (2) \\ x+z-20=2y. & (3) \end{cases}$$

Từ $(1) \Rightarrow x+z=65-y$, thay vào (3) được

$$65-y-20=2y \Leftrightarrow 3y=45 \Leftrightarrow y=15.$$

Từ (2) và (3) suy ra $\begin{cases} x+z=50 \\ xz=225 \end{cases} \Rightarrow x,z$ là nghiệm của phương trình $t^2-50t+225=0 \Rightarrow t=5$, $t=45$.

Suy ra $x=5, z=45$. Vậy 3 số cần tìm là $(5;15;45)$. □

BÀI 5. Tính tổng:

① $S_n = 2+2^2+2^3+\cdots+2^n$. **ĐS:** $S_n = 2^{n+1}-2$

② $S_n = \left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(4+\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(2^n+\dfrac{1}{2^n}\right)^2$. **ĐS:** $S_n = 2n+\dfrac{4}{3}(4^n-1)+\dfrac{4^n-1}{3\cdot 4^n}$

Lời giải.

① Tổng $S_n = 2+2^2+2^3+\cdots+2^n$ gồm n số hạng lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=2$, công bội $q=2$.
Do đó $S_n = u_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q} = 2\cdot\dfrac{1-2^n}{1-2} = 2^{n+1}-2$.

② Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2 \\ &= \left(4+2+\frac{1}{4}\right)+\left(4^2+2+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left(4^n+2+\frac{1}{4^n}\right) \\ &= 2n+(4+4^2+\cdots+4^n)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right) \\ &= 2n+4\cdot\frac{1-4^n}{1-4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{4^n}}{1-\dfrac{1}{4}} \\ &= 2n+\frac{4}{3}(4^n-1)+\frac{4^n-1}{3\cdot 4^n}. \end{aligned}$$

□

BÀI 6. Tìm m để phương trình $x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân. **ĐS:** $m=\pm\sqrt{6}$, $m=-\dfrac{4}{3}$, $m=-\dfrac{9}{2}$

Lời giải.

Ta có

$$x^3+(5-m)x^2+(6-5m)x-6m=0 \Leftrightarrow (x-m)(x^2+5x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=-2 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Để 3 nghiệm của phương trình lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-2)\cdot(-3)=m^2 \\ -3m=(-2)^2 \\ -2m=(-3)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm\sqrt{6} \\ m=-\dfrac{4}{3} \\ m=-\dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$

□

BÀI 7. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả,· Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa? **ĐS:** 127 quả

Lời giải.

Gọi x là số xoài bác nông dân đã thu hoạch được, (điều kiện $0<x\in\mathbb{Z}$).

— Số xoài bán cho người thứ nhất là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2}$ $\Rightarrow$ số xoài còn lại là $x-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x-(2^1-1)}{2}$.

— Số xoài bán cho người thứ hai là $\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{4}$ $\Rightarrow$ số xoài còn lại là $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{x-(2^2-1)}{2^2}$.

— Số xoài bán cho người thứ ba là $\dfrac{x-3}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{8}$ $\Rightarrow$ số xoài còn lại là $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{x-7}{8}=\dfrac{x-(2^3-1)}{2^3}$.

— Số xoài bán cho người thứ tư là $\dfrac{x-7}{16}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{16}$ $\Rightarrow$ số xoài còn lại là $\dfrac{x-7}{8}-\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{x-15}{16}=\dfrac{x-(2^4-1)}{2^4}$.

— Lập luận tương tự. Số xoài bán cho người thứ 7 là $\dfrac{x+1}{2^7}$. Số xoài còn lại là $\dfrac{x-(2^7-1)}{2^7}=\dfrac{x-127}{2^7}$.

Sau khi bán cho người thứ 7, bác nông dân không còn quả xoài nào nữa nên ta có $x=127$ (quả).

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 8. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau

① $\begin{cases} u_3+u_5=90 \\ u_2-u_6=240. \end{cases}$ **ĐS:** $q=\dfrac{1}{3}, u_1=729$ hoặc $q=-3, u_1=1$

② $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 5$ hoặc $q = -2, u_1 = 5$

③ $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$ **ĐS:** $q = -2, u_1 = 1$ hoặc $q = -\dfrac{1}{2}, u_1 = 64$

④ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$ **ĐS:** $q = 2, u_1 = 1$ hoặc $q = \dfrac{1}{2}, u_1 = 8$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 90 \\ u_2 - u_2 \cdot q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q \left(1 + q^2\right) = 90 \\ u_2 \cdot \left(1 - q^4\right) = 240 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \dfrac{240}{1 - q^4} \\ \dfrac{1 - q^2}{q} = \dfrac{240}{90} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{240}{q\left(1 - q^4\right)} \\ 3q^2 + 8q - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{3}, u_1 = 729 \\ q = -3, u_1 = 1. \end{array}\right.$$

② Ta có

$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 \cdot q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \\ u_1 \left(1 + q^6\right) = 325 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + 1 = 5 \\ u_1 = \dfrac{325}{1 + q^6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -2 \\ u_1 = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

③ Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_2 \cdot q^2 + u_2 \cdot q^4 = -42 \\ u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \left(1 + q^2 + q^4\right) = -42 \\ u_2 \left(q + q^3\right) = 20. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(q + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0.$$

Đặt $q + \dfrac{1}{q} = t$, với $|t| \geq 2$, ta có $10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{5}{2} \\ t = \dfrac{2}{5}. \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Ta có $t = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow q + \dfrac{1}{q} = -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2. \end{array}\right.$

— Với $q = -2$ thì $u_2 = -2$, do đó $u_1 = 1$.

— Với $q = -\dfrac{1}{2}$ thì $u_2 = -32$, do đó $u_1 = 64$.

④ Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1\cdot q+u_1\cdot q^2+u_1\cdot q^3=15 \\ u_1^2+u_1^2\cdot q^2+u_1^2\cdot q^4+u_1^2\cdot q^6=85 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=15 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q)\left(1+q^2\right)=15 \\ u_1^2\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)=85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2\left(1+q^2\right)^2=225 \\ u_1^2\left(1+q^2\right)\left(1+q^4\right)=85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2\left(1+q^2\right)^2=225 \\ \dfrac{1+q^4}{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}=\dfrac{85}{225}=\dfrac{17}{45}. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1+q^4}{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}=\frac{17}{45} &\Leftrightarrow 45+45q^4=\left(17+17q^2\right)\left(1+2q+q^2\right) \\ &\Leftrightarrow 45+45q^4=17+34q+17q^2+17q^2+34q^3+17q^4 \\ &\Leftrightarrow 28q^4-34q^3-34q^2-34q+28=0 \\ &\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-34\left(q+\frac{1}{q}\right)-34=0. \end{aligned}$$

Đặt $q+\dfrac{1}{q}=t$, với $|t|\geq 2$, ta có $28t^2-34t-90=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2} \\ t=-\dfrac{9}{7}. \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Ta có $t=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{2} \\ q=2. \end{array}\right.$

— Với $q=2$ thì $u_1=\dfrac{15}{(1+q)\left(1+q^2\right)}=1.$

— Với $q=\dfrac{1}{2}$ thì $u_1=\dfrac{15}{(1+q)\left(1+q^2\right)}=8.$

□

BÀI 9. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó. **ĐS:** $(3;7;11)$ và $(18;7;-4)$

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=21 \\ x+z=2y \\ (x+2)(z+9)=(y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x+z=14 & (1) \\ (x+2)(z+9)=100. & (2) \end{cases}$$

Từ $(1) \Rightarrow z=14-x$ (3). Thay vào (2) ta được phương trình

$$(x+2)(23-x)=100 \Leftrightarrow x^2-21x+54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=18. \end{array}\right.$$

— Với $x=3 \Rightarrow z=11.$

— Với $x=18 \Rightarrow z=-4.$

Vậy bộ ba số cần tìm là $(3;7;11)$ và $(18;7;-4)$. □

BÀI 10. Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. **ĐS:** $(81;27;9;3)$

Lời giải.

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có $u_1 = 243$, $u_6 = 1$. Do $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \dfrac{u_6}{u_1} = \dfrac{1}{243} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow q = \dfrac{1}{3}$.

Vậy 4 số cần tìm là $u_2 = u_1 \cdot q = 81$, $u_3 = u_2 \cdot q = 27$, $u_4 = u_3 \cdot q = 9$, $u_5 = u_4 \cdot q = 3$. □

BÀI 11. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó. **ĐS:** $(2;14;98)$

Lời giải.

Gọi 3 số cần tìm là x, y, z. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z = 114 & (1) \\ xz = y^2. & (2) \end{cases}$$

Lại có cấp số cộng có $u_1 = x$, $u_4 = y$, $u_{25} = z$. Gọi d là công sai của cấp số cộng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{25} = u_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3d & (3) \\ z = x + 24d. & (4) \end{cases}$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ x(x+24d) = (x+3d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9d = 38 & (5) \\ d(2x-d) = 0. & (6) \end{cases}$$

Từ $(6) \Rightarrow d = 0$ hoặc $d = 2x$. Thay vào (5)

— Với $d = 0 \Rightarrow x = 38 \Rightarrow y = z = 38$, loại do điều kiện ba số khác nhau.

— Với $d = 2x \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow y = 14, z = 98$.

Vậy các số cần tìm là $(2;14;98)$. □

BÀI 12. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình $x^3 - (m^2+3)x^2 + (m^2+3)x - 1 = 0$ luôn có ba nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 - (m^2+3)x^2 + (m^2+3)x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^3-1) - (m^2+3)(x^2-x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)\left[x^2 - (m^2+2)x + 1\right] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2 - (m^2+2)x + 1 = 0. \quad (*) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Phương trình $(*)$ có $\Delta = (m^2+2)^2 - 4 \cdot 1 = m^2(m^2+4) \geq 0\ \forall m$. Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 \cdot x_2 = 1$. Suy ra phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 1$ và $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = x_3^2$.

Vậy phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân. □

CHƯƠNG 4 GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$.

> **VÍ DỤ 1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Định nghĩa 2. Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $|u_n - a|$ có giới hạn bằng 0.
Nghĩa là: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

> **VÍ DỤ 2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$.

2 CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1.

— $\lim \dfrac{1}{n} = 0; \lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ *với* k *là số nguyên dương.*

— $\lim q^n = 0$ *nếu* $|q| < 1$.

Định lí 2.

— *Nếu* $\lim u_n = a$ *và* $\lim v_n = b$ *thì* $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$, $lim\ (u_n.v_n) = a.b$, $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ *(nếu* $b \neq 0$*).*

— *Nếu* $u_n \geq 0$ *với mọi* n *và* $\lim u_n = a$ *thì* $a \geq 0$ *và* $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3 TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Định nghĩa 3. Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Định lí 3. *Cho cấp số nhân lùi vô hạn* (u_n)*, ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là*

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC

Định nghĩa 4.

— Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

— Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Định lí 4.
a) Nếu $\lim u_n = a$ *và* $\lim v_n = \pm\infty$ *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ *và* $v_n > 0$ *với mọi* n *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ *và* $\lim v_n = a > 0$ *thì* $\lim u_n v_n = +\infty$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1.1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Để chứng minh $\lim u_n = L$ *ta chứng minh* $\lim (u_n - L) = 0$.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$ b. $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. Ta có $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1} - (-1)\right) = \lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right)$. Vì $0 \le \left|\dfrac{1}{n^3+1}\right| < \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Mà $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$ nên suy ra $\lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right) = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b. Ta có $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n} - \dfrac{1}{2}\right) = \lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}$
Vì $0 < \left|\dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}\right| < \dfrac{5n+5}{2n(n+1)} = \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \left(\dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{5}{2}.\lim \dfrac{1}{n} = 0$
Nên suy ra $\lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)} = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$ b. $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. Ta có $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.
Vì $0\le\left|\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right|=\dfrac{|-\sin 3n|}{3^n}\le\dfrac{1}{3^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Mà $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)=0$. Do đó $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

b. Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\dfrac{2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)}{2}=\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}$

$$\text{Vì } 0\le\left|\frac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\right|\le\frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\le\frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2}+2n\right)}$$
$$=\frac{1}{8}.\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Mà $\lim\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}=0$.
Do đó $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh rằng

a. $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

b. $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$

c. $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

d. $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=\lim\dfrac{n-8}{n^2+4}$. Vì $0\le\left|\dfrac{n-8}{n^2+4}\right|\le\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.
Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$.

b. Ta có $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim\dfrac{-28}{n+5}$
Vì $\left|\dfrac{-28}{n+5}\right|<\dfrac{28}{n}$. Mà $\lim\dfrac{28}{n}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$.

c. Ta có $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=\lim\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}$
Vì $0<\left|\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}\right|<\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}<\dfrac{3.7^n}{8^n}=3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.
Mà $\lim 3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$.

d. Ta có $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=\lim\dfrac{3^n}{5^n+3^n}$.
vì $0<\left|\dfrac{3^n}{5^n+3^n}\right|<\dfrac{3^n}{5^n+3^n}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$
Mà $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng

a. $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. $\lim\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$

c. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}=0$

d. $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right)=0$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=\lim\dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}$
Vì $0\le\left|\dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}<\dfrac{1}{2n+2n}=\dfrac{1}{4n}$
Mà $\lim\dfrac{1}{4n}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=0$. Do đó $\lim\left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. Ta có $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=\lim\dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}$
Vì $0\le\left|\dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Mà $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$.

c. Ta có $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}\right|=\left|\dfrac{n^2+2n-n^2}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\right|=\left|\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n^2}+n}=\dfrac{1}{n}$.
Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}=0$.

d. Ta có

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right| &= \left|\frac{n^3+2n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right|\\ &= \left|\frac{2n}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right|<\frac{2n}{3n^2}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$. Do đó $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right)=0$

□

BÀI 3. Chứng minh rằng

a. $\lim\dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n}=0$

b. $\lim\dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n}=0$

Lời giải.

a. Ta có $\left|\dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n}\right| \le \dfrac{6^n+5^n}{2.7^n} \le \dfrac{2.6^n}{2.7^n} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.
Mà $\lim\left(\dfrac{6}{7}\right)^n = 0$ nên $\lim\dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n} = 0$.

b. Ta có $\left|\dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n}\right| \le \left|\dfrac{4n+1}{4n(n+2)}\right| \le \dfrac{4(n+2)}{4n(n+2)} = \dfrac{1}{n}$
Mà $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n} = 0$.

□

DẠNG 1.2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức

Tính giới hạn $\lim\dfrac{f(n)}{g(n)}$ *trong đó* $f(n)$ *và* $g(n)$ *là các đa thức bậc* n.

— *Bước 1: Đặt* n^k, n^i *với* k *là số mũ cao nhất của đa thức* $f(n)$ *và* i *là số mũ cao nhất của đa thức* $g(n)$ *ra làm nhân tử chung.*

— *Đơn giản. Sau đó áp dụng kết quả* $\lim\dfrac{1}{n^k} = 0$.

DẠNG 1.3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n

— *Bước 1: Đưa biểu thức về cùng một số mũ* n.

— *Bước 2: Chia tử và mẫu số cho* a^n *trong đó* a *là số có trị tuyệt đối lớn nhất.*

— *Bước 3: Áp dụng kết quả "Nếu* $|q|<1$ *thì* $\lim q^n = 1$".

VÍ DỤ 1. Tính $\lim\dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2}$

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2} = \lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)}{n^3\left(2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)} = \lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-4}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}} = -2$ □

VÍ DỤ 2. Tính $\lim\dfrac{n^3-7n}{1-2n^2}$.

Lời giải

$\lim\dfrac{n^3-7n}{1-2n^2} = \lim n.\dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-2} = -\infty$.

Do $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ □

VÍ DỤ 3. Tính $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$.

Lời giải

$$\lim \frac{n+2}{n^2+n+1} = \lim \frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 0.$$ □

VÍ DỤ 4. Tính $\lim \dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}$.

Lời giải

$$\lim \frac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n} = \lim \frac{5.5^n-4^n+1}{2.5^n-6^n} = \lim \frac{5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}{2.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-1} = 0\,.$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3}$.

② $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

Lời giải.

① Chia cả tử và mẫu cho n có bậc lớn nhất. Ta có : $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3} = \lim \dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{3}{2}$.

② Tương tự: $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n} = \lim \dfrac{4-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}} = 2$.

□

BÀI 2. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

② $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Lời giải.

① Ta có : $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=1.$

② Tương tự: $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=0.$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}$.

Lời giải.

Ta có :

$$\lim \frac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}=\lim \frac{\sqrt{n^4\left(4+\dfrac{2}{n^3}\right)}-3n^2}{\sqrt{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}-n}$$

$$=\lim \frac{n^2\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Vì $\lim \sqrt{n}=+\infty$ và $\lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{2-3}{1}=-1.$

Do đó : $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}=-\infty.$ □

BÀI 4. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}$.

② $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$.

③ $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải.

① Ta có : $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}=\lim \dfrac{7.\dfrac{5^n}{7^n}-2}{\dfrac{5^n}{7^n}-5}=\dfrac{2}{5}.$

② Tương tự: $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim \dfrac{4.\dfrac{3^n}{7^n}+7}{2.\dfrac{5^n}{7^n}+1}=7.$

③ $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim \dfrac{4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+36\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n+1}=0.$

□

BÀI 5. Tính giới hạn của

a) $\lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1}$.

b) $\lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

Lời giải.

a) Vì $\left|\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1}\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{n^2}$ mà $\lim \dfrac{\sqrt{2}}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1} = 0.$

b) Vì $\left|\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}\right| \le \dfrac{2}{n}$ mà $\lim \dfrac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1} = 0.$

□

BÀI 6. Tính giới hạn của

a) $A = \lim \left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

b) $B = \lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$.

Lời giải.

① $A = \lim \left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

$= \lim \left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]$

$= \lim \left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right] = 1.$

② $B = \lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$

$= \lim \left[\left(\dfrac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2.1}\right) + \left(\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3.2}\right) + ... + \left(\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right)\right]$

$= \lim \left[\left(\sqrt{1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]$

$= \lim \left[1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 1.$

□

BÀI 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n+1}, \forall n \ge 1 \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy. Tính $\lim u_n$.

Lời giải.

$u_n \ne 0, \forall n \ge 1$ nên

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{u_n}.$$

Đặt $a_n = \dfrac{1}{u_n}$ ta thu được dãy (a_n): $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = 2(2n+1) + a_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Từ đó ta có

$$a_{n+1} = 2(2n+1) + a_n = 2(2n+1) + 2[2(n-1)+1] + a_{n-1} = a_1 + 4(1+2+...+n) + 2n$$

Suy ra $a_{n+1} = \dfrac{3}{2} + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 2n = \dfrac{4n^2+8n+3}{2} \Rightarrow a_n = \dfrac{4n^2-5}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{4n^2-5}$.

Vậy $\lim u_n = \lim \dfrac{2}{4n^2-5} = 0$. □

BÀI 8. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \dfrac{n^2}{a_n} - (n+1) \end{cases} ; \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

. Tìm $\lim a_n$.

Lời giải.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{4}$ ta có $y_1 = 1$ và

$$(n+2)^2\left(y_{n+1} - \frac{1}{4}\right) = n^2\left(y_n - \frac{1}{4}\right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} y_n$$

Do đó

$$y_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 ... \left(\frac{1}{3}\right)^2 y_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \Rightarrow a_n = \frac{4n^2(n+1)^2}{16 - n^2(n+1)^2}$$

Vậy $\lim a_n = -4$. □

BÀI 9. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} - 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải.

Trước hết ta dễ thấy $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geq 2$. Ta lại có

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| &= \left|\left(\frac{u_n^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2} - 1\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})| \cdot |u_n - (1-\sqrt{3})| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})|. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như thế ta được

$$|u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n, \forall n.$$

Mà $\lim \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 1 - \sqrt{3}$. □

BÀI 10. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + 0 \\ u_2 &= u_1 + 1 \\ u_3 &= u_2 + 2 \\ &\cdots \\ u_n &= u_{n-1} + n - 1. \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$u_n = u_1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Từ đó $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2}$ nên $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lim \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = 1.$ □

BÀI 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2017 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 3}{4} \text{ với mọi } n \geq 1 \end{cases}$

Với mỗi số nguyên dương n đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_i + 1} + \dfrac{2}{x_i^2 + 1} \right)$.

Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.
Ta có $x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n^4 - 1}{4} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}{4}, \forall n \geq 1.$
Kết hợp $x_1 = 2017$ ta có $x_n > 2017, \forall n \geq 2.$
Ta có $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4 - 4x_n + 3}{4} = \dfrac{(x_n - 1)^2 (x_n^2 + 2x_n + 3)}{4} > 0, \forall n \geq 1.$
Suy ra (x_n) là dãy tăng ngặt. Giả sử (x_n) bị chặn trên suy ra (x_n) có giới hạn hữu hạn.
Đặt $\lim x_n = L$ suy ra $L \geq 2017$. Khi đó ta có:

$$L = \frac{L^4 + 3}{4} \Leftrightarrow L^4 - 4L + 3 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2 \left(L^2 + 2L + 3 \right) = 0 \Leftrightarrow L = 1, \text{ vô lý.}$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$.
Ta có $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n^2 + 2x_n + 3)}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)}, \forall n \geq 1.$
Do đó:

$$\frac{1}{x_n + 1} + \frac{2}{x_n^2 + 1} = \frac{(x_n^2 + 2x_n + 3)}{(x_n + 1)(x_n^2 + 1)} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1$$

Suy ra

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i + 1} + \frac{2}{x_i^2 + 1} \right) = \frac{1}{2016} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1.$$

Do $\lim \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = \dfrac{1}{2016}$. □

DẠNG 1.4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ

— $\lim n^k = +\infty, k > 0.$

— $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0, k > 0.$

— $\lim a^n = 0, -1 < a < 1.$

— $\lim a^n = +\infty, a > 1.$

— *Nếu (u_n) là CSN lùi vô hạn với công bội q, ta có* $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{u_1}{1-q}.$

⚠ — $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty;$

— $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty;$

— $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty;$

— $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty.$

VÍ DỤ 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim(2^n + 3^n);$ b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right].$

Lời giải

a) $\lim(2^n + 3^n) = \lim 3^n \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right] = +\infty.$

b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right] = \lim 4^n \left[-1 + \left(\dfrac{-2}{4}\right)^n\right] = -\infty.$

□

VÍ DỤ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right);$ b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{2\cdot 5^n + 4^n}\right);$ c) $\lim\left(\dfrac{7^n + 1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right).$

Lời giải

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right) = \lim\left(\dfrac{\dfrac{1}{3^n} + 1}{3 + \dfrac{2^n}{3^n}}\right) = \dfrac{1}{3}.$

b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{3\cdot 5^n + 4^n}\right) = \lim\left(\dfrac{4\cdot \dfrac{3^n}{5^n} - \dfrac{2^n}{5^n}}{2 + \dfrac{4^n}{5^n}}\right) = 0.$

c) $\lim\left(\dfrac{7^n + 1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right) = \lim\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{7^n}}{-2\cdot \dfrac{3^n}{7^n} - 3\cdot \dfrac{6^n}{7^n}}\right) = -\infty.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n}$; b) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7)$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n} = \lim \dfrac{8^n+3\cdot 9^n}{2\cdot 9^n+4^n} = \lim \left(\dfrac{\dfrac{8^n}{9^n}+3}{2+\dfrac{4^n}{9^n}}\right) = \dfrac{3}{2}$.

b)

c) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7) = \lim 4^n\left(2\cdot\dfrac{3^n}{4^n}-4+\dfrac{7}{4^n}\right) = -\infty$.

□

BÀI 2. Tính giới hạn sau $\lim(2\cdot 3^n-n+1)$.

Lời giải.

Ta có: $3^n-n>0$ với $\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó, $\lim(2\cdot 3^n-n+1)\geq \lim(3^n+1)=+\infty$.

Vậy $\lim(2\cdot 3^n-n+1)=+\infty$. □

BÀI 3. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Lời giải.

Đặt $u_n = 1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $v_n = 1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Ta có: $u_n = 1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}} = 1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$. Tương tự, $v_n = 1+\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)$.

Từ đó, $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$, $\lim v_n = \dfrac{5}{3}$. Vậy $\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} = \dfrac{9}{10}$. □

BÀI 4. Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

Lời giải.

Ta có: $\lim \dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n} = \lim \dfrac{1-\dfrac{3}{2}(1-3^n)}{2\cdot 3^{n+1}+2^n} = \dfrac{1}{4}$ □

BÀI 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}, \forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim \dfrac{u_n+1}{u_n+4}$.

Lời giải.

Đặt $v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n+4}$. Ta có: $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}+4} = \dfrac{2(u_n+1)}{5(u_n+4)} = \dfrac{2}{5}v_n = \cdots = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$.

Vậy, ta có $v_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, do đó $\lim \dfrac{u_n+1}{u_n+4} = \lim v_n = 0$. □

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}, \forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2}=\dfrac{1}{2^2}(u_{n-1}-1)=\cdots=\dfrac{1}{2^n}(u_1-1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Do đó, $u_n=\dfrac{1}{2^{n-2}}+1$. Vậy, $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{1}{2^{n-2}}+1\right)=1$. □

DẠNG 1.5. Giới hạn dãy số chứa căn thức

Ta thường gặp hai dạng sau:

Dạng 1. Sử dụng các tính chất giới hạn để tính.

Dạng 2. Dạng vô định, cần nhân lượng liên hợp hoặc thêm bớt hạng tử.

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn

$$\lim\sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}$$

Lời giải

Ta có

$$\lim\sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}=\lim\sqrt{\frac{8+\dfrac{2}{n}}{2-\dfrac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{8+0}{2-0}}=2.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}, n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có:$\lim\sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{9}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}}=\sqrt{\dfrac{2}{1}}=\sqrt{2}$. □

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn:

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)=\lim\frac{4n^2+3n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} \quad (*)$$

$$=\lim\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}=\lim\frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+2n}$$

$$=\lim\frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2\right)}=\lim\frac{3+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2}=\frac{3}{4}.$$

Nhận xét.

— Ở bước $(*)$ ta đã ***nhân biểu thức liên hợp*** của $\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$ để ***khử dạng vô định*** $\infty-\infty$.

— Giới hạn $\lim\dfrac{a}{n^k}=0$, với $a=\text{const}$ lại một lần nữa được sử dụng.

□

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

b) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$.

Lời giải

a) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1}=2.$

b) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\lim\dfrac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\dfrac{1+\sqrt[3]{-1}}{\sqrt{1}+1}=0.$

□

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn:

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n}.$$

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(9+\frac{2}{n^2}\right)}}{n\left(\frac{2}{n}-1\right)}$$
$$= \lim \frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\left(\frac{2}{n}-1\right)} = \lim \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}}{\frac{2}{n}-1} = 1.$$

Nhận xét.

— Trong ví dụ này, ta đã ***rút*** n^k (ở cả tử và mẫu) làm nhân tử chung với k ***là bậc cao nhất của*** n ***ở tử số và mẫu số***.

— Cần chú ý giới hạn quan trọng $\lim \frac{a}{n^k} = 0$, với $a = \text{const}$.

□

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn:
$$\lim \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right) n$$

Lời giải

$$\lim \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right) n$$
$$= \lim \frac{(n+3-n+5)n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}$$
$$= \lim \frac{8n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)}$$
$$= \lim \sqrt{n}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}$$
$$= +\infty. \left(\text{vì } \lim \sqrt{n} = +\infty \text{ và } \lim \frac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}} = \frac{8}{2} = 4 = \text{const}\right).$$

Nhận xét. Cần chú ý giới hạn sau:

$$\text{Nếu } \begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ v_n \longrightarrow c = \text{const} \neq 0 \end{cases} \text{ thì } \lim u_n.v_n = \begin{cases} +\infty & (\text{nếu } c > 0) \\ -\infty & (\text{nếu } c < 0) \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $v_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}}, n \geq 2.$

Lời giải.

a) Ta có: $\lim \sqrt{n^2+1} = \lim \sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})}$;

Vì $\begin{cases} \lim \sqrt{n^2} = +\infty \\ \lim \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1; \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})} = +\infty.,$

Vậy $\lim u_n = +\infty$.

b) Ta có: $\lim \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}} = \lim \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}}$

Vì $\begin{cases} \lim \sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = 1 \\ \lim \sqrt{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}} = 0; \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}} = +\infty.$

Vậy $\lim v_n = +\infty$.

□

BÀI 2. Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2-2n-1}\right)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} &\lim \left(\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2-2n-1}\right) \\ =&\lim \frac{3n^2-3n^2+2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}} \\ =&\lim \frac{2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}} \\ =&\lim \frac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}\right)} \\ =&\lim \frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} \\ =&\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tìm giới hạn

$$\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$$

Lời giải.

Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\lim\frac{(n^2+2n)-n^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}$$
$$=\lim\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-0}+1}=1$$

□

BÀI 4. Tìm giới hạn

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)$$

Lời giải.
Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)=\lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right]$$

Mà $\lim n^2=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)=(\sqrt{0+0}-1)=-1<0$ nên

$$\lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right]=-\infty$$

Vậy $\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)=-\infty$. □

BÀI 5.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$$

Lời giải.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))=\lim\frac{(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))(\sqrt{n^2+3n+2}+n-1)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$$
$$=\lim\frac{(\sqrt{n^2+3n+2})^2-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}=\lim\frac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$$
$$=\lim\frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}=\frac{5}{2}.$$

□

BÀI 6.

$$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$$

Lời giải.

$$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n)=\lim\frac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$
$$=\lim\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=\lim\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=1.$$

□

BÀI 7.

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}$$

Lời giải.

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}} = \lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3})}$$
$$= \lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{-2} = -\infty. \qquad \square$$

BÀI 8.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})$$

Lời giải.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1}) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim \frac{n^2+2n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim \frac{n\left(1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = +\infty. \qquad \square$$

BÀI 9. Tìm giới hạn của dãy (u_n), với

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^3+2} \end{cases}$$

Lời giải.

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $u_n \geq \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*)

Rõ ràng (*) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k \geq \sqrt{k}$

Khi đó ta có

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k^3+2} = \sqrt{u_k^2.u_k+2} \geq \sqrt{u_k^2.\sqrt{k}+2} \quad > \sqrt{u_k^2.1+1} = \sqrt{u_k^2+1} \geq \sqrt{(\sqrt{k})^2+1} = \sqrt{k+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Lấy $M > 0$ tùy ý. Khi đó có số $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m > M$.

Hơn nữa, từ (*) ta có

$$\forall k \in \mathbb{N}, k > m^2 : u_k \geq \sqrt{k} > \sqrt{m^2} = m > M$$

Như vậy, các số hạng của dãy u_n kể từ số hạng thứ m^2+1 trở đi đều lớn hơn M. Do đó $\lim u_n = +\infty$. $\square$

BÀI 10. Tính $\lim \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{n\left(3+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{n\left(3+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$\lim \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\left(3+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

BÀI 11. Tính giới hạn của dãy số sau $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } \lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15} \\
&= \lim \frac{(n^2+1)-(2n^2+4n-4)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})} \\
&= \lim \frac{(n+5)(1-n)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})} \\
&= \lim \frac{1-n}{3(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})} \\
&= \lim \frac{\dfrac{1}{n}-1}{3(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\dfrac{4}{n}-\dfrac{4}{n^2}})} \\
&= \frac{-1}{3(\sqrt{1}+\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Vậy $\lim u_n = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$. □

BÀI 12. Tính giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = (\sqrt{n^2-n+2}-n)$.

Lời giải.

$$\lim u_n = \lim(\sqrt{n^2-n+2}-n) = \lim \frac{n^2-n+2-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \frac{-n+2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \frac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}+n} =$$

$$\lim \frac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n} = \lim \frac{-1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\frac{1}{2}.$$ □

BÀI 13. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}}{n-1} = \lim \frac{n\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} =$$

$$\lim \frac{\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = +\infty.$$ □

BÀI 14. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$.

Lời giải.

a)

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}$$
$$=\lim\frac{-1}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}=0.$$

b)

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+1}-(2n+1)\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}$$
$$=\lim\frac{-4n\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{(4n+1)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}$$
$$=\lim\frac{-4\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}\right)}$$
$$=-\frac{4\left(\sqrt{1}+1\right)}{4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{2}.$$

□

BÀI 15. Tính giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n\right)=\lim\left[\sqrt{n^2+2n+3}-(1-n)\right]=\lim\frac{n^2+2n+3-(1-n)^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}$$
$$=\lim\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}$$
$$=\lim\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}+1-\frac{1}{n}}=2.$$

□

BÀI 16. Tính giới hạn $\lim\sqrt[n]{a}$ với $a>0$.

Lời giải.

Giả sử $a>1$. Khi đó $a=\left[1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]^n>n\left(\sqrt[n]{a}\right)$.

Suy ra $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}\to 0$ nên $\lim\sqrt[n]{a}=1$.

Với $0<a<1$ thì $\frac{1}{a}>1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=1$

Tóm lại ta luôn có : $\lim\sqrt[n]{a}=1$ với $a>0$.

□

BÀI 17. Tính giới hạn

$$\lim(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2})$$

.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2}\right) &= \lim\left[\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)+\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\right]\\ &= \lim\left[\frac{\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}\right.\\ &\qquad \left.+\frac{\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2+n-2}\right)}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\ &= \lim\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}+\frac{2-n}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\ &= \lim\left[\frac{\frac{-3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{n^3}}+1}+\frac{\frac{2}{n}-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}\right]\\ &= 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Suy ra $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ từ đó ta có $\lim u_n=1$.

□

BÀI 19. Tính giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$.

Lời giải.

Sử dụng đánh giá $1<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$ và $\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

Ta được $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=1$ □

BÀI 20. Cho dãy số u_n thỏa:

$$\begin{cases}u_1=3, u_2=6\\ 2u_n=u_{n-1}+u_{n+1}-2;\end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3.$$

Biết rằng u_n có duy nhất một công thức, tính: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2-\sqrt{u_n}}{n+1-\sqrt{u_n+3n-2}}$.

Lời giải.

Dựa vào biểu thức u_n ta tính:

$$\begin{aligned}&u_1=3=1+2=1^2+2;\\ &u_2=6=4+2=2^2+2;\\ &u_3=11=9+2=3^2+2;\\ &\ldots\\ &u_n=n^2+2;\\ &\ldots\end{aligned}$$

Ta dự đoán công thức $u_n = n^2 + 2$, thật vậy:
$\begin{cases} 2u_n = 2n^2 + 4 \\ u_{n-1} + u_{n+1} - 2 = [(n-1)^2 + 2] + [(n+1)^2 + 2] - 2 = 2n^2 + 4; \end{cases}$
Suy ra $u_n = n^2 + 2, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$;
Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2-\sqrt{n^2+2}}{n+1-\sqrt{n^2+3n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{[(n+2)^2-(n^2+2)](n+1+\sqrt{n^2+3n})}{[(n+1)^2-(n^2+3n)](n+2+\sqrt{n^2+2})} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n+2)(n+1+\sqrt{n^2+3n})}{(-n+1)(n+2+\sqrt{n^2+2})} \\ &= -4. \end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$. □

BÀI 21. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$.

Lời giải.

Với a nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{9}{a^2} - 1}$, ta có: $\left| \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2 \right| = \left| \frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right|$
$< \left| \frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{3}{\sqrt{{n_a}^2+1}} < a.$
Suy ra $\lim \left| \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2 \right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} \right) = -2.$ □

BÀI 22. Tính giới hạn của $B = \lim \frac{\sqrt{1+2+...+n} - n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2} + 2n}$.

Lời giải.

Việc đầu tiên ta phải tính tổng của hai dãy số dưới dấu căn
$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Lúc này: $B = \lim \frac{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - n}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 2n} = \lim \frac{n\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} - n}{n\sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}} + 2n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + 2} = \frac{(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}(1+2\sqrt[3]{3})}.$
□

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho khoảng $\mathscr{K}$ chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$ hoặc trên $\mathscr{K} \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
Kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -4$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \to -2$ khi $n \to +\infty$.
Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2-4}{x_n+2} = \lim \dfrac{(x_n+2)\cdot(x_n-2)}{(x_n+2)} = \lim (x_n-2) = -4$.
Do đó $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -4$. □

⚠ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$, *với c là hằng số.*

1.2 Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. ***a)*** *Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$. Khi đó*

— $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

— $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.

— $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = L \cdot M$.

— $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *(nếu $M \neq 0$).*

b) *Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, thì*

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

VÍ DỤ 2. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3.$$ □

1.3 Giới hạn một bên

Định nghĩa 2. — Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.
Số L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
Số L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

Định lí 2. *$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.*

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ nếu } x\neq 1\\ x^2-3 \text{ nếu } x<1\end{cases}$.
Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, và $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (nếu có).

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3\right)=1^2-3=-2$;
$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5\cdot 1+2=7$.
Theo đinh lí 2, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ không tồn tại. □

2 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3. **a)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty}=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.
b) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty}=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(-\infty;1)$ và trên $(1;+\infty)$.
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n < 1$ và $x_n \to -\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2x_n+3}{x_n-1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{3}{x_n}}{1-\dfrac{1}{x_n}} = 2.$

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2.$
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n > 1$ và $x_n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2x_n+3}{x_n-1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{3}{x_n}}{1-\dfrac{1}{x_n}} = 2.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2.$ □

⚠ — *Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:*

$$\lim_{x\to+\infty} c = c;\ \lim_{x\to-\infty} c = c;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^k} = 0;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

— *Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.*

VÍ DỤ 5. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x}{x^2+1}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{3-0}{1+0} = 3.$$ □

3 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

3.1 Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = -\infty$.

3.2 Một vài giới hạn đặc biệt

① $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

② $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

3.3 Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
Ł > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
Ł < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
α	$\pm\infty$	Tùy ý	0
Ł > 0	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
Ł < 0	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, và $x \to -\infty$.

VÍ DỤ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$, vì
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$. □

VÍ DỤ 7. Tính $\lim\limits_{x\to1^-1}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$, vì
$\lim\limits_{x\to1^-}(2x-3) = 2\cdot1-3 = -1 < 0$, và $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0$, $x-1<0\ \forall x<1$. □

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 2.1. Giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{0}{0}$

** Biểu thức có dạng* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *trong đó* $f(x), g(x)$ *là các đa thức và* $f(x_0)=g(x_0)=0$.
Khử dạng vô định bằng cách phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
Giả sử $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$ *và* $g(x)=(x-x_0)\cdot g_1(x)$. *Khi đó:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *vẫn ở dạng vô định* $\dfrac{0}{0}$ *thì ta lặp lại quá trình khử đến khi không còn dạng vô định.*
Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

** Biểu thức có dạng* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *trong đó* $f(x)$, $g(x)$ *là các biểu thức có chứa căn thức và* $f(x_0)=g(x_0)=0$.
Khử dạng vô định bằng cách nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức để trục các nhân tử $x-x_0$ *ra khỏi các căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0. Lưu ý có thể nhân liên hợp một hay nhiều lần để khử dạng vô định.*
Chú ý: Các hằng đẳng thức
$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.
$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.
$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$.

② $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}$.

③ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$.

④ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{(x+4)(x-2)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{-4-2}{-4}=\dfrac{3}{2}$.

② $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{1-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{1-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2-x)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

③ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2\cdot2-1}{2+3}=\dfrac{3}{5}$.

④ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x+x^2}{1-x}=\dfrac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\dfrac{3}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{4x^2-(3x^2+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to -1}\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)=2\cdot(-1)-\sqrt{3\cdot(-1)^2+1}=-4.$$ □

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 5}\frac{\left[4x^2-25(x-1)\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left[9-(x+4)\right]\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(4x^2-25x+25\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(4x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-4x)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{2x+5\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{(5-4\cdot 5)(3+\sqrt{5+4})}{2\cdot 5+5\sqrt{5-1}}=-\frac{9}{2}.$$ □

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(12x+1)}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-12x}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}}=\frac{-3}{1+\sqrt[3]{12\cdot 0+1}+\sqrt[2]{(12\cdot 0+1)^2}}=-1.$$ □

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}=\lim_{x\to -4}\frac{\left[2x+9-(x+5)^2\right]\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(x+5+x+3)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$=\lim_{x\to -4}\frac{\left(-x^2-8x-16\right)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(2x+8)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$=\lim_{x\to -4}\frac{-(x+4)^2\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2(x+4)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{-(x+4)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2} - \sqrt[3]{(x+5)(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)} = 0. \qquad \square$$

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải

Đặt $t = 1 + x$. Suy ra $x = t - 1$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 1$.
Do đó:

$$I = \lim_{t\to 1} \frac{t^n - 1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)\left(t^{n-1} + t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + t + 1\right)}{t-1}$$
$$= \lim_{t\to 1} \left(t^{n-1} + t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + t + 1\right) = n. \qquad \square$$

VÍ DỤ 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt{1+ax}+1} = \frac{a}{2}. \qquad \square$$

VÍ DỤ 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x\left[\sqrt[3]{(1+ax)^2} + \sqrt[3]{1+ax} + 1\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt[3]{(1+ax)^2} + \sqrt[3]{1+ax} + 1} = \frac{a}{3}.$$
$\square$

VÍ DỤ 9. Tính giới hạn $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$, n là số nguyên và $n \geq 2$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[n]{1+ax}$. Suy ra $t^n = 1 + ax \Leftrightarrow x = \dfrac{t^n - 1}{a}$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 1$. Do đó:

$$J = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\frac{t^n-1}{a}} = \lim_{t\to 1} \frac{a(t-1)}{t^n - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{a(t-1)}{(t-1)\left(t^{n-1} + t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + t + 1\right)}$$
$$= \lim_{t\to 1} \frac{a}{t^{n-1} + t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + t + 1} = \frac{a}{n}. \qquad \square$$

⚠ ***Chú ý:*** *Các giới hạn* $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$ *với* $n \in \mathbb{N}$; *và* $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \dfrac{a}{n}$ *với* $a \neq 0$, n *là số nguyên và* $n \geq 2$ *được gọi là các "giới hạn cơ bản".*

VÍ DỤ 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2+2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1-x^3}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}+\frac{1-x^2}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4\right]}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4}\right]$$
$$=\frac{-(1^2+1+1)}{(1+1)\cdot\left(\sqrt{5-1^3}+2\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{(1^2+7)^2}+2\sqrt[3]{1^2+7}+4}=-\frac{11}{24}.$$

□

VÍ DỤ 11. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}$.

② $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}$.

④ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-x+1)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{7}{3}$.

② $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-2)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^2+4x+2}{6x-2}=6$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1}=3$.

④ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^{2017}}{1-x^{2018}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{2016}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2017}}=\dfrac{2017}{2018}$.

□

VÍ DỤ 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-(3x+1)}{(x^2-1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x+1)}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\ &= \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x)-(2x-2)}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{[(2x-1)-x]\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}\\
&=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{x^2-2x}-2)+(2-\sqrt{2-x})}{(x+2)(x+3)}\\
&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-2}{(x+2)(x+3)}+\frac{2-\sqrt{2-x}}{(x+2)(x+3)}\right]\\
&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{2+x}{(x+2)(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\
&=\lim_{x\to -2}\left[\frac{x-4}{(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{1}{(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\
&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]$.

Với n là số tự nhiên không bé hơn 2, ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1}{n}$. Thật vậy, đặt $t=\sqrt[n]{x}\Rightarrow x=t^n$ và khi $x\to 1$ thì $t\to 1$.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}&=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{1-t^n}\\
&=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{(1-t)\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)}\\
&=\lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\\
&=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

VÍ DỤ 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)+(x^2+1998)-1998}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)}{x}+\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1998)\cdot\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right]$$
$$=(0^2+1998)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)+0=-\frac{3996}{7}.$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

② $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$.

③ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)(7x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-5}{7x-2}=\dfrac{4\cdot(-1)-5}{7\cdot(-1)-2}=1.$

② $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(2-x)=4.$

③ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+5)=8.$

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3}{4}.$

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$.

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$.

③ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$.

④ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-2}=0.$

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-1}=-4.$

③ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}.$

④ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-2x-3)}{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+3x^2+x+3}=0.$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1}=\frac{1}{2}.$$ □

BÀI 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x^2-4)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{1}{16}.$$ □

BÀI 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(2x^3-3x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2x-3)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=-\frac{1}{6}.$$ □

BÀI 6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+7-(x+2)^2}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-2x+3}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+3)}{(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}=\frac{2}{3}.$$ □

BÀI 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{4-3x^2-(2x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x^2-12x-5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{(x+1)(-7x-5)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x-5}=-10.$$ □

BÀI 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3+3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{(x+1)^2}}=-\frac{1}{9}.$$

□

BÀI 9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}}=\frac{1}{3}.$$ □

BÀI 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x^2+4x}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x(x-1)}{(x-1)(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\frac{4}{3}.$$ □

BÀI 11. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+2+(x-4)^3}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-12x^2+51x-62}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-10x+31)}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+31}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\frac{5}{4}.$$ □

BÀI 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}=\lim_{x\to 4}\frac{(8-2x)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x^2-x-12)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-2(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x-4)(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-2\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=-\frac{5}{3}.$$ □

BÀI 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$=\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)+(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$=\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)}{x^3}+\dfrac{(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$=\dfrac{8x^3}{x^3\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3\right)}+\dfrac{x^3}{x^3\left[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}\right]}$

$=\dfrac{8}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3}+\dfrac{1}{(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}}$

Do đó:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$=\dfrac{8}{\sqrt{8\cdot 0^3+0^2+6\cdot 0+9}+0+3}+\dfrac{1}{(0+3)^2+(0+3)\sqrt[3]{9\cdot 0^2+27\cdot 0+27}+\sqrt[3]{(9\cdot 0^2+27\cdot 0+27)^2}}$

$=\dfrac{37}{27}$. □

BÀI 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

$=\dfrac{-(x^3-1)}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}+\dfrac{1-x^2}{(x^2-1)\left[4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right]}$

$=\dfrac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}-\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=-\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{12}=-\dfrac{11}{24}$. □

BÀI 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{\sqrt[3]{5x+11}-3}{x^2-3x+2}+\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{8x-16}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]}-\dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$

$=\dfrac{8}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]}-\dfrac{1}{(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{54}$. □

BÀI 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}=\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-3x+2}+\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{3x-3}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}+\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$
$$=\frac{3}{(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}+\frac{x+1}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}.$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{13}{12}$. □

BÀI 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}=\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}+\frac{3x-\sqrt{5x+26}}{x-2}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}+\frac{9x^2-5x-26}{(x-2)\left(3x+\sqrt{5x+26}\right)}$$
$$=\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}+\frac{9x+13}{3x+\sqrt{5x+26}}.$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{31}{12}=\dfrac{10}{3}$. □

BÀI 18. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}=\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2}{2x^2+5x+2}+\frac{\sqrt{x+3}-1}{2x^2+5x+2}$$
$$=\frac{x^2-x-6}{(x+2)(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]}+\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}$$
$$=\frac{x-3}{(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]}+\frac{1}{(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}.$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}=\dfrac{5}{36}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{36}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 19. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^{20}\cdot(x-2)^{20}}{(x-2)^{20}\cdot(x+4)^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$ □

BÀI 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{100}-1)-2(x-1)}{(x^{50}-1)-2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1-2)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1-2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}.$$ □

BÀI 21. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5-1}}{1-x^4}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{x^5-1}}{1-x^4}=\frac{x^5-1}{-(x^4-1)\left(\sqrt{x^5+1}\right)}=\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{-(x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt{x^5+1}\right)}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5-1}}{1-x^4}=-\dfrac{5}{8}$. □

BÀI 22. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\frac{3\sqrt[3]{x^2}-3}{x-1}+\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{3(x^2-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}+\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{3(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\dfrac{6}{3}+1=3$. □

BÀI 23. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}+\frac{x^2+x}{x+1}=\frac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}+\frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}+x.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$. □

BÀI 24. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}=\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x}-2}+\frac{x^4-3x^3+x^2+4}{\sqrt{2x}-2}$$

$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{(2x-4)(\sqrt{x-1}+1)}+\frac{(x-2)(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}$$

$$=\frac{\sqrt{2x}+2}{2(\sqrt{x-1}+1)}+\frac{(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=1+0=1$. □

BÀI 25. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-\sqrt{1+4x}}{x}+\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$$

$$=\sqrt{1+4x}\cdot\frac{\sqrt{1+6x}-1}{x}+\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{6}{2}+\dfrac{4}{2}=5.$ □

BÀI 26. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt{1+2x}}{x}+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$$
$$=\sqrt{1+2x}\cdot\frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{2}=\dfrac{7}{3}.$ □

BÀI 27. Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Tính $I+J$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=1\end{aligned}$$

$$J=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

Vậy $I+J=4$. □

BÀI 28. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)+\left(\sqrt{x+16}-4\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

□

BÀI 29. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[4]{x+9}\Rightarrow x=t^4-9$, và khi $x\to 7$ thì $t\to 2$. Khi đó:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^4-16}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^3+2t^2+4t+8)}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^3+2t^2+4t+8}=\frac{1}{32}.$$

□

BÀI 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(1+x-1)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}+\frac{8-(8-x)}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right]\\&=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.\end{aligned}$$

□

BÀI 31. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}\right]=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}.$ □

BÀI 32. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)+\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)+\sqrt{1+4x}-1}{x}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\\=&3.\end{aligned}$$

□

BÀI 33. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2x+1}-(1+x)}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{3x+1}-(1+x)}{x^2}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+1-x^2-2x-1}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}-\frac{3x+1-x^3-3x^2-3x-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}+\frac{x^3+3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+(1+x)}+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2}\right]\\
=&1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 34. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ với $\alpha\cdot\beta\neq 0$ và m, n là các số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{\beta}{n}+\dfrac{\alpha}{m}=\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$. □

BÀI 35. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ với $a\neq 0$ và α, β là các số nguyên dương.

Lời giải.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^\alpha-1\right]}{a^\beta\left[\left(\dfrac{x}{a}\right)^\beta-1\right]}=\lim_{x\to a}\left[a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)^\alpha-1}{\dfrac{x}{a}-1}\cdot\frac{\dfrac{x}{a}-1}{\left(1+\dfrac{x}{a}-1\right)^\beta-1}\right]$$

$$=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$ □

BÀI 36. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$=1+(x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right).$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

BÀI 37. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{x^{n+1}-nx-x+n}{(x-1)^2}=\frac{\left(x^{n+1}-x\right)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x(x^n-n)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^n-x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}==1+(x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right).$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

BÀI 38. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$
$$=\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}-na^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{x^{n-1}-a^{n-1}+ax^{n-2}-a^{n-1}+a^2x^{n-3}-a^{n-1}+\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{(x-a)\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)}{x-a}+\frac{a(x-a)\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)}{x-a}$$
$$+\frac{a^2(x-a)\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)}{x-a}+\cdots+\frac{a^{n-2}(x-a)}{x-a}$$
$$=\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)+a\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)$$
$$+a^2\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)+\cdots+a^{n-2}.$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+(n-3)a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}=$
$a^{n-2}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]=\dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$. □

BÀI 39. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$$
$$=\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}.$$
Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. □

BÀI 40. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$ □

BÀI 41. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}+\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{x}{3}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right]}-\frac{\frac{x}{4}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1\right]}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{36}$. □

BÀI 42. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải.

Nhận xét: $\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$.

Khi đó: $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdots\frac{1}{1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

BÀI 43. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$$

$$=\frac{2x\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right]}{x}$$

$$=2\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right].$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=2n$. □

DẠNG 2.2. Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

Dạng 1: $I = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với* $P(x), Q(x)$ *là đa thức hoặc các hàm đại số .*
Phương pháp: Gọi $p = \deg P(x), q = \deg Q(x)$ *và* $m = \min(p, q)$*. Chia cả tử và mẫu cho* x^m *ta có kết luận.* ($\deg P(x)$ *là bậc cao nhất của đa thức* $P(x)$*).*

+ *Nếu* $p \le q$ *thì tồn tại giới hạn.*
+ *Nếu* $p > q$ *thì không tồn tại giới hạn.*

Dạng 2: Giới hạn $\infty - \infty$.
Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.
Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

VÍ DỤ 1. Tính $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

Lời giải

Ta có $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}} = \dfrac{0}{1} = 0$ □

VÍ DỤ 2. Tính $D = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

Lời giải

Ta có:
$D = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + |x|\sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}}} = \dfrac{0}{\sqrt[3]{8}} = 0.$ □

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$.

Lời giải

Ta có
$D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \dfrac{1}{2}.$ □

VÍ DỤ 4. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

Ta có:
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$ □

VÍ DỤ 5. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)$.

Lời giải

Ta có
$$\begin{aligned}D&=\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-3x^2\right)+x^2\left(3x^2-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2(9x^4+7-9x^4)}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{x^2(27x^6+5-27x^6)}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{7x^2}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{5x^2}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{7}{\sqrt{9+\dfrac{7}{x^4}}+3}+\frac{\dfrac{5}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(27-\dfrac{5}{x^6}\right)^2}+3\sqrt[3]{27-\dfrac{5}{x^6}}+9}\right]=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

Lời giải.

Ta có $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$ □

BÀI 2. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Lời giải.

Ta có:
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt[3]{8}}=1.$$ □

BÀI 3. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}{8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}.$$ □

BÀI 4. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}{8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\frac{-6}{8}=-\frac{3}{4}.$$ □

BÀI 5. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{x\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\frac{3}{2}.$$
Suy ra $D=\dfrac{3}{2}$. □

BÀI 6. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{-x\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{-\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\frac{3}{2}.$$ □

BÀI 7. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{50}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$ □

BÀI 8. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=4.$$ □

BÀI 9. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=-\frac{2}{3}.$$
□

BÀI 10. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{x\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$ □

BÀI 11. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-5-\sqrt{4x^2-4x-1}\right)$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-5)^2-(4x^2-4x-1)}{2x-5+\sqrt{4x^2-4x-1}}=\frac{-16x+26}{2x-5+x\sqrt{4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{-16+\dfrac{26}{x}}{2-\dfrac{5}{x}+\sqrt{4-\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=-4.$$ □

BÀI 12. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-x+x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2}+x^2}+\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x^3}}+1}-\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}\right)=0.$$ □

BÀI 13. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(x^3+1-(x^3-1)\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}}=1.$$ □

BÀI 14. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+5}-2x+2x-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}+\frac{8x^3-(8x^3-1)}{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{|x|\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}+2x}+\frac{x}{x\sqrt[3]{\left(8-\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+2x^2\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{x^3}}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}+2}+\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(8-\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+2\sqrt[3]{8-\dfrac{1}{x^3}}+4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{0}{12}=\frac{5}{4}.$$ □

DẠNG 2.3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên.

- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ *thì:*

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}+\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ cùng dấu}\\ -\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ trái dấu.}\end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)>0\\ -\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)<0.\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L.$

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}\left(x^3-2x^6+1\right)$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$;

⑤ $I_5=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$;

⑥ $I_6=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^6+2x^3-4x^2+4x\right)$.

Lời giải

① $I_1 = \lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}} \left(x^3 - 2x^6 + 1\right) = (\sqrt[3]{2})^3 - 2(\sqrt[3]{2})^6 = 2 - 2\cdot 2^2 + 1 = -5;$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right).$

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right) = 2 > 0$ nên

$$I_2 = \lim_{x\to+\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = +\infty.$$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = -\infty;$

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 2\right) = -\infty;$

⑤ $I_5 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 2\right) = +\infty;$

⑥ $I_6 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 4x\right) = +\infty.$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6};$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3};$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3};$

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2}.$

Lời giải

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6} = 0$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 6) = +\infty;$

② Ta có $\lim\limits_{x\to3^+} (-x^2 + 5) = -4 < 0$, $\lim\limits_{x\to3^+} (x - 3) = 0$ và $x - 3 > 0, \forall x > 3.$

Do đó $I_2 = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3} = -\infty.$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3} = -\infty.$

④ Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{4 - x^2}{x + 2} = \lim\limits_{x\to-2^+} (2 - x) = 4.$

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn một bên của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x=1$;

② $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ \dfrac{x-1}{6} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải

① Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-2) = -1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$.

② Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \dfrac{1}{6}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \dfrac{1}{6}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(-6x^4+2x^3-x+5)$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(-6+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}\right) = -\infty$.

② $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+2\right) = +\infty$.

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}-2\right) = -\infty$.

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}\right) = -\infty$.

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{-4-4x}+3x^2}{x+1}$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x+1}{2-x}$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2-5x+2}{(x-2)^2}$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{|x^2-9|}$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\sqrt{-4-4x}+3x^2\right)=3>0$, $\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=$ và $x+1<0,\ \forall x<-1$.
Do đó $I_1=-\infty$.

② $I_2=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+1}{2-x}=+\infty$.

③ $I_3=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}=+\infty$.

④ $I_4=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x+3}{(9-x^2)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{(3-x)(\sqrt{x+7}+2)}=\dfrac{1}{24}$.

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$.

Lời giải.

Xét các giới hạn một bên:

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-1}{x-3}=+\infty$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$ không tồn tại. □

BÀI 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m-2x & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$. Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì điều kiện cần và đủ là $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m-2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^3-\sqrt{x^2+2})$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{x^2+\sqrt{x}}$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{1-x^2}$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^8+3}-x^2}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$.

Lời giải.

① $I_1=+\infty$. ② $I_2=-\sqrt[3]{2}$. ③ $I_3=\sqrt[3]{2}$. ④ $I_4=4$.

□

BÀI 6. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$.

Lời giải.

① $I_1 = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x(x^2-16)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^+} x(x-4) = 32.$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{-x-4}} = +\infty.$

□

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ 2bx+1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

① Tìm mối quan hệ giữa a và b.

② Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2+b^2$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a(x-4) = -3a$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2b+1$.
Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$ khi và chỉ khi $-3a = 2b+1$.

② Từ câu a) ta có $1 = (3a+2b)^2 \leq (9+4)(a^2+b^2) \Rightarrow P = a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{13}$. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $a = -\dfrac{3}{13}$ và $b = -\dfrac{2}{13}$. Vậy $\min P = \dfrac{1}{13}$.

□

BÀI 8. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5+x^4-4x^2+1}{x^3-1}$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^4+9x^3+11x^2-4}{(x+2)^2}$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{11}+1}{x^7+1}$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018}{x^2-1}$.

Lời giải.

① Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x^4+3x^3+3x^2-x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4+3x^3+3x^2-x-1}{x^2+x+1} = 2.$

② Ta có $2x^4+9x^3+11x^2-4 = (x+2)^2(2x^2+x-1)$, suy ra $I_2 = \lim\limits_{x\to -2}(2x^2+x-1) = 5.$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1)}{(x+1)(x^6-x^5+\cdots-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1}{x^6-x^5+\cdots-x+1} = \dfrac{11}{7}.$

④ Ta có
$$\begin{aligned} x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018 &= (x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^{2018}-1) \\ &= (x-1)\left[1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})\right]. \end{aligned}$$
Do đó
$$\begin{aligned} I_4 &= \lim_{x\to 1} \frac{1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})}{x+1} \\ &= \frac{1+2+\cdots+2018}{2} = \frac{2037171}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Tìm các giá trị của a, b sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=0$.

Lời giải.

Nếu $a\le 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=+\infty$. Do đó, ta chỉ xét với $a>0$. Khi đó, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}.$$

Suy ra $1-a^2=0\Leftrightarrow a=\pm 1$.

• Với $a=1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2b+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}}=0$ khi $b=\dfrac{1}{2}$.

• Với $a=-1$ tương tự ta tìm được $b=-\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 10. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1+\sqrt{5-2x}}{x^2+x-2}$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{9-x}}{1-x}$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{7+6x}-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2}$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2017x}\cdot\sqrt[3]{1+2018x}-1}{x}$.

Lời giải.

① Ta có $I_1=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})}=-\dfrac{2}{9}$.

② Ta có

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{x\to1}\frac{2(\sqrt{2-x}-1)+(2-\sqrt[3]{9-x})}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2-x}+1}+\lim_{x\to1}\frac{-1}{4+2\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{(9-x)^2}}=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.\end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)+[(2x+3)-\sqrt{5+4x}]}{(x+1)^2}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)}{(x+1)^2}+\lim_{x\to-1}\frac{(2x+3)-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2}=-4+2=-2.\end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned}I_4&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2017x}(\sqrt[3]{1+2018x}-1)+\sqrt{1+2017x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2018\sqrt{1+2017x}}{\sqrt[3]{(1+2018x)^2}+\sqrt[3]{1+2018x}+1}+\lim_{x\to0}\frac{2017}{\sqrt{1+2017x}+1}=\frac{10087}{6}.\end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-x-1)$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}+x-1)$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2})$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2017}{1-x^{2017}}-\dfrac{2018}{1-x^{2018}}\right)$.

Lời giải.

① Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1} = 0.$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2-2x-1}-x+1} = 0.$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2-x}-2x) + \lim\limits_{x\to+\infty} (2x - \sqrt[3]{8x^3+3x^2}) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}.$

④ Ta có

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2017}{1-x^{2017}} - \frac{1}{1-x}\right) = \lim_{x\to1} \frac{(1-x^{2016})+(1-x^{2015})+\cdots+(1-x)}{1-x^{2017}}$$
$$= \frac{2016+2015+\cdots+1}{2017} = 1008$$

và

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2018}{1-x^{2018}} - \frac{1}{1-x}\right) = \lim_{x\to1} \frac{(1-x^{2017})+(1-x^{2016}+\cdots+(1-x))}{1-x^{2018}}$$
$$= \frac{2017+2016+\cdots+1}{2018} = \frac{2017}{2}.$$

Vậy $I_4 = 1008 - \dfrac{2017}{2} = -\dfrac{1}{2}.$

□

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

⚠ *Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.*

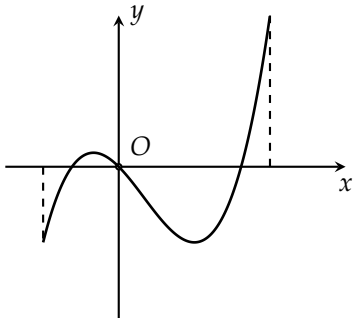
2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Định nghĩa 3. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

⚠ *Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b]$, $[a;+\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự.*

⚠ *Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó*



3 MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1.

① *Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*

② *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.*

Định lí 2. *Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó*

① *Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.*

② *Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

Định lí 3. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

⚠ *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.*

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 3.1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

— *Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.*

— *Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.*

VÍ DỤ 1. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu} \quad x \neq 1 \\ a & \text{nếu} \quad x = 1 \end{cases}$ với a là hằng số.
Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có:

— $f(1) = a$.

— $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.

- Nếu $a = 2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- Nếu $a \neq 2$ thì hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$.
Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải

Ta có:

— $f(0) = 0$.

— $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1$.

— $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.

Ta có: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.
Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = -2$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-5}{x+1} = -2 = f(1)$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. □

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có:

— $f(2) = 1$.

— $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-(2x-3)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(2-x)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})}$
$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1 = f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x \neq 4 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$.
Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 4$.

Lời giải

Ta có:

— $f(4) = -\dfrac{3}{2}$.

— $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x+5}+3)(x-4)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}$
$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \neq f(4)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 4$. □

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{4} & \text{nếu} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{nếu} \quad x > 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + 2a = f(2)$.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{3x-6}{(x-2)\left(4 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{4 + 2\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}} = \frac{1}{4}.$$

Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ là $2a + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m^2 + 3m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $f(2) = m^2 + 3m$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4.$

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ thì $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 = m^2 + 3m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải

Ta có: $f(0) = m + \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = -1.$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(m + \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x+2}\right) = m + \dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \dfrac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$. □

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{nếu } x<1\\ 14ax & \text{nếu } x\geq 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=14a$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 14ax=14a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^6-(8-4x)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\ &=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\ &=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8}{2x^3+\sqrt{8-4x}}=7\end{aligned}$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 14a=7\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 5a^2-3 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1)=5a^2-3$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 5a^2-3=2\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$.

□

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{nếu } x=0\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải.

Ta có: $f(0)=2a-\dfrac{5}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2a-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$. □

BÀI 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{nếu } x\neq 1\\ 3x+a & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a}$.

Nếu $a=-3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{3}=1>0$ và $f(1)=0$.

Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.
Nếu $a\neq -3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a}=0$, nhưng $f(1)=3+a\neq 0$.
Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.
Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

BÀI 4. Tìm a, b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+3 & \text{nếu } x<1 \\ 5 & \text{nếu } x=1 \\ 2x-3b & \text{nếu } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải.
Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx+3)=a-b+3$,
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-3b)=2-3b$.
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.
Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-b+3=5 \\ 2-3b=5 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$. □

BÀI 5. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{nếu } x<0 \\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x\geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải.
Ta có: $f(0)=m+\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}=-\frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\dfrac{1}{2}$.
Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$. □

BÀI 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}+b & \text{nếu } x>a \\ 1 & \text{nếu } x=a \\ b-2x & \text{nếu } x<a \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x_0=a$.

Lời giải.

Ta có: $f(a)=1$.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}+b\right)=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{x-a}+b\right]$$
$$=\lim_{x\to a^+}[(x+a)+b]=2a+b.$$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(b-2x)=b-2a$.
Để hàm số liên tục tại $x_0=a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$
$\Leftrightarrow 2a+b=b-2a=1\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b&=1\\ b-2a&=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ a=0\end{cases}$. □

BÀI 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ \dfrac{a}{6} & \text{nếu } x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải.
Ta có: $f(2)=\dfrac{a}{6}$.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}+\dfrac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2}\right)=L_1+L_2$.

$$L_1=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3+1}{(x-2)[(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1}=\frac{1}{3}.$$
$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=L_1+L_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$.
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow\dfrac{a}{6}=\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow a=5$. □

BÀI 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 15 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm số tự nhiên n để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải.
Ta có: $f(1)=15$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1+\cdots+x^n-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)\right]}{x-1}$$
$$=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow\dfrac{n(n+1)}{2}=15\Leftrightarrow n=5$. □

DẠNG 3.2. Hàm số liên tục trên một tập hợp

① *Hàm đa thức liên tục trên* $\mathbb{R}$.

② *Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Lời giải

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

— Tại điểm $x = -1$, ta có $f(-1) = -3$.
$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(x-2) = -3 = f(-1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x = -1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x+1}{(x-1)^2} = +\infty \neq f(-1)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

□

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\geq 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\geq 3\\ 2x+4 & \text{khi } 0\leq x<3\\ 3x^2-5 & \text{khi } x<0.\end{cases}$

Lời giải

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x>2$, $f(x)=x^2+3x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2;+\infty)$.

— Khi $x<2$, $f(x)=6x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;2)$.

— Tại điểm $x=2$, ta có $f(2)=10$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+3x)=10$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(6x+1)=13$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x>1$, $f(x)=x^2-3x+5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1;+\infty)$.

— Khi $x<1$, $f(x)=2x+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;1)$.

— Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x+5)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3$.
Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x=1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

③ — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x>3$, $f(x)=x^2+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3;+\infty)$.

— Khi $0<x<3$, $f(x)=2x+4$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(0;3)$.

— Khi $x<0$, $f(x)=3x^2-5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;0)$.

— Tại điểm $x=3$, ta có $f(3)=10$.
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+1)=10$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x+4)=10$.
Vì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ nên hàm số liên tục tại $x=3$.

— Tại điểm $x=0$, ta có $f(0)=-5$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+4)=4$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x^2-5)=-5$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=0$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$.

② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Lời giải.

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x\neq 2$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

— Tại điểm $x=2$, ta có $f(2)=1$.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}\neq f(2)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x=2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

— Tại điểm $x=1$, ta có $f(1)=3$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3=f(1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\geq -2\\ 2-x & \text{khi } x<-2.\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{khi } x>-1\\ 1 & \text{khi } x=-1\\ x^2-6 & \text{khi } x<-1.\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{khi } x\geq 3\\ x^2 & \text{khi } 1\leq x<3\\ 4x^2-3 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

Lời giải.

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

— Khi $x>-2$, $f(x)=x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-2;+\infty)$.

— Khi $x < -2$, $f(x) = 2 - x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -2)$.

— Tại điểm $x = -2$, ta có $f(-2) = 4$.
$\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2 = 4$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} (2-x) = 4$.
Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = f(-2)$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > -1$, $f(x) = 3x - 2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-1; +\infty)$.

— Khi $x < -1$, $f(x) = x^2 - 6$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -1)$.

— Tại điểm $x = -1$, ta có $f(-1) = 1$.
$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} (3x-2) = -5$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} (x^2-6) = 3$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = -1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

③ — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > 3$, $f(x) = x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$.

— Khi $1 < x < 3$, $f(x) = x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1; 3)$.

— Khi $x < 1$, $f(x) = 4x^2 - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 1)$.

— Tại điểm $x = 3$, ta có $f(3) = 4$.
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x+1) = 4$ và $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 = 9$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 3$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 1$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (4x^2-3) = 1$.
Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

□

DẠNG 3.3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 2x - m) = 8 - m$

và $f(2) = 2 + m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow 8 - m = 2 + m \Leftrightarrow m = 3$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2+5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-3) = -4$

và $f(-1) = m^2+5m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2+5m = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \dfrac{4}{2\cdot 6} = \dfrac{1}{3}.$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2m+3$.

Để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m+3 \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{4}{3}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2-m-5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-2x+1) = -3$

và $f(2) = m^2-m-5$.

Để hàm số gián đoạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $m^2-m-5 \neq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

□

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a-3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2-1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1\right)} = \dfrac{1}{3};$

Và $f(3) = a-3$.

Để hàm số liên tục tại $x=3 \Leftrightarrow a-3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{10}{3}$.

□

BÀI 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2-m+3 & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^2+mx-1-m}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+mx-1-m}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1+m)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x+1+m) = 2+m;$

$f(1) = m^2-m+3.$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow m^2-m+3 = 2+m \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow m=1.$ □

BÀI 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x-1) = -2;$

— $f(1) = 1+m.$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 1+m=-2 \Leftrightarrow m=-3.$ □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ ax^2+bx+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x<1 \\ a-b-\dfrac{7}{4} & \text{khi } x=1 \end{cases}$.

Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{4};$

— $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2+bx+\dfrac{1}{4}\right) = a+b+\dfrac{1}{4};$

— $f(1) = a-b-\dfrac{7}{4}$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4} \\ a-b-\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$ □

BÀI 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1} & \text{khi } x\neq \frac{1}{2} \\ 2m & \text{khi } x=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1}$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x+m-1)}{2x-1}=m-\frac{1}{2};$$

— $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2m$.

Để hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m=m-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$. □

DẠNG 3.4. Chứng minh phương trình có nghiệm

— *Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.*

— *Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ $(i=1,2,\ldots,k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.*

CÁC VÍ DỤ MẪU

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

Đặt $f(x)=2x^4-2x^3-3$.
Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$.
Ta có: $f(0)=-3; f(-1)=1 \Rightarrow f(-1)f(0)<0$.
$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ (đpcm).

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3+3x^2-31x+10=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x)=6x^3+3x^2-31x+10$.
TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$.
Ta có:
$\begin{cases}f(-3)=-32\\f(0)=10\end{cases}\Rightarrow f(-3)f(0)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.
$\begin{cases}f(0)=10\\f(1)=-12\end{cases}\Rightarrow f(0)f(1)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.
$\begin{cases}f(1)=-12\\f(2)=8\end{cases}\Rightarrow f(1)f(2)<0\Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.
Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên phương trình $f(x)=0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.
Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt (đpcm). □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x-1+\sin x$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Ta có $\begin{cases}f(0)=-1\\f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow f(0).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$. Suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Vậy phương trình $x-1+\sin x=0$ có nghiệm (đpcm). □

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $\left(m^2+m+4\right)x^{2017}-2x+1=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\left(m^2+m+4\right)x^{2017}-2x+1$ liên tục trên $[-1;0]$.
$f(-1)=-m^2+m-1=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0\ ,\ \forall m\in\mathbb{R};f(0)=1>0;\Rightarrow f(-1).f(0)<0,\forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$ với mọi giá trị của tham số m.
Vậy $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m (đpcm). □

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x+b\sin x+\cos x=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b.

Lời giải

Đặt $f(x)=a\cos 2x+b\sin x+\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f(0)=a+1;f(\pi)=a-1;f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-a+b;f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-a-b$
Vì $f(0)+f(\pi)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$ nên trong bốn số $f(0),f(\pi),f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.
Vậy phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a,b (đpcm). □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$ (1)

$f(0).f(4) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;4)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương (đpcm). □

BÀI 2. Chứng minh phương trình $x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[-2;0]$, $[0;2]$.

Ta có:

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-2;0)$.

$f(0).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;2)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm. □

BÀI 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;4]$.

Ta có:

$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

$f(1)f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;2)$.

$f(2)f(4) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(2;4)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt. □

BÀI 4. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + 1 + \cos x$ liên tục trên $[-\pi;0]$ và có $\begin{cases} f(-\pi) = -\pi \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(-\pi).f(0) < 0.$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\pi;0)$.

Vậy phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm. □

BÀI 5. Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2 = \left(3x^2 + x + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{19}{32} < 0, f(0) = 1 > 0$

$f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng $(-2;-1)$, $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$, $(0;2)$, $(2;10)$.

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt. □

BÀI 6. Chứng minh rằng phương trình $\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-1;0]$.

$f(0)=-1; f(-1)=m^2+1 \Rightarrow f(0).f(-1)<0, \forall m \Rightarrow$phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-1;0), \forall m$. Vậy phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m. □

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{x^4-x^2+mx-3m+1}{x^2-x-2}=m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m>1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq -1; x\neq 2$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^4-x^2+mx-3m+1=m\left(x^2-x-2\right) \Leftrightarrow x^4-x^2+1-m\left(x^2-2x+1\right)=0$

Xét hàm số $f(x)=x^4-x^2+1-m(x-1)^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1)=-1-4m>0; f(0)=1-m<0; f(1)=1>0$

Suy ra $f(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm thỏa $-1<x_1<0<x_2<1$ với mọi $m>1$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m>1$. □

BÀI 8. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\dfrac{\pi}{2})=-1<0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0\neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm. □

BÀI 9. Cho phương trình $f(x)=ax^2+bx+c=0$, biết $a.f(c)<0$. Chứng minh rằng phương trình $a\left(ax^2+bx+c\right)^2+b\left(ax^2+bx+c\right)+c=x$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x)=a\left(ax^2+bx+c\right)^2+b\left(ax^2+bx+c\right)+c-x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $af(c)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1<c<x_2$.

Suy ra $g(x_1)=a(f(x_1))^2+bf(x_1)+c-x_1=c-x_1>0$ và tương tự $g(x_2)=c-x_2<0$

Do đó $g(x_1).g(x_2)<0 \Rightarrow$ (đpcm). □

BÀI 10. Chứng minh rằng phương trình $x^5+3x+1=0$ có đúng một nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1 \Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0$ (1)

Do $A=\left(x_1^2+\dfrac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\dfrac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên (1)$\Leftrightarrow x_1=x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm (đpcm). □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}, & \text{với } x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, & \text{với } x=0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

Xét tại $x_0=0$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)-\left(\sqrt{4-x}-2\right)}{x}$.

$$\begin{aligned}L_1&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8)-8}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}=\frac{1}{12}.\\L_2&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-4}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L_1-L_2=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}=f(0)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$. □

BÀI 12. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}, & \text{với } x\neq 0\\ 2017\cdot 2018, & \text{với } x=0.\end{cases}$

trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Với $x\neq 0$ thì $f(x)=\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}$ liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$.

Xét tại $x=0$:

$(1+2017x)^{2018}=1+\mathrm{C}^1_{2018}(2017x)+\mathrm{C}^2_{2018}(2017x)^2+\mathrm{C}^3_{2018}(2017x)^3+\cdots+\mathrm{C}^{2018}_{2018}(2017x)^{2018}$.

$(1+2018x)^{2017}=1+\mathrm{C}^1_{2017}(2018x)+\mathrm{C}^2_{2017}(2018x)^2+\mathrm{C}^3_{2017}(2018x)^3+\cdots+\mathrm{C}^{2017}_{2017}(2018x)^{2017}$.

Do $\mathrm{C}^1_{2018}(2017x)=\mathrm{C}^1_{2017}(2018x)=2017\cdot 2018x$ nên ta có:

$(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}=\left(\mathrm{C}^2_{2018}2017^2-\mathrm{C}^2_{2017}2018^2\right)x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}$,

trong đó $a_k=\mathrm{C}^k_{2018}2017^k-\mathrm{C}^k_{2017}2018^k, 3\leq k\leq 2017$ và $a_{2018}=2017^{2018}$.

$\mathrm{C}^2_{2018}2017^2-\mathrm{C}^2_{2017}2018^2=\dfrac{2018\cdot 2017}{2}2017^2-\dfrac{2017\cdot 2016}{2}2018^2=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2017\cdot 2018}{2}x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2017\cdot 2018}{2}+a_3x+a_4x^2+\cdots+a_{2018}x^{2016}\right)=\frac{2017\cdot 2018}{2}.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}\neq f(0)=2017\cdot 2018$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. □

BÀI 13. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2}, & \text{với } x\neq 0\\ m, & \text{với } x=0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

$f(0)=m$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[9-(9-x^2)](\sqrt{x^2+4}+2)}{[(x^2+4)-4](3+\sqrt{9-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{3+\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$. □

BÀI 14. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}, & \text{với } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4}, & \text{với } x=0\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D}=[-2;2]$.

Với $x_0\in(-2;2)\backslash\{0\}$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\dfrac{2-\sqrt{4-x_0^2}}{x_0^2}=f(x_0)$.

Mặt khác

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}=f(-2);\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}=f(2).$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x_0\in[-2;2]\backslash\{0\}$.

Xét tại $x_0=0$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{1}{4}=f(0)$.

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathscr{D}=[-2;2]$ của nó. □

BÀI 15. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=m(x-2)^3(x-3)+2x-5$.

Ta có:

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$f(2)=-1, f(3)=1\Rightarrow f(2)f(3)=-1<0$. Suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;3)$.

Vậy phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

□

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

A ĐỀ SỐ 1A

BÀI 1. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{4n^3+3n-1}{2n^4+4}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{27n^3-4n^2+5}}{n-6}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{4n^3+3n-1}{2n^4+4} = \lim \dfrac{\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{2+\dfrac{4}{n^4}}$ ..... 0,5 điểm.

$= \dfrac{0}{2} = 0$ ..... 0,5 điểm.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{27n^3-4n^2+5}}{n-6} = \lim \dfrac{\sqrt[3]{27-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^3}}}{1-\dfrac{6}{n}}$ ..... 0,5 điểm.

$= \dfrac{\sqrt[3]{27}}{1} = 3$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (3 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-2x^3}{3-x^3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x-3}{x-2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ ..... 0,5 điểm.

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ ..... 0,25 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-x^3}{3-2x^3}$ ..... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3\left(-\sqrt{9-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}-1\right)}{x^3\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\sqrt{9-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}-1}{\dfrac{3}{x^3}-2}$ ..... 0,25 điểm.

Kết luận: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-x^3}{3-2x^3} = 2$.

c) Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(5x-3)=7>0$ ..... 0,25 điểm.

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ và $x-2<0 \quad \forall x<2$ ..... 0,25 điểm.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{5x-3}{x-2}=-\infty$ ..... 0,25 điểm.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}+\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{\sqrt[3]{3x+2}-2}\right)$.

$+\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+\sqrt[3]{3x+2}.2+2^2}{3\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=1$ ..... 0,25 điểm.

$+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}{3\left(\sqrt{5x+6}+4\right)}=\dfrac{5.12}{3.8}=\dfrac{5}{2}$ ..... 0,25 điểm.

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$ ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 3. (2 điểm) Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1} & \text{nếu } x\neq -1\\ ax^2+3x & \text{nếu } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

Lời giải.

Tính $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}$ ..... 0,5 điểm.

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+2)=1$ ..... 0,5 điểm.

và $f(-1)=a-3$ ..... 0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow a-3=1\Leftrightarrow a=4$ ..... 0,5 điểm.

Vậy $a=4$. ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^5-3x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm.

Lời giải.

$f(x)=x^5-3x-1$ liên tục trên $[-2;2]$ ..... 0,25 điểm.

Thì phương trình $x^5-3x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Vì $f(-2).f(-1)=-27<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1)$. 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(-1)=-1<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ ..... 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(2)=-25<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ ..... 0,5 điểm.

Vậy phương trình $x^5-3x-1=0$ có ít nhất 3 nghiệm ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 5. (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^3-3x^2-2010\cos^2x+\sin^{2017}x+1=0$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-2010\cos^2x+\sin^{2017}x+1$.

Khi đó phương trình đã cho chính là phương trình $f(x)=0$ ..... 0,25 điểm.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ..... 0,25 điểm.

Và $f(0)=-2009<0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{27\pi^3}{8}-\dfrac{27\pi^2}{4}=\dfrac{27\pi^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)>0$ ..... 0,25 điểm.

Do đó tồn tại $x_0\in\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ để $f(x_0)=0$, tức là phương trình đã cho có nghiệm. ..... 0,25 điểm.

□

B ĐỀ SỐ 1B

BÀI 1. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n^4-2n+1}{3n^4+n+2}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-2n}{3n+4}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{n^4-2n+1}{3n^4+n+2} = \lim \dfrac{1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{3+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}$ ..... 0,5 điểm.

$= \dfrac{1}{3}$ ..... 0,5 điểm.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-2n}{3n+4} = \lim \dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-2}{3+\dfrac{4}{n}}$ ..... 0,5 điểm.

$= \dfrac{\sqrt{3}-2}{3}$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$.

Lời giải.

a)) Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+2x+1\right) = 4 > 0$ ..... 0,25 điểm.

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ và $x-1<0 \quad \forall x<1$ ..... 0,25 điểm.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1} = -\infty$ ..... 0,5 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x(x^3+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2}{x\,(x+1)\,(x^2-x+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)}{x\,(x^2-x+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)} = 0$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 3. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2 \\ mx+3 & \text{nếu } x\le 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Lời giải.

- $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2m+3$ ..... 0,5 điểm.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{7(x-2)}{(x-2)(\sqrt{7x-10}+2)} = \dfrac{7}{4}$ ..... 0,5 điểm.

• Do đó: 2m +3 = $\frac{7}{4} \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$ ..... 0,5 điểm.

• Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải.

$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ liên tục trên $[-1;2]$ ..... 0,25 điểm.

Thì phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Vì $f(-1).f(0) = -11 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ ..... 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(1) = -3 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ ..... 0,5 điểm.

Vì $f(1).f(2) = -3 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$ ..... 0,5 điểm.

Vậy phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 5. (2 điểm) Cho phương trình: $\left(m^4 + m + 1\right) x^{2010} + x^5 - 32 = 0$, m là tham số. Chứng minh rằng, phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m^4 + m + 1)x^{2010} + x^5 - 32$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ do đó nó liên tục trên đoạn $[0;2]$ ..... 0,25 điểm.

• $f(0) = -32$ ..... 0,25 điểm.

• $f(2) = \left(m^4 + m + 1\right) 2^{2010} = 2^{2010} \left[\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] > 0 \; \forall m \in \mathbb{R}$ ..... 0,5 điểm.

Suy ra $f(0).f(2) < 0 \; \forall m \in \mathbb{R}$ ..... 0,5 điểm.

Vậy phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ hay phương trình luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m. ..... 0,5 điểm.

□

ĐỀ SỐ 2A

BÀI 1. (3 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim \frac{3^n + 5^{n+1}}{4 + 5^{n+2}}$.

b) $\lim \frac{1 + n \sin n}{n^2 + 2}$.

Lời giải.

a) $\lim \frac{3^n + 5^{n+1}}{4 + 5^{n+2}} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{4\left(\frac{1}{5}\right)^n + 25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ ..... 1,5 điểm.

b) Ta có $\left|\frac{1 + n \sin n}{n^2 + 2}\right| \leq \frac{1 + n}{n^2 + 2}$ ..... 0,5 điểm.

và $\lim \frac{1 + n}{n^2 + 2} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 0$ ..... 0,5 điểm.

suy ra $\lim \frac{1 + n \sin n}{n^2 + 2} = 0$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (4,5 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)$ ..... 0,5 điểm.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{2}$ ..... 0,5 điểm.

suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)=+\infty$ ..... 0,5 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{x+2})}{2-x}$ ..... 1 điểm.

$=\lim\limits_{x\to 2}(-x-2)(2+\sqrt{x+2})=-16$ ..... 0,5 điểm.

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$ ..... 1 điểm.

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}(x^2+x+1)}{\sqrt{x+1}}=0$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 3. (1,5 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & \text{nếu } x>1\\ x+m & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$$

Lời giải.

+ Với $x_0>1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x^3-3x+2)=x_0^3-3x_0+2=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ ..... 0,5 điểm.

+ Với $x_0<1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x+m)=x_0+m=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ ..... 0,5 điểm.

+ Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-3x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+m)=1+m$ và $f(1)=1+m$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=-1$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 4. (1 điểm) Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

$$1-m^2)(x+2)^3+x^2+x-3=0.$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=(1-m^2)(x+2)^3+x^2+x-3$.

Ta có $f(-2)=-1$, $f(-4)=-8(1-m^2)+16-4-3=8m^2+1$, suy ra $f(-2).f(-4)<0$ ... 0,5

điểm.
Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ cho nên tồn tại $x_0 \in (-4;-2)$ sao cho $f(x_0) = 0$. Vậy phương trình $(1-m^2)(x+2)^3 + x^2 + x - 3 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-4;-2)$ với mọi m. 0,5 điểm.
□

D ĐỀ SỐ 2B

BÀI 1. (3 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim \dfrac{2^n - 3^{n+3}}{1+3^{n+1}}$.

b) $\lim \dfrac{2n + \cos 2n}{n^2+1}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2^n - 3^{n+3}}{1+3^{n+1}} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 27}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3} = -\dfrac{27}{3} = -9$ ..... 1,5 điểm

b) Ta có $\left|\dfrac{2n+\cos 2n}{n^2+1}\right| \le \dfrac{2n+1}{n^2+1}$ ..... 0,5 điểm

và $\lim \dfrac{2n+1}{n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = 0$ ..... 0,5 điểm

suy ra $\lim \dfrac{2n+\cos 2n}{n^2+1} = 0$ ..... 0,5 điểm

□

BÀI 2. (4,5 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2} + x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x(x+3)} - 2}{x^2 - 3x + 2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2} - x}$ ..... 0,5 điểm

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} - 1} = \dfrac{1}{2}$ ..... 1 điểm

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x(x+3)} - 2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$ ..... 1 điểm

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{(x-2)(\sqrt{x^2+3x}+2)} = -\dfrac{5}{4}$ ..... 0,5 điểm

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$. ..... 0,5 điểm

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}-\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$. ..... 0,5 điểm

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ không tồn tại. ..... 0,5 điểm

□

BÀI 3. (1,5 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x-2 & \text{nếu } x>1\\ mx-1 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$$

Lời giải.

+ Với $x_0>1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+x-2)=x_0^2+x_0-2=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$. ..... 0,5 điểm

+ Với $x_0<1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(mx-1)=mx_0-1=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$. ..... 0,5 điểm

+ Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x-2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(mx-1)=m-1$ và $f(1)=m-1$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$. ..... 0,5 điểm

□

BÀI 4. (1 điểm) Chứng minh phương trình sau đây có ít nhất 4 nghiệm phân biệt.

$$x^6-2x^4+4x^3-9x-3=0.$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^6-2x^4+4x^3-9x-3$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2
$f(x)$	15	$-\frac{111}{64}$	1	-3	43

Ta có $f(-2)\cdot f(-\frac{3}{2})<0$; $f(-\frac{3}{2})\cdot f(-1)<0$; $f(-1)\cdot f(0)<0$; $f(0)\cdot f(2)<0$ ..... 0,5 điểm

suy ra tồn tại $x_1\in(-2;-\frac{3}{2})$, $x_2\in(-\frac{3}{2};-1)$, $x_3\in(-1;0)$, $x_4\in(0;2)$ sao cho $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$. Vậy phương trình có ít nhất 4 nghiệm phân biệt. ..... 0,5 điểm

□

E ĐỀ SỐ 3A

BÀI 1 (2,0 điểm). Tìm các giới hạn sau

① $\lim\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2}$.

② $\lim\dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2}$.

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm

Ta có $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = 1$ nên ta suy ra $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} = 1$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
Ta có $\lim \dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^3}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 1$ và $\lim\left(n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^3}\right) = +\infty$ nên $\lim \dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2} = 0$.	0,5

□

BÀI 2 (**2,0 điểm**). Tìm các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}-x\right]$.

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, với m, n là các số nguyên dương.

Lời giải.

①

Đáp án	**Điểm**
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a_1)(x+a_2)-x^2}{\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}+x}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a_1+a_2)x+a_1a_2}{\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}+x}$	0,5
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\dfrac{a_1a_2}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\left(1+\dfrac{a_2}{x}\right)}+1} = \dfrac{a_1+a_2}{2}$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1\right)}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)}$	0,5
$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1} = \dfrac{m}{n}$.	0,5

□

BÀI 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ mx + \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x \le 2 \end{cases}$.

② $g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{2}{3x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

①

Đáp án	**Điểm**
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-6}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}$	0,5
$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4} = \dfrac{1}{4}$.	0,5
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(mx + \dfrac{1}{4}\right) = 2m + \dfrac{1}{4}$.	0,5
Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ hay $2m + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$, tức $m = 0$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
Ta có $0 \le \left\lvert x^2 \cos \dfrac{2}{3x} \right\rvert \le x^2$ và $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos \dfrac{2}{3x} = 0$.	0,5
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.	0,5

□

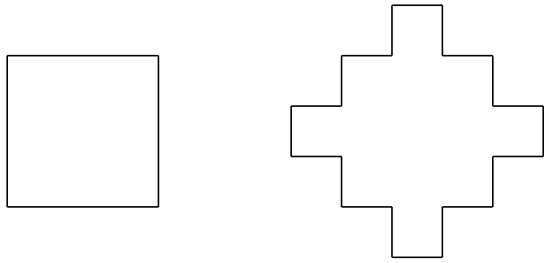
BÀI 4 (2,0 điểm). Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ với $a + 5b + 28c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm trên đoạn $\left[0; \dfrac{1}{5}\right]$.

Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dễ thấy $f(x)$ là hàm liên tục trên $\left[0; \dfrac{1}{5}\right]$.	0,5
Ta có $f(0) = c$ và $f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{a}{25} + \dfrac{b}{5} + c$.	0,5
Suy ra $3f(0) + 25f\left(\dfrac{1}{5}\right) = 0$, do đó $f(0) \cdot f\left(\dfrac{1}{5}\right) \le 0$.	0,5
Theo định lí giá trị trung gian thì tồn tại $c \in \left[0; \dfrac{1}{5}\right]$ sao cho $f(c) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.	0,5

□

BÀI 5 (1,0 điểm). Cho một hình vuông H_0 cạnh 1. Ta chia mỗi cạnh của hình vuông làm ba đoạn thẳng bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài hình vuông ban đầu một hình vuông có độ dài bằng đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta thu được một hình gọi là H_1. Ta lại chia mỗi cạnh của hình H_1 thành ba đoạn bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài H_1 một hình vuông có độ dài bằng độ dài đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta được hình H_2. Cứ lặp lại quá trình trên ta được một dãy các hình $(H_n)_{n\geq 0}$. Gọi S_n là diện tích của hình H_n. Tính lim S_n.



H_0 H_1

Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Gọi a_n, b_n lần lượt là số cạnh và độ dài mỗi cạnh của hình H_n. Ta thấy $a_0 = 4$ và $b_0 = 1$. Mỗi cạnh của hình H_n sau khi chuyển thành hình H_{n+1} sẽ sinh ra một đường gấp khúc gồm 5 đoạn thẳng, suy ra $a_{n+1} = 5a_n = 4 \cdot 5^n$. Dễ thấy sau mỗi lần chuyển hình thì độ dài cạnh giảm đi chỉ còn $\frac{1}{3}$ ban đầu nên $b_{n+1} = \frac{b_n}{3} = \frac{1}{3^n}$.	0,5
Để ý rằng, do cách dựng hình nên S_{n+1} là tổng của S_n với tất cả các hình vuông dựng thêm trong quá trình chuyển H_n thành H_{n+1}. Do đó $S_{n+1} = S_n + a_n \cdot b_{n+1}^2 = S_{n-1} + a_{n-1} \cdot b_n^2 + a_n \cdot b_{n+1}^2 = \cdots$ $= S_0 + a_0 \cdot b_1^2 + a_1 b_2^2 + \cdots + a_n \cdot b_{n+1}^2$ $= 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + \cdots + 4 \cdot 5^n \cdot \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2$ $= 1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{9^2} + \cdots + 4 \cdot 5^n \cdot \frac{1}{9^{n+1}}$ $= 1 + \frac{4}{9}\left[1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^n\right]$ $= 1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{9}}$ $= 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}$. Vậy lim $S_n = \lim\left[2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right] = 2$.	0,5

Nhận xét. Gọi H là hình vuông nhận các đỉnh của hình H_0 làm trung điểm các cạnh. Khi đó ta thấy miền H_n dần dần "phủ" đầy miền H khi $n \longrightarrow +\infty$. Do đó diện tích S_n tiến dần đến diện tích hình H là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$. Vậy $\lim S_n = 2$. □

F ĐỀ SỐ 3B

BÀI 1 (2,0 điểm). Tìm các giới hạn sau

① $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2}$.

② $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2}$.

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm
Ta có $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{3}{n}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 1$ và $\lim\left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 2$ nên ta suy ra $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2} = \dfrac{1}{2}$.	0,5

②

Đáp án	Điểm
Ta có $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}}$.	0,5
Do $\lim\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$ và $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2}{n^3}\right) = 1$ nên $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2} = 0$	0,5

□

BÀI 2 (2,0 điểm). Tìm các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$, với n nguyên dương.

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$.

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1-n}{x-1}\right)$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-3}+\cdots+(n-1)x\right)=1+2+3+\cdots(n-1)$ $=\dfrac{n(n-1)}{2}.$	0,5

②

Đáp án	Điểm
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}.$	0,5
Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=+\infty$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=0.$	0,5

□

BÀI 3 (3,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2\\ mx-\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x\le 2\end{cases}.$

② $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{2}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ m & \text{nếu } x=0\end{cases}.$

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm
$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{7x-14}{(x-2)\left(\sqrt{7x-10}+2\right)}$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{7}{\sqrt{7x-10}+2}=\dfrac{7}{4}.$	0,5
$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(mx-\dfrac{1}{4}\right)=2m-\dfrac{1}{4}.$	0,5
Hàm số đã cho liên tục trên tập xác định khi $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$ hay $2m-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$, tức $m=1$.	0,5

②

Đáp án	Điểm
Ta có $\left\lvert x^3\sin\dfrac{2}{x}\right\rvert\le\lvert x^3\rvert$ mà $\lim\limits_{x\to 0}\lvert x^3\rvert=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$	0,5
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định khi $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$	0,5

□

BÀI 4 (2,0 điểm). Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ với $7a+5b+4c=0$. Chứng minh rằng, phương trình đã cho luôn có nghiệm trên đoạn $[1;2]$.
Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$.	0,5
Ta có $f(1)=a+b+c$ và $f(2)=4a+2b+c$.	0,5
Suy ra $3f(1)+f(2)=0$, do đó $f(1)\cdot f(2)\leq 0$.	0,5
Theo định lí giá trị trung gian thì tồn tại $c\in[1;2]$ sao cho $f(c)=0$. Ta có điều phải chứng minh.	0,5.

□

BÀI 5 (1 điểm). Cho hai số dương a, b và dãy (u_n) cho bởi

$$\begin{cases} u_1=a,\ u_2=b \\ u_{n+2}=\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}, n=1,2\ldots \end{cases}.$$

Tìm giới hạn $\lim u_n$.
Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Trừ hai vế của $u_{n+2}=\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}$ cho u_{n+1} ta được $$u_{n+2}-u_{n+1}=-\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n).$$ Đặt $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$, ta có $\begin{cases} v_1=b-a \\ v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}v_n,\ n=1,2,\ldots \end{cases}$ Suy ra $v_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$.	0,5
Ta có $$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+2}-u_{n+1}+u_{n+1}-u_n+\cdots+u_2-u_1+u_1 \\ &= v_{n+1}+v_n+\cdots+v_1+u_1 \\ &= (b-a)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+u_1 \\ &= \frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+a. \end{aligned}$$ Do đó $\lim u_n=\lim u_{n+2}=\lim\left[\dfrac{2}{3}(b-a)\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+a\right]=\dfrac{a+2b}{3}$.	0,5

□

ĐỀ SỐ 4A

BÀI 1. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+1}$.

② $\lim \dfrac{3^{n+2}-2^n+4}{2.3^n+2^n+1}$.

Lời giải.

① $A = \lim \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$ ..... 0,5 điểm.

$A = \dfrac{2+0-0}{1+0} = 2$ ..... 0,5 điểm.

② $B = \lim \dfrac{3^{n+2}-2^n+4}{2.3^n+2^n+1} = \lim \dfrac{9.3^n-2^n+4}{2.3^n+2^n+1} = \lim \dfrac{9-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+4.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ ..... 0,5 điểm.

$B = \dfrac{9-0+4.0}{2+0+0} = \dfrac{9}{2}$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (3,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9x+8}{1-x}$.

② $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

③ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+1}+3}{x+1}$.

④ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)$.

Lời giải.

① $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9x+8}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-8)}{1-x}$ ..... 0,25 điểm.

$A = \lim\limits_{x\to 1}(8-x) = 7$ ..... 0,5 điểm.

② $B = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-6}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$B = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$B = \dfrac{3}{(2+2)\cdot(2+2)} = \dfrac{3}{16}$ ..... 0,25 điểm.

③ $C = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+1}+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{16+\dfrac{1}{x^2}}+3}{x+1}$ ..... 0,25 điểm.

$C = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\sqrt{16+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ ..... 0,25 điểm.

$C = \dfrac{-4+0}{1+0} = -4$ ..... 0,25 điểm.

④ $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x-1}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}$ ..... 0,25 điểm.

$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$ ..... 0,25 điểm.

$D=\dfrac{-1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$ ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ m+1 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$ ..... 0,5 điểm.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$ ..... 0,5 điểm.

Theo giả thiết $f(1)=m+1$ ..... 0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+1=3\Leftrightarrow m=2$ ..... 0,5 điểm.

Vậy $m=2$ ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 4. (1,5 điểm) Chứng minh rằng phương trình $2x^5-7x-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2x^5-7x-1$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ ..... 0,5 điểm.

Ta có: $f(0)=-1, f(2)=49\Rightarrow f(0).f(2)<0$ ..... 0,5 điểm.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 5. (1,5 điểm) Cho phương trình $m(x+1)(x-2)^{11}+3x-4=0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Đặt $f(x)=m(x+1)(x-2)^{11}+3x-4=0$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ ..... 0,5 điểm.

Ta có: $f(-1)=-7, f(2)=2\Rightarrow f(-1).f(2)<0$ ..... 0,5 điểm.

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;2), \forall m$ ..... 0,5 điểm.

□

H ĐỀ SỐ 4B

BÀI 6. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim(n^3+3n^2+n-10)$.

② $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+6n+1}-n}{3n+1}$.

Lời giải.

① $A=\lim(n^3+3n^2+n-10)=\lim\left[n^3\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{10}{n^3}\right)\right]$ ..... 0,5 điểm.

$A=+\infty$ vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{10}{n^3}\right)=1>0$ ..... 0,5 điểm.

② $B = \lim \dfrac{\sqrt{4n^2+6n+1}-n}{3n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1}{3+\dfrac{1}{n}}$ ..... 0,5 điểm.

$B = \dfrac{2-1}{3+0} = \dfrac{1}{3}$ ..... 0,5 điểm.

□

BÀI 7. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$.

② $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-2x}-2}{x-3}$.

Lời giải.

① $A = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1}$ ..... 0,25 điểm.

$A = +\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 > 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ và $x-1 > 0, \forall x > 1$ ..... 0,25 điểm.

② $B = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-2x}-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2+\sqrt{7-2x}-1}{x-3} = I + J$ ..... 0,25 điểm.

$I = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$I = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$ ..... 0,25 điểm.

$J = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{7-2x}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-2x}{(x-3)\left(\sqrt{7-2x}+1\right)}$ ..... 0,25 điểm.

$J = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2}{\sqrt{7-2x}+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ ..... 0,25 điểm.

Suy ra $B = I + J = -\dfrac{3}{4}$ ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 8. (2,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx-m-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ 2x+m^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2m^2+3m-2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+mx-m-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+m+1)}{x-1}$ ..... 0,25 điểm.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+m+1) = m+2$ ..... 0,5 điểm.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+m^2) = m^2+2$ ..... 0,5 điểm.

Theo giả thiết $f(1) = 2m^2+3m-2$ ..... 0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ ..... 0,25 điểm.

$\Leftrightarrow m+2 = m^2+2 = 2m^2+3m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m=0 \\ m^2+3m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ ..... 0,5 điểm.

Vậy $m = 1$ ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 9. (2,0 điểm) Chứng minh rằng phương trình $5x^4 + x^2 - 10 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 5x^4 + x^2 - 10$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ ..... 0,5 điểm.

Ta có: $f(-2) = 74, f(0) = -10, f(2) = 74$ ..... 0,25 điểm.

Vì $f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (-2;0) : f(x_1) = 0$ ..... 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(2) < 0 \Rightarrow \exists x_2 \in (0;2) : f(x_2) = 0$ ..... 0,5 điểm.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm ..... 0,25 điểm.

□

BÀI 10. (1,5 điểm) Cho các số thực a, b, c với $a \neq 0$ thỏa mãn $5a + 3b + 2c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ ..... 0,25 điểm.

Ta có: $f(1) = a + b + c, f(2) = 4a + 2b + c \Rightarrow f(1) + f(2) = 5a + 3b + 2c = 0$ ..... 0,5 điểm.

$\Rightarrow f(1) = -f(2) \Rightarrow f(1).f(2) = -[f(2)]^2$ ..... 0,25 điểm.

Nếu $f(2) = 0$ thì $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Nếu $f(2) \neq 0$ thì $f(1).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ ..... 0,5 điểm.

□

1 ĐỀ SỐ 5A

BÀI 1 (2 điểm). Tìm giới hạn của các dãy số sau:

① (u_n) có $u_n = \dfrac{3^n - 4^{n+1} - 3}{2^n - 4^n + 2}$.

② (v_n) có $v_n = \sqrt{3n^2 + n + 5}$.

Lời giải.

① $L = \lim u_n = \lim \dfrac{3^n - 4^{n+1} - 3}{2^n - 4^n + 2} = \lim \dfrac{3^n - 4 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n + 2} = \lim \dfrac{4^n \cdot \left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 4 - \dfrac{3}{4^n}\right)}{4^n \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 + \dfrac{2}{4^n}\right)} =$

$\lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 4 - \dfrac{3}{4^n}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 + \dfrac{2}{4^n}} = 4$ ..... 1.0 điểm.

② $L = \lim v_n = \lim \sqrt{3n^2 + n + 5} = \lim \sqrt{n^2\left(3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}\right)} = \lim \left(n \cdot \sqrt{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}}\right) =$

$+\infty$ ..... 0.5 điểm.

Vì: $\lim n = +\infty; \lim \sqrt{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}} = \sqrt{3} > 0$ ..... 0.5 điểm.

□

BÀI 2 (3 điểm). Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $M = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{2x - 1}{x - 2}$.

② $N = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$.

③ $P = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$.

Lời giải.

① $M = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2-x}{2x}\cdot\dfrac{2x-1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2x}{2x} = -\dfrac{3}{4}$ ..... 1.0điểm.

② $N = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2} = -\dfrac{1}{2}$ ..... 1.0điểm.

③ $P = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$. (Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3}+x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1\right) =$
$+\infty$ hoặc $0 < \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} < \dfrac{1}{x}$ ..... 1.0điểm).

□

BÀI 3 (2 điểm). Tính các giới hạn một bên sau:

① $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+2}{x-4}$.

② $\lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x^2+2}{x+1}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x+2}{x-4} = +\infty$. Vì: ..... 0.5 điểm
$\lim\limits_{x\to 4^+} (x+2) = 6 > 0$ ..... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x\to 4^+} (x-4) = 0$ và $x-4 > 0$ ..... 0.25điểm.

② $\lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x^2+2}{x+1} = -\infty$. ..... 0.5 điểm
Vì $\lim\limits_{x\to (-1)^-} (x^2+2) = 3 > 0$ ..... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x\to (-1)^-} (x+1) = 0$ và $x+1 < 0$ ..... 0.25điểm.

□

BÀI 4 (2 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x-a, & \text{Nếu } x \le 2 \\ \dfrac{-x^3+x+6}{x-2}, & \text{Nếu } x > 2 \end{cases}$.
Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Lời giải.

— $\forall x > 2 : f(x) = \dfrac{-x^3+x+6}{x-2}$ là hàm phân thức hữu tỷ nên liên tục trên tập xác định của nó. 0.5 điểm

— $\forall x < 2 : f(x) = 3x - a$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ ..... 0.5điểm.

— Xét hàm số tại $x = 2$:
$f(2) = 6 - a$ 0.5điểm
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - a) = 6 - a$ 0.5điểm
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^3 + x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(-x^2 - 2x - 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 - 2x - 3) = -11$ 0.5điểm

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 6 - a = -11 \Leftrightarrow a = 17$ ..... 0.5điểm.
Vậy với $a = 17$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 5 (1 điểm). Chứng minh rằng phương trình: $3x^5 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.
Đặt hàm số $f(x) = 3x^5 + 2x - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[0; 1]$, và:0.5 điểm
$f(0) = -1, f(1) = 4 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$ ..... 0.25 điểm
Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0; 1)$ ..... 0.25 điểm. □

J ĐỀ SỐ 5B

BÀI 1 (2 điểm). Tìm giới hạn của các dãy số sau:

① (u_n) có $u_n = \dfrac{3^n + 3 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n}$.

② (v_n) có $v_n = \sqrt{n^2 + n + 2}$.

Lời giải.

(a) $L = \lim u_n = \lim \dfrac{3^n + 3 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n} = \lim \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 3 - \frac{3}{4^n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = -3$ ..... 1.0điểm.

(b) $L = \lim v_n = \lim \sqrt{n^2 + n + 2} = \lim \sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim n \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = +\infty$. (Vì: $\lim n = +\infty, \lim \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = 1$) ..... 1.0 điểm.

□

BÀI 2 (3 điểm). Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $M = \lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \dfrac{2x - 1}{x + 3}$.

② $N = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$.

③ $P = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải.

① $M = \lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x+3}{3x}\cdot\dfrac{2x-1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x-1}{3x} = \dfrac{7}{9}$ ..... 1.0điểm.

② $N = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$
$= \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \dfrac{2}{3}$ ..... 1.0điểm.

③ $P = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. (Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}1 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) =$
$+\infty$, $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \dfrac{1}{x}$) ..... 1.0 điểm.

□

BÀI 3 (2 điểm). Tính các giới hạn một bên sau:

① $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}$.

② $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$. Vì: ..... 0.5 điểm
$\lim\limits_{x\to1^+}(x+2) = 3 > 0$ ..... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$ và $x-1>0$ ..... 0.25điểm.

② $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2+1}{x+2} = -\infty$. Vì ..... 0.5 điểm:
$\lim\limits_{x\to-2^-}(x^2+1) = 5 > 0$ ..... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2) = 0$ và $x+2<0$ ..... 0.25điểm.

□

BÀI 4 (2 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x-a & \text{nếu } x = 2 \\ \dfrac{-x^3+x+6}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \end{cases}$.
Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Lời giải.

— $\forall x \neq 2$ hàm số luôn liên tục ..... 0.5 điểm.

— Xét hàm số tại $x = 2$:

$f(2) = 2-a$ 0.5điểm

$\lim\limits_{x\to2}f(x) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{-x^3+x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(-x^2-2x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}(-x^2-2x-3) = -11$ 1.0điểm.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow 2 - a = -11 \Leftrightarrow a = 13$ ..... 0.5điểm.
Vậy với $a = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 5 (1 điểm). Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Đặt hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[0;1]$. Và: 0.5 điểm

$f(0) = -1, f(1) = 2 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;1)$ ..... 0.5điểm. □

K ĐỀ SỐ 6A

BÀI 1. (4 điểm) Tính các giới hạn sau

① $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} + 1\right)$.

② $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}\right)$.

③ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right)$.

④ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x+2}$.

Lời giải.

① $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} + 1\right) = \lim(-n^2)\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ 0.5điểm

$= -\infty$ 0.5điểm

② $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}\right)}$ ... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}}$ ..... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)}$ ..... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{2}$ ..... 0.25 điểm

③ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-(x+1)}{x(x+1)}$ ..... 0,5 điểm

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1$ ..... 0,5 điểm

④ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$ ..... 0.5 điểm

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \dfrac{-2}{3}$ ..... 0.5 điểm

□

BÀI 2. (2 điểm) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

+ Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ ..... 0.5 điểm

+ Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$. ..... 0.5 điểm

+ Tại $x = 3$ ta có $f(3) = 5$. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4 \neq f(3)$.

  Do đó hàm số không liên tục tại $x = 3$..... 0.5 điểm

+ Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$, nhưng gián đoạn $x = 3$. 0.5 điểm

□

BÀI 3. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}, & \text{nếu } x > 2 \\ mx+3, & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Lời giải.

+ Ta có $f(2) = 2m+3$ ..... 0.5 điểm

+ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2m+3$ ..... 0.5 điểm

+ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} = \dfrac{7}{4}$ ..... 0.5 điểm

+ Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $2m+3 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{-5}{8}$ .....0.5 điểm □

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình:

① $x^5 + x^3 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

② $\cos x + m\cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Lời giải.

① Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - 1$, ta có $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0;1]$ ..... 0.5 điểm

$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) = -1 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0;1) : f(x_0) = 0$ ta có điều phải chứng minh. ..... 0.5 điểm

② Đặt $f(x) = \cos x + m\cos 2x$, ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$ ... 0.5 điểm

Ta có:

$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right).f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0, \forall m \Rightarrow \exists x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right) : f(x_0) = 0$ (đpcm). 0.5 điểm

□

L ĐỀ SỐ 6B

BÀI 1. (1.5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$
Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$, hãy tính giới hạn đó.

Lời giải.

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2+u_n}$ ..... 0.25 điểm

$\Rightarrow a = \sqrt{a+2} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ hoặc $a = 2$. ..... 0.5 điểm

Vì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{R}$ nên $\lim u_n = a > 0$. Vậy $\lim u_n = 2$. ..... 0.25 điểm □

BÀI 2. (1.5 điểm) Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} - \dots$

Lời giải.

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 0.25 điểm

Vì $|q| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là cấp số nhân lùi vô hạn. ..... 0.25 điểm

Do đó $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} - \dots = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. ..... 0.5 điểm

□

BÀI 3. (4 điểm) Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+1}{x-2}$.

② $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$.

③ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$.

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$ ..... 1.0 điểm

② $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}$ ..... 0.5 điểm

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+3}{2x+1} = \dfrac{4}{3}$. ..... 0.5 điểm

③ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x(\sqrt{9+x}+3)}{9+x-9} = 24$. ..... 1.0 điểm

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(2\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} + \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x} \right)$ ..... 0.25 điểm

mà $\lim\limits_{x \to 0} 2\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = 1$ ..... 0.25 điểm

và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \dfrac{1}{12}$ ..... 0.25 điểm

Do đó $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \dfrac{13}{12}$ ..... 0.25 điểm

□

BÀI 4. (1.5 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{khi } x < 3 \\ 2mx+m+1 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

- Nếu $x < 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định nên liên tục trên $(-\infty;3)$. ..... 0.25 điểm
- Nếu $x > 3$ thì $f(x) = 2mx+m+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3;+\infty)$. .... 0.25 điểm
- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 3$.

  + Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3-4x+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-}(x-1) = 2$. ..... 0.25 điểm

  + $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(2mx+m+1) = 7m+1$ ..... 0.25 điểm

  + $f(3) = 7m+1$ ..... 0.25 điểm

- Hàm số liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{7}$..0.25 điểm

□

BÀI 5. (1.5 điểm) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, chứng minh phương trình

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$$

có nghiệm.

Lời giải.

- Đặt $f(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b)$, ta có $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. ..... 0.25 điểm

  Ta có $f(a) = a(a-b)(a-c); f(b) = b(b-c)(b-a); f(c) = c(c-a)(c-b)$, không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$ ..... 0.25 điểm

- Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $c = 0$ ta có $f(0) = 0$ do đó $x = 0$ là một nghiệm của phương trình. ..... 0.5 điểm

- Giả sử $b \neq 0$ ta xét hai trường hợp

  + Nếu $a \leq b < 0 \Rightarrow f(a)f(b) = -ab(a-b)^2(a-c)(b-c) \leq 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$. .....0.25 điểm

  + Nếu $0 < b \leq c \Rightarrow f(b).f(c) = -bc(b-c)^2(b-a)(c-a) \leq 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[b;c]$. .....0.25 điểm

□

CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

⚠ *Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0.*
Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2 QUAN HỆ GIỮA SỰ TỒN TẠI CỦA ĐẠO HÀM VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Định lí 1. *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.*

⚠ *a) Định lí 1 tương đương với khẳng định: Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.*

b) Mệnh đề đảo của Định lí 1 không đúng. Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

3 Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Định lí 2. *Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.*

Định lí 3. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

4 Ý NGHĨA VẬT LÍ CỦA ĐẠO HÀM

a) $v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

b) $I(t) = Q'(t)$ là cường độ tức thời của dòng điện $Q = Q(t)$ tại thời điểm t.

5 ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.
Khi đó, ta gọi hàm số

$$\begin{aligned} f' : (a;b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, ký hiệu là y' hay $f'(x)$.

6 ĐẠO HÀM MỘT BÊN

Định nghĩa 3. a) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên phải

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^+)$.

b) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên trái

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^-)$.

Các đạo hàm bên phải và bên trái được gọi chung là đạo hàm một bên.

Định lí 4. *Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0^+), f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó, ta có*

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0).$$

Định nghĩa 4. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- Có đạo hàm tại mọi $x \in (a;b)$;
- Có đạo hàm bên phải tại $x = a$;
- Có đạo hàm bên trái tại $x = b$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1.1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta thực hiện như sau:

— *Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0, tính*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

— *Bước 2. Lập tỉ số* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

— *Bước 3. Tìm* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}$ tại điểm $x_0=3$.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0=3$. Ta có

$$\begin{aligned}&\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)=\frac{2}{3+\Delta x}-\frac{2}{3}=-\frac{2\Delta x}{3(3+\Delta x)};\\&\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2}{3(3+\Delta x)};\\&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{3(3+\Delta x)}=-\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Vậy $f'(3)=-\dfrac{2}{9}$. □

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=-x^2+3x-2$ tại điểm $x_0=2$.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0=2$. Ta có

$$\begin{aligned}&\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=[-(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)-2]-(-2^2+3\cdot 2-2)=-\Delta^2 x-\Delta x;\\&\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\Delta x-1;\\&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x-1)=-1.\end{aligned}$$

Vậy $y'(2)=-1$. □

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ tại điểm $x_0=1$.

Lời giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0=1$. Ta có

$$\begin{aligned}&\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{1+\Delta x}-1;\\&\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x};\\&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 4. Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm x bất kì.

Lời giải

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, giả sử Δx là số gia của đối số tại x. Ta có

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = \Delta^3 x + 3x\Delta^2 x + 3x^2\Delta x;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta^3 x + 3x\Delta^2 x + 3x^2\Delta x}{\Delta x} = \Delta^2 x + 3x\Delta x + 3x^2;$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta^2 x + 3x\Delta x + 3x^2) = 3x^2.$$

Vậy $f'(x) = 3x^2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

Lời giải.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 4$. Ta có

$$\Delta y = f(4+\Delta x) - f(4) = \frac{1}{1+\Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1+\Delta x};$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1+\Delta x};$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x} = -1.$$

Vậy $f'(4) = -1$. □

BÀI 2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x = \dfrac{\pi}{6}$. Ta có

$$\Delta y = f\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+3\Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} = \cos(3\Delta x) - 1;$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(3\Delta x)-1}{\Delta x} = -\frac{2\sin^2\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x};$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} = 0.$$

Vậy $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$. □

BÀI 3. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 5$ tại điểm x bất kì.

Lời giải.

Đáp số: $f'(x) = 3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

BÀI 4. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(2) = 0$. □

BÀI 5. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Đáp số: $f'(1) = \dfrac{3}{4}$. □

DẠNG 1.2. Ý nghĩa của đạo hàm vào một số bài toán

① *Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quảng đường đi được trong thời gian t. Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.*

② *Từ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ta có được công thức xấp xỉ*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

③ *Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.*

VÍ DỤ 1. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8\,\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5\,\text{s}$.

Lời giải

Ta có: $v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0} = gt_0$. Do đó, tại thời điểm $t_0 = 5\,\text{s}$ vận tốc tức thời của chuyển động là $v(5) = 5g \approx 49\,\text{m/s}$. □

VÍ DỤ 2. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196\,\text{m/s}$ (bỏ qua sức cản không khí). Tính vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm $t_0 = 10\,\text{s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g \approx 9{,}8\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

Phương trình chuyển động của viên đạn $s(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$ với thời gian t tính bằng đơn vị (s). Ta có: $v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\left(\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2\right) + (v_0t - v_0t_0)}{t - t_0} = gt_0 + v_0$. Do đó, tại thời điểm $t_0 = 10\,\text{s}$ vận tốc tức thời của viên đạn là $v(10) = 98 + 196 = 294\,\text{m/s}$.

□

VÍ DỤ 3. Tính gần đúng giá trị $\sqrt{8{,}99}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên tập $[0; +\infty)$. Trên khoảng xác định, hàm số có đạo hàm với mọi x và $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Áp dụng công thức xấp xỉ với $\Delta x = -0{,}01$, $x_0 = 9$ ta được

$$f(8{,}99) = f(9 - 0{,}01) \approx f(9) + f'(9)(-0{,}01) = 3 + \frac{-0{,}01}{6} \approx 2{,}9983.$$ □

⚠ *Từ công thức xấp xỉ ta viết lại $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Lúc này, ta có thể hiểu được rằng:* **đường cong có phương trình $y = f(x)$ có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của nó có hệ số góc $f'(x_0)$ quanh lân cận của tiếp điểm.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$

Lời giải.

Áp dụng công thức xấp xỉ, ta được $\sqrt{3,99} \approx 1,9975$. □

BÀI 2. Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Tính được $D'(n) = 90n - 3n^2$, do đó tốc độ tryền bệnh tức thời tại thời điểm $n = 10$ chính là $D'(10) = 600$ người/ngày. □

BÀI 3. Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{x+1} - 1$. Trên khoảng $(-1;+\infty)$ hàm số có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \dfrac{1}{2}$. □

DẠNG 1.3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), $M(x_0;y_0)$ thuộc (C) với $y_0 = f(x_0)$. Nếu $\exists f'(x_0)$ thì:
Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm $M(x_0,y_0)$ là $f'(x_0)$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại $M(x_0;y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{5.1}$$

Các dạng viết phương trình tiếp tuyến

① *Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0.*
Tính x_0 (hoặc y_0) từ giả thiết
Tính $f'(x_0)$
Viết phương trình tiếp tuyến
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

② *Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc hay song song với một đường thẳng cho trước.*
Hệ số góc của đồ thị hàm số tại điểm M_0 là $f'(x_0)$
Vì tiếp tuyến có hệ số góc k nên ta có $f'(x_0) = k$, giải ta tìm được x_0
Viết phương trình tiếp tuyến
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

③ *Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$*
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 có hệ số góc $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có $a.f'(x_0) = -1$, giải ta tìm được x_0
Viết phương trình tiếp tuyến
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

④ *Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x,y)$*
Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 (*)$$
Vì $A(x;y)$ nằm trên tiếp tuyến nên toạ độ của A thoả mãn $*$, thay toạ độ của A vào ta tìm được x_0.
Viết phuong trình tiếp tuyến với mỗi x_0 tìm được

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy

b) Tại điểm có tung độ bằng 2

c) Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = 6x + 1$

d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{-1}{9}x + 3$

Lời giải

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 6x$.

a) (C) cắt Oy nên $x = 0 \Rightarrow y = 2$. Vậy tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(0;2)$ là $y = y'(0)(x-0) + 2 \Rightarrow y = 2$.

b) Điểm trên (C) có tung độ bằng 2 $\Rightarrow$ hoành độ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 0; y = 2; A(0;2) \\ x = 3; y = 2; B(3;2) \end{bmatrix} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $\begin{bmatrix} y = 2 \\ y = 9x - 24 \end{bmatrix}$

c) Tiếp tuyến song song với $y = 6x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6$ với x_0 là hoành độ tiếp điểm. Giải phương trình ta có $\begin{bmatrix} x_0 = 1 + \sqrt{3} \\ x_0 = 1 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = 6x - 6 - 6\sqrt{3} \\ y = 6x - 6 + 6\sqrt{3} \end{bmatrix}$

d) Tiếp tuyến vuông góc với $y = -\dfrac{1}{9}x + 3 \Rightarrow f'(x_0) = 9 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = 9x - 25 \\ y = 9x + 20 \end{bmatrix}$

□

VÍ DỤ 2. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - m - 1(C_m)$. Viết tiếp tuyến của (C) tại các điểm cố định của đồ thị hàm số.

Lời giải

Gọi $A(x;y)$ là điểm cố định của (C_m) nên $y = x^3 + mx^2 - m - 1$ thoả mãn với mọi m. Điều này tương đương với phương trình bậc nhất ẩn m : $m(x^2 - 1) + x^3 - y - 1 = 0$ có vô số nghiệm, suy ra $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1; & y = 0; & A(1;0) \\ x = -1; y = -2; B(-1;-2) \end{bmatrix}$

$y'(x) = 3x^2 + 2mx$

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y = (3 + 2m)(x - 1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại B là $y = (3 - 2m)(x + 1) - 2$. □

VÍ DỤ 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3m - 2(C_m)$. Chứng minh rằng tiếp tuyến của C_m tại giao của (C_m) với Oy luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Giao của (C_m) với Oy là $A(0;3m-2)$.
$y'(x)=3x^2-3m \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là $y=-3mx+3m-2(*)$
Gọi $B(x;y)$ là điểm cố định của $(*) \Rightarrow$ phương trình bậc nhất ẩn $m: 3(1-x)m-y-2=0$ có vô số nghiệm nên $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$. Vậy $B(1;-2)$ là điểm cố định của $(*)$. □

VÍ DỤ 4. Cho đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5(C)$; tìm điểm M thuộc C mà hệ số góc tiếp tuyến tại M đạt giá trị nhỏ nhất, viết phương trình tiếp tuyến tại đó.

Lời giải

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $y'(x_0)$
$y'(x)=3x^2+6x-9 \Rightarrow y'(x)=3(x+1)^2-12$.
Vậy $\min y'(x)=-12$ tại điểm có $x=-1$
Phương trình tiếp tuyến tại đó $y=-12(x+1)+16$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho đồ thị hàm số $y=-x^4+2mx^2-2m+1(C_m)$. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm cố định vuông góc.
Lời giải.
Gọi $A(x;y)$ là điểm cố định của (C_m) ta có phương trình bậc nhất ẩn $m: (2x^2-2)m-x^4-y+1=0$ có vô số nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ -x^4-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=0; A(1;0) \\ x=-1; y=0; B(-1;0) \end{array}\right.$
Ta có phương trình tiếp tuyến tại $A: y=(4m-4)(x-1)$; Phương trình tiếp tuyến tại $B: y=(4-4m)(x+1)$.
Hai tiếp tuyến vuông góc nên ta có $(4m-4)(4-4m)=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{5}{4} \\ m=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ □

BÀI 2. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác ABO vuông cân.
Lời giải.
Ta có $y'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$ là $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$
Tiếp tuyến này cắt Ox tại điểm $A(\dfrac{3x_0+(x_0-1)(x_0+2)}{3};0)$, cắt Oy tại $B(0;\dfrac{3x_0+(x_0+2)(x_0-1)}{(x_0-1)^2}$
Tam giác OAB vuông cân tại $O \Rightarrow x_A=y_B \Leftrightarrow \dfrac{3x_0+(x_0-1)(x_0+2)}{3}=\dfrac{3x_0+(x_0+2)(x_0-1)}{(x_0-1)^2}$
$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1+\sqrt{3} \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến } y=-x+2+2\sqrt{3} \\ x_0=1-\sqrt{3} \Rightarrow \text{ Phương trình tiếp tuyến } y=-x+2-2\sqrt{3} \end{array}\right.$ □

BÀI 3. Cho đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1(C_m)$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt $y=1$ tại ba điểm $C(0;1), D, E$ mà tiếp tuyến tại D, E vuông góc với nhau.
Lời giải.
Đồ thị hàm số cắt $y=1$ tại ba điểm $\Rightarrow$ phương trình $x^3+3x^2+mx=0$ có ba nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow x^2+3x+m$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-4m>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{9-4m}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{9-4m}}{2} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x_1.x_2 = m \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$

$y'(x) = 3x^2 + 6x + m$

Hai tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc nên ta có $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$\Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1 + m)(3x_2^2 + 6x_2 + m) = -1$

$\Leftrightarrow 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9+\sqrt{65}}{8}(tm) \\ m = \dfrac{9-\sqrt{65}}{8}(tm) \end{array}\right.$ □

BÀI 4. Cho đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2(C)$. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $y = 2$ mà có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới (C).

Lời giải.

Ta có $y'(x) = -3x^2 + 6x$

Ta có phương trình tiếp tuyesn tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Tiếp tuyến đi qua $A(x_A; 2)$ thuộc $y = 2$ nên ta có $y_A = y'(x_0)(x_A - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(2x_0^2 - (3x_A - 1)x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 - 3(x_A - 1)x_0 + 2 = 0 (*) \end{array}\right.$

Từ A kẻ được ba tiếp tuyến nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_A \neq 2 \end{cases} \Rightarrow$

$x_A \in (-\infty; -1) \cup (\dfrac{5}{3}; +\infty) \backslash \{2\}$ □

BÀI 5. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}(C)$ và $I(1;2)$.

a) Tìm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với MI.

b) Điểm N thuộc (C), tiếp tuyến của (C) tại N cắt $x = 1, y = 2$ tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng N là trung điểm của AB và diện tích tam giác $S_{\triangle}ABI$ không đổi.

Lời giải.

Ta có $y'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

a) Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C), tiếp tuyến tại M có vector chỉ phương $\vec{u}(1; y'(x_0))$.
Vector $\overrightarrow{MI}(1 - x_0; 2 - y_0)$, MI vuông góc với tiếp tuyến nên $\overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0$. Giải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l} x_0 = 2; y_0 = 3; M(2;3) \\ x_0 = 0; y = 1; M(0;1) \end{array}\right.$

b) Phương trình tiếp tuyến tại $N(x_0; y_0) : y = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x_0 - x) + \dfrac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$

Tiếp tuyến này cắt $x = 1$ tại $A(1; \dfrac{2x_0}{x_0 - 1})$, cắt $y = 2$ tại $B(2x_0 - 1; 2)$, từ đây ta có ngay N là trung điểm của AB

Dễ thấy $IA \perp IB$ nên $S_{\triangle}IAB = \dfrac{1}{2}AI.IB = 2$, vậy diện tích tam giác IBA không đổi

□

Bài tập tổng hợp

BÀI 6. Cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}(C)$. Tìm điểm A nằm trên Oy sao cho từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) mà hai tiếp điểm nằm về hai phía của Ox.

Lời giải.

Ta có $y'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Điểm $A(0; y_A)$ thuộc Oy . Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1}$$

Điểm A nằm trên tiếp tuyến nên $y_A = \dfrac{x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1^2)} \Leftrightarrow x_0^2(y_A-1) - 2x_0(y_A+2) + y_A + 2 = 0(*)$

Tiếp điểm nằm về hai phía của Oy nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên $(y_A-1)(y_A+2) < 0$. Vậy A nằm trên Oy với $y_A \in (-2;1)$ thì thoả manx đề bài. □

DẠNG 1.4. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số

Một hàm số đạo hàm tại một điểm, tức là tồn tại đạo hàm tại điểm đó, thì liên tục tại điểm đó.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, \text{ nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2, \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$ □

nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Tiếp theo ta xét tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$, ta xét $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -2$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$ do đó không tồn tại đạo hàm của $f(x)$ tại điểm $x = 0$.

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = \begin{cases} \cos x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -\sin x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$ nên hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$, vì thế $g(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$. □

Bài tập tự luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Lời giải.

Ta xét $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-0}{x-0} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-0}{x-0} = -1$ Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}$ hay hàm số $y = y(x)$ không đạo hàm tại điểm $x = 0$. □

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Cho $u = u(x); v = v(x); C$ là hằng số.

— $(u \pm v)' = u' \pm v'; (u + v - w)' = u' + v' - w'$

— $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

— $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C \cdot u'}{u^2}$

— Nếu $y = f(u), u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_x \cdot u'_x$.

2 CÁC CÔNG THỨC

— $(C)' = 0; (x)' = 1$.

— $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

— $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 0) \Rightarrow (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}, (u > 0)$.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - 5x + 2$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có

$$y' = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq \frac{5}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là $(-\infty; -1) \cup \left[\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$. □

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = (x^2 + 2)(x - 3)$;

② $y = x^5 - \dfrac{1}{x^3}$;

③ $y = \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$;

④ $y = \sqrt[n]{x}$;

⑤ $y = \sqrt[7]{2x - 1}$.

Lời giải

① $y' = (x^2 + 2)'(x - 3) + (x^2 + 2)(x - 3)' = 2x(x - 3) + x^2 + 2 = 3x^2 - 6x + 2$.

② $y' = (x^5)' - \left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = 5x^4 + \dfrac{3}{x^4}$.

③ $y' = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' + (\sqrt{x})' = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

④ $y' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

⑤ $y' = (2x-1)^{\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{7}(2x-1)^{\frac{1}{7}-1}\cdot(2x-1)' = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{(2x-1)^6}}$.

□

VÍ DỤ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \dfrac{2x-1}{x+5}$;

② $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$;

③ $y = \dfrac{x}{x^2+1}$;

④ $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1}$;

⑤ $y = \dfrac{x^2+\sqrt{2x}}{x}$;

⑥ $y = \sqrt[3]{x} + (x^3+x)^5$.

Lời giải

① $y' = \dfrac{(2x-1)'(x+5) - (2x-1)(x+5)'}{(x+5)^2} = \dfrac{2(x+5)-(2x-1)}{(x+5)^2} = \dfrac{11}{(x+5)^2}$.

② $y' = \left(x - \dfrac{1}{x+1}\right)' = 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

③ $y' = \dfrac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

④ $y' = \dfrac{(2x+2)(x^2-x+1) - (x^2+2x+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{-3x-4x+5}{(x^2-x+1)^2}$.

⑤ $y' = (x)' - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right) = 1 + \sqrt{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2x^3}}$.

⑥ $y' = (\sqrt[3]{x})' + \left[(x^3+x)^5\right]' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 5(x^3+x)^4\cdot(x^3+x)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 5(x^3+x)^4(3x^2+1)$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = (x-x^2)^{32}$;

② $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

③ $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

④ $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ($a$ là hằng số).

Lời giải

① $y' = 32(x-x^2)^{31}\cdot(x-x^2)' = 32(1-2x)(x-x^2)^{31}$.

② $y' = -\dfrac{(x\sqrt{x})'}{(x\sqrt{x})^2} = -\dfrac{x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})'}{x^3} = -\dfrac{\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{x^3} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

③ $y' = \dfrac{(1+x)'\sqrt{1-x} - (1+x)(\sqrt{1-x})'}{(\sqrt{1-x})^2} = \dfrac{\sqrt{1-x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

④ $y' = \dfrac{x'\sqrt{a^2-x^2} - x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} - x\dfrac{(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \dfrac{2(a^2-x^2) - x(-2x)}{2\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

□

C CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 2.1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức

Áp dụng các qui tắc và công thức tính đạo hàm.

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$.

② $y = (x^3-1)(1-x^2)$.

Lời giải

① Ta có $y' = 4x^3 - x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

② Ta có $y' = (x^3-2)'(1-x^2) + (x^3-2)(1-x^2)' = 3x^2(1-x^2) + (x^3-2)(-2x) = -5x^4 + x^3 + 4x$.

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \dfrac{2x+1}{1-3x}$.

② $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

③ $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Lời giải

① Ta có $y' = \dfrac{(2x-1)'(1-3x) - (2x-1)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \dfrac{2(1-3x) - (2x-1)(-3)}{(1-3x)^2} = \dfrac{5}{(1-3x)^2}$.

② Ta có $y' = \dfrac{\left(x^2-3x+3\right)'(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x-3)(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

③ Ta có $y' = \dfrac{\left(1+x-x^2\right)'\left(1-x+x^2\right)-\left(1+x-x^2\right)\left(1-x+x^2\right)'}{\left(1-x+x^2\right)^2}$
$= \dfrac{(1-2x)\left(1-x+x^2\right)-\left(1+x-x^2\right)(-1+2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2} = \dfrac{2-4x}{\left(1-x+x^2\right)^2}$.

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$.

② $y = (x-2)\sqrt{x^2-3}$.

③ $y = \left(1+\sqrt{1-2x}\right)^3$.

Lời giải

① Ta có $y' = \dfrac{\left(2x^2-5x+2\right)'}{2\sqrt{2x^2-5x+2}} = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+2}}$.

② Ta có $y' = (x-2)'\sqrt{x^2-3}+(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}\right)' = \sqrt{x^2-3}+(x-2)\dfrac{\left(x^2-3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2-3}+\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-3}}$.

③ Ta có $y' = 3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2\left(1+\sqrt{1-2x}\right)' = 3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}} = -\dfrac{3\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^2}{\sqrt{1-2x}}$.

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh các công thức tổng quát sau:

① $\left(\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}$; ($a, b, a_1, b_1$ là hằng số).

② $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)' = \dfrac{a.a_1x^2+2a.b_1x+\begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}$; ($a, b, c, a_1, b_1$ là hằng số).

③ $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$;
(a, b, c, a_1, b_1, c_1 là hằng số) .

Lời giải

① Ta có $\left(\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)' = \dfrac{(ax+b)'(a_1x+b_1)-(ax+b)(a_1x+b_1)}{(a_1x+b_1)^2} = \dfrac{a(a_1x+b_1)-a_1(ax+b)}{(a_1x+b_1)^2}$
$= \dfrac{ab_1-a_1b}{(a_1x+b_1)^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}.$

② Ta có $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)' = \dfrac{(2ax+b)(a_1x+b_1)-a_1\left(ax^2+bx+c\right)}{(a_1x+b_1)^2} = \dfrac{aa_1x^2+2ab_1x+bb_1-ca_1}{(a_1x+b_1)^2}$
$= \dfrac{a.a_1x^2+2a.b_1x+\begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}.$

③ Ta có $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)' = \dfrac{(2ax+b)\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)-\left(ax^2+bx+c\right)(2a_1x+b_1)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$
$= \dfrac{2aa_1x^3+2ab_1x^2+2ac_1x+a_1bx^2+bb_1x+bc_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$
$-\dfrac{2aa_1x^3+bb_1x+ab_1x^2+2a_1bx^2+bb_1x+2a_1cx+b_1c}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$
$= \dfrac{(ab_1-a_1b)x^2+2(ac_1-a_1c)+bc_1-b_1c}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$
$= \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \dfrac{1}{2}x^5+\dfrac{2}{3}x^4-x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x-5.$

② $y = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}x+x^2-0,5x^4.$

③ $y = \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-x.$

④ $y = x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}.$

Lời giải.

① Có $y' = \dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{8}{3}x^3-3x^2-3x+4.$

② Có $y' = -\dfrac{1}{3}+2x-2x^3.$

③ Có $y' = x^3-x^2+x-1.$

④ Có $y' = 5x^4-12x^2+2-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}.$

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = (2x-3)(x^5-2x).$

② $y = x(2x-1)(3x+2).$

③ $y = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right).$

④ $y = \dfrac{2x-1}{x-1}.$

⑤ $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}.$

⑥ $y=\dfrac{2x^2-4x+5}{2x+1}$.

⑦ $y=x+1-\dfrac{2}{x+1}$.

⑧ $y=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.

⑨ $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Lời giải.

① $y'=12x^5-15x^4-8x+6$.

② $y'=18x^2+2x-2$.

③ Ta có $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$. Suy ra $y'=-\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

④ $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

⑤ $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

⑥ $y'=\dfrac{4x^2+4x-14}{(2x+1)^2}$.

⑦ $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.

⑧ $y'=\dfrac{-5x^2-6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

⑨ $y'=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$.

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y=(2x^3-3x^2-6x+1)^2$.

② $y=\dfrac{1}{(x^2-x+1)^5}$.

③ $y=(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^2$.

④ $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

⑤ $y=\sqrt{1+2x-x^2}$.

⑥ $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$.

⑦ $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

⑧ $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$.

Lời giải.

① Có $y'=2\left(2x^3-3x^2-6x+1\right)\left(2x^3-3x^2-6x+1\right)'$
$=12\left(2x^3-3x^2-6x+1\right)\left(x^2-6x-6\right)$.

② Có $y'=-\dfrac{5\left(x^2-x+1\right)^4\left(x^2-x+1\right)'}{\left(x^2-x+1\right)^{10}}=-\dfrac{10x-5}{\left(x^2-x+1\right)^6}$.

③ Có $y'=3\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2-x+1\right)'\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(x^2-x+1\right)^3\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)'$
$=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left[3(2x-1)\left(x^2+x+1\right)+2\left(x^2-x+1\right)(2x-1)\right]$
$=\left(x^2-x+1\right)^2\left(x^2+x+1\right)\left(10x^3+x^2+5x-1\right)$.

④ Có $y=x-2+\dfrac{1}{x}$, suy ra $y'=1-\dfrac{1}{x^2}$.

⑤ Có $y'=\dfrac{\left(1+2x-x^2\right)'}{2\sqrt{1+2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

⑥ Có $y'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

⑦ Có $y' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{1+\dfrac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$= \dfrac{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x}}.$

⑧ Có $y' = 5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = 5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4\left[1+\dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right]$

$= 5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 4. Cho hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh rằng: $2\sqrt{1+x^2}\cdot y' = y$.

Lời giải.

Có $y' = \dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}.$

Vậy $2\sqrt{1+x^2}\cdot y' = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. ■ □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + 5$. Tìm m sao cho:

① $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ② $f'(x) > 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Lời giải.

① Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + m$.
Do hệ số $a = 1 > 0$ nên để $f'(x) \geq 0\,\forall x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$.
Suy ra $4 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$.

② Để $f'(x) > 0\,\forall x \in (0;+\infty)$ thì ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 4$ thì $f'(x) > 0\,\forall x \in \mathbb{R}$ nên thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì $f'(x) > 0\,\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, do đó $m = 4$ không thỏa.

Trường hợp 3: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 4$, khi đó để $f'(x) > 0\,\forall x \in (0;+\infty)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ phải có hai nghiệm không dương. Do tổng hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ bằng 4 nên luôn có ít nhất 1 nghiệm dương, vì vậy trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy với $m > 4$ thì $f'(x) > 0\,\forall x \in (0;+\infty)$.

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{m}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 + (4-m)\,x + 5m + 1$. Tìm m sao cho:

① $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ② $f'(x) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

Lời giải.

① Có $f'(x) = mx^2 - mx + 4 - m$.

Để $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(4-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m^2 - 16m < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 0 < m < \dfrac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{\varnothing\}.$

② Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 16m > 0 \\ \dfrac{4-m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{16}{5} \end{array}\right. \\ 0 < m < 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{5} < m < 4.$

□

DẠNG 2.2. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. *Ý nghĩa hình học và ý nghĩa vật lí của đạo hàm:*
   a) *Cho đường cong $(C): y = f(x)$. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.*
   b) *Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.*
   c) *Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: $Q = Q(t)$ ($Q = Q(t)$ là một hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.*
2. *Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$ thường gặp:*
   a) *Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (1).*
   b) *Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc k:*
   + Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k$.
   + Giải phương trình trên tìm x_0, tiếp tục tính $y_0 = f(x_0)$.
   + Viết phương trình tiếp tuyến theo công thức (1).
   c) *Viết phương trình tiếp tuyến d với đường cong (C), biết đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ cho trước:*
   + Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm cần tìm.
   + Tiếp tuyến d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
   + Giải phương trình trên tìm được x_0, tính y_0 và $f'(x_0)$.
   + Từ đó viết phương trình d theo (1).
   d) *Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến song song với $\Delta: y = ax + b$. Khi đó ta có $f'(x_0) = a$.*
   e) *Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó ta có $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$.*
   f) *Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ một góc ϕ. Khi đó, $|\tan\phi| = \left|\dfrac{f'(x_0) - a}{1 + f'(x_0).a}\right|$.*

VÍ DỤ 1. Cho đường cong $(C):\ y=f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x+1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

Lời giải

a) Ta có $f'(x)=x-4$. Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=11$.
Do đó, tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y=f'(-2)(x+2)+11=-6x-1$.

b) Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $f'(x_0)=1\Leftrightarrow x_0-4=1\Leftrightarrow x_0=5\Rightarrow y_0=-\dfrac{13}{2}$.
Vậy, tiếp tuyến có phương trình là $y=1(x-5)-\dfrac{13}{2}=x-\dfrac{23}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ 3x+y=2$.

Lời giải

Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.
Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ y=-3x+2$ nên ta có

$$f'(x_0)=-3\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+3=0\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=0.$$

Do vậy, tiếp tuyến có phương trình: $y=-3(x-1)+0=-3x+3$. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1;-9)$.

Lời giải

Ta có $y'=12x^2-12x$. Gọi $(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến đó.
Khi đó, phương trình tiếp tuyến tương ứng có dạng: $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.
Mặt khác, tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$ nên ta có phương trình

$$-9=(12x_0^2-12x_0)(-1-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1\Leftrightarrow (x_0+1)^2(4x_0-5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=-1\\ x_0=\dfrac{5}{4}.\end{array}\right.$$

+ Với $x=-1$ ta tìm được phương trình tiếp tuyến: $y=24x+15$.
+ Với $x=\dfrac{5}{4}$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=\dfrac{15}{4}x+\dfrac{21}{4}$. □

VÍ DỤ 4. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{2}{3}t^3+4t^2-1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v = s' = -2t^2 + 8t$.
Ta có $-2t^2 + 8t = 8 - 2(t-2)^2 \le 8$. Đẳng thức có được khi $t = 2$.
Do đó, trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 8 m/s^2. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) : $y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1.
Lời giải.
Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, ta có

$$y_0 = -1 \Leftrightarrow x_0(x_0^2 + x_0 - 1) + 1 = -1 \Leftrightarrow (x_0 + 2)(x_0^2 - x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2.$$

Tính được $f'(-2) = 7$, ta có phương trình tiếp tuyến cần tim: $y = 7x + 13$. □

BÀI 2. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) : $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.
Lời giải.
Đạo hàm $y' = f'(x) = -2x + 4$. Parabol cắt trục hoành lần lượt tại $x = 1$ và $x = 3$.
+ Với $x_0 = 1, y_0 = 0 \Rightarrow f'(1) = 2$, ta có tiếp tuyến: $y = 2x - 2$.
+ Với $x_0 = 3, y_0 = 0 \Rightarrow f'(3) = -2$, ta có tiếp tuyến: $y = -2x + 6$. □

BÀI 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ : $3x + y - 2 = 0$.
Lời giải.
Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm $y' = \dfrac{3}{(x+2)^2}$. Viết lại phương trình đường thẳng Δ : $y = -3x + 2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ nên

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -5. \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y = \dfrac{x-1}{3}$ và $y = \dfrac{x+11}{3}$. □

BÀI 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d : $x + 3y = 3$ một góc 45°.
Lời giải.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ta có $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2}$. Giả sử k là hệ số góc của tiếp tuyến. Từ giả thiết ta có phương trình

$$\left|\frac{k + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{k}{3}}\right| = |\tan 45^\circ| \Leftrightarrow |3k + 1| = |k - 3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

+ Trường hợp $k = -2$, ta tìm được 2 tiếp tuyến có phương trình lần lượt là: $y = -2x + 17$ và $y = -2x + 1$.
+ Trường hợp $k = \dfrac{1}{2}$ không tìm được tiếp tuyến nào. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C):\ y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;2)$.

Lời giải.

Gợi ý: Với tiếp điểm $(x_0;y_0)$, hệ số góc k thì phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta:\ y=k(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow kx-y-k+y_0=0$.

$$d(A,\Delta)=d(B,\Delta)\Leftrightarrow \frac{|2k-4-kx_0+y_0|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|4k+2-kx_0+y_0|}{\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1\\ k+1=-kx_0+y_0\end{array}\right..$$

Từ đó tìm được các phương trình tiếp tuyến: $y=x+1, y=x+5$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$. □

BÀI 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C):\ y=\dfrac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B mà tam giác OAB thỏa mãn $AB=OA\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ có dạng: $y=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2(x-x_0)+\dfrac{2x_0}{x_0-2}}$. Dễ dàng tính được $A\left(\dfrac{x_0^2}{2};0\right)$ và $B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0-2)^2}\right)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm x_0 là nghiệm của phương trình

$$\frac{x_0^2}{2}=\frac{2x_0^2}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow x_0^3(x_0-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0\\ x_0=4.\end{array}\right.$$

+ Với $x_0=0$ ta có $y_0=0$ (loại).
+ Với $x_0=4$ ta có phương trình tiếp tuyến $y=-x+8$. □

BÀI 7. Cho hàm số $y=\dfrac{4}{3}x^3-(2m+1)x^2+(m+2)x+\dfrac{1}{3}$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến tại giao điểm của (C_m) với trục tung cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Biết rằng tam giác OAB có diện tích bằng $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

Gợi ý: Ta có $B\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. Đáp số $m=-1$ và $m=-3$. □

BÀI 3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA $\frac{\sin x}{x}$

Định lí 1. *Hàm số* $y = \dfrac{\sin x}{x}$ *có giới hạn bằng* 1 *khi* $x \to 0$.

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Mở rộng ra, nếu hàm số $u(x)$ *thỏa mãn các điều kiện* $u(x) \neq 0$ *với mọi* $x \neq x_0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$

⚠ *Với điều kiện như trên, ta cũng có các giới hạn* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{\sin u(x)} = 1.$

2 ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đạo hàm các hàm số lượng giác cơ bản

— $(\sin x)' = \cos x.$

— $(\cos x)' = -\sin x.$

— $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ với điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

— $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ với điều kiện $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đạo hàm các hàm số lượng giác theo hàm số $u(x)$

— $(\sin u)' = u' \cos u.$

— $(\cos u)' = -u' \sin u.$

— $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ với điều kiện $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

— $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ với điều kiện $u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 3.1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

Áp dụng các công thức đạo hàm của hàm số lượng giác và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, căn bậc hai, . . .

VÍ DỤ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 3\sin x + \cos x$.

② $y = 4\sin x - 5\cos x$.

Lời giải

① $y' = (3\sin x + \cos x)' = 3 \cdot (\sin x)' + (\cos x)'$
$= 3 \cdot \cos x + (-\sin x) = 3\cos x - \sin x$.

② $y' = (4\sin x - 5\cos x)' = 4 \cdot (\sin x)' - 5 \cdot (\cos x)'$
$= 4 \cdot \cos x - 5 \cdot (-\sin x) = 4\cos x + 5\sin x$.

□

VÍ DỤ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin 2x - 3\sin x$.

② $y = \cos 3x - 4\cos x$.

Lời giải

① $y' = (\sin 2x - 3\sin x) = (\sin 2x)' - (3\sin x)'$
$= (2x)' \cdot \cos 2x - 3 \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \cos 2x - 3 \cdot \cos x = 2\cos 2x - 3\cos x$.

② $y' = (\cos 3x - 4\cos x)' = (\cos 3x)' - (4\cos x)'$
$= (3x)' \cdot (-\sin 3x) - 4 \cdot (\cos x)' = 3 \cdot (-\sin 3x) - 4 \cdot (-\sin x) = -3\sin 3x + 4\sin x$.

□

VÍ DỤ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 3\tan x$.

② $y = 4\cot x$.

③ $y = 3\tan x + \cot x$.

Lời giải

① $y' = (3\tan x)' = 3 \cdot (\tan x)' = 3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 x}$.

② $y' = (4\cot x)' = 4 \cdot (\cot x)' = 4 \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{-4}{\sin^2 x}$.

③ $y' = (3\tan x + \cot x)' = (3\tan x)' + (\cot x)'$
$= 3 \cdot (\tan x)' + (\cot x)' = 3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

□

VÍ DỤ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \tan 3x + 2\tan x$.

② $y = \cot 5x - 4\cot x$.

Lời giải

① $y' = (\tan 3x + 2\tan x)' = (\tan 3x)' + (2\tan x)'$
$= \dfrac{(3x)'}{\cos^2 3x} + 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 3x} + \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

② $y' = (\cot 5x - 4\cot x)' = (\cot 5x)' - (4\cot x)'$
$= \dfrac{-(5x)'}{\sin^2 5x} - 4 \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{-5}{\sin^2 5x} + \dfrac{4}{\sin^2 x}$.

□

VÍ DỤ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

② $y = \sin^3 x - 5\cos^5 x$.

③ $y = \sin^3 2x$.

Lời giải

① $y' = (\sin^2 x + 2\cos^2 x)' = (\sin^2 x)' + (2\cos^2 x)'$
$= 2\sin x \cdot (\sin x)' + 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)'$
$= 2\sin x \cdot \cos x + 2 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)$
$= 2\sin x \cos x - 4\sin x \cos x = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$.

② $y' = (\sin^3 x - 5\cos^5 x)' = (\sin^3 x)' - (5\cos^5 x)'$
$= (\sin^3 x)' - 5(\cos^5 x)'$
$= 3\sin^2 x \cdot \cos x - 5 \cdot 5 \cdot \cos^4 x \cdot (-\sin x)$
$= 3\sin^2 x \cos x + 25 \sin x \cos^4 x$.

③ $y' = (\sin^3 2x)' = 3\sin^2 2x \cdot (\sin 2x)'$
$= 3\sin^2 2x \cdot (2x)' \cdot \cos 2x = 6\sin^2 2x \cos 2x$.

□

VÍ DỤ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2\tan^2 x$.

② $y = 3\cot^3 x$.

Lời giải

① $y' = (2\tan^2 x)' = 2 \cdot 2\tan x \cdot (\tan x)' = 4\tan x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4\tan x}{\cos^2 x}$.

② $y' = (3\cot^3 x) = 3 \cdot 3\cot^2 x \cdot (\cot x)'$
$= 9\cot^2 x \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{-9\cot^2 x}{\sin^2 x}.$

□

VÍ DỤ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \tan^2 3x$.

② $y = \cot^3 4x$.

Lời giải

① $y' = (\tan^2 3x)' = 2\tan 3x \cdot (\tan 3x)' = 2\tan 3x \cdot (3x)' \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x} = \dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 3x}.$

② $y' = (\cot^3 4x)' = 3\cot^2 4x \cdot (\cot 4x)' = 3\cot^2 4x \cdot (4x)' \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 4x} = \dfrac{-12\cot^2 4x}{\sin^2 4x}.$

□

VÍ DỤ 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin x \cos 3x$.

② $y = \cot 5x \cos 4x$.

Lời giải

① $y' = (\sin x \cos 3x)' = (\sin x)' \cdot \cos 3x + \sin x \cdot (\cos 3x)'$
$= \cos x \cdot \cos 3x + 3\sin x \cdot (-\sin 3x)$
$= \cos x \cos 3x - 3\sin x \sin 3x.$

② $y' = (\cot 5x \cos 4x)' = (\cot 5x)' \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (\cos 4x)'$
$= \dfrac{-5}{\sin^2 5x} \cdot \cos 4x + \cot 5x \cdot (-4\sin 4x)$
$= \dfrac{-5\cos 4x}{\sin^2 5x} - 4\cot 5x \sin 4x.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin\sqrt{x+1}$.

② $y = \cos\dfrac{1}{x}$.

③ $y = x\sin\sqrt{5-x}$.

Lời giải.

① $y' = (\sin\sqrt{x+1})' = (\sqrt{x+1})' \cdot \cos\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \cos\sqrt{x+1} = \dfrac{\cos\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$.

② $y' = \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \cdot \left(-\sin\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \left(-\sin\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

③ $y' = (x\sin\sqrt{5-x})' = (x)'\sin\sqrt{5-x} + x \cdot (\sin\sqrt{5-x})'$
$= \sin\sqrt{5-x} + x \cdot (\sqrt{5-x})'\cos\sqrt{5-x}$
$= \sin\sqrt{5-x} + x \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}\cos\sqrt{5-x} = \sin\sqrt{5-x} - \dfrac{x\cos\sqrt{5-x}}{2\sqrt{5-x}}$.

□

BÀI 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 4\cos x + 5\sin x$.

② $y = 2\tan 3x - 4\cot x$.

③ $y = \cos^3 4x$.

④ $y = 2\sin^2 2x - 4\cos^2 5x$.

Lời giải.

① $y' = (4\cos x + 5\sin x)' = 4 \cdot (\cos x)' + 5 \cdot (\sin x)'$
$= 4 \cdot (-\sin x) + 5 \cdot (\cos x) = -4\sin x + 5\cos x$.

② $y' = (2\tan 3x - 4\cot x)' = (2\tan 3x)' - (4\cot x)'$
$= 2 \cdot \dfrac{(3x)'}{\cos^2 3x} - 4 \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = 2 \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} - 4 \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} = \dfrac{6}{\cos^2 3x} + \dfrac{4}{\sin^2 x}$.

③ $y' = (\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)'$
$= 3\cos^2 4x \cdot (4x)'(-\sin 4x) = -12\sin 4x\cos^2 4x$.

④ $y' = (2\sin^2 2x - 4\cos^2 5x)' = (2\sin^2 2x)' - (4\cos^2 5x)'$
$= 2 \cdot 2\sin 2x \cdot (\sin 2x)' - 4 \cdot 2 \cdot \cos 5x \cdot (\cos 5x)'$
$= 8\sin 2x\cos 2x + 40\sin 5x\cos 5x = 4\sin 4x + 20\sin 10x$.

□

BÀI 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2\tan^3 x - \cot^2 x$.

② $y = \cos 4x\tan x$.

③ $y = \tan 2x\sin 5x$.

④ $y = \tan\dfrac{4}{x+1}$.

⑤ $y = \cot\sqrt{x+5}$.

Lời giải.

① $y' = (2\tan^3 x - \cot^2 x)' = (2\tan^3 x)' - (\cot^2 x)'$
$= 2 \cdot 3 \cdot \tan^2 x \cdot (\tan x)' - 2 \cdot \cot x \cdot (\cot x)'$
$= 6\tan^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\cot x \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$= \dfrac{6\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}$.

② $y' = (\cos 4x \tan x)' = (\cos 4x)' \cdot \tan x + \cos 4x \cdot (\tan x)'$
$= 4 \cdot (-\sin 4x) + \cos 4x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = -4 \sin 4x + \dfrac{\cos 4x}{\cos^2 x}.$

③ $y' = (\tan 2x \sin 5x)' = (\tan 2x)' \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot (\sin 5x)'$
$= \dfrac{2}{\cos^2 2x} \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot 5 \cos 5x$

$= \dfrac{2 \sin 5x}{\cos^2 2x} + 5 \tan 2x \cos 5x.$

④ $y' = \left(\tan \dfrac{4}{x+1}\right)' = \left(\dfrac{4}{x+1}\right)' \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{4}{x+1}}$
$= -\dfrac{4}{(x+1)^2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{4}{x+1}}.$

⑤ $y' = (\cot \sqrt{x+5})' = (\sqrt{x+5})' \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}}$
$= \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x+5} \sin^2 \sqrt{x+5}}.$

□

BÀI 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \sin \sqrt{x^2+5}.$

② $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 3x}.$

③ $y = \dfrac{\sin^2 3x}{\cos \sqrt{x+1}}$

Lời giải.

① $y' = (\sin \sqrt{x^2+5})' = (\sqrt{x^2+5})' \cdot \cos \sqrt{x^2+5} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot \cos \sqrt{x^2+5} = \dfrac{x \cos \sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}.$

② $y' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 3x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cdot \cos^2 3x - \sin x \cdot (\cos^2 3x)'}{\cos^4 3x}$
$= \dfrac{\cos x \cdot \cos^2 3x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x \cdot (\cos 3x)'}{\cos^4 3x}$
$= \dfrac{\cos x \cdot \cos^2 3x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot (-\sin 3x)}{\cos^4 3x}$
$= \dfrac{\cos x \cdot \cos^2 3x + 3 \sin x \cdot \sin 6x}{\cos^4 3x}.$

③ $y' = \left(\dfrac{\sin^2 3x}{\cos \sqrt{x+1}}\right)' = \dfrac{(\sin^2 3x)' \cdot \cos \sqrt{x+1} - \sin^2 3x \cdot (\cos \sqrt{x+1})'}{\cos^2 \sqrt{x+1}}$
$= \dfrac{2 \cdot \sin 3x \cdot (3x)' \cdot \cos 3x \cdot \cos \sqrt{x+1} - \sin^2 3x \cdot (\sqrt{x+1})' \cdot (-\sin \sqrt{x+1})}{\cos^2 \sqrt{x+1}}$
$= \dfrac{6 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot \cos \sqrt{x+1} + \dfrac{\sin^2 3x \cdot \sin \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}}{\cos^2 \sqrt{x+1}}$
$= \dfrac{6 \sin 6x \cdot \cos \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1} + \sin^2 3x \cdot \sin \sqrt{x+1}}{2 \cos^2 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}}.$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = x^3\sqrt{\sin x}$.

② $y = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+1}}{\cos^3 3x}$.

③ $y = \sqrt{\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}}$.

Lời giải.

① $y' = (x^3\sqrt{\sin x})' = (x^3)'\cdot\sqrt{\sin x} + x^3\cdot(\sqrt{\sin x})'$
$= 3x^2\cdot\sqrt{\sin x} + x^3\cdot\dfrac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}$
$= 3x^2\cdot\sqrt{\sin x} + \dfrac{x^3\cdot\cos x}{2\sqrt{x+1}}$

② $y' = \left(\dfrac{\sin\sqrt{x^2+1}}{\cos^3 3x}\right)' = \dfrac{(\sin\sqrt{x^2+1})'\cdot\cos^3 3x - \sin\sqrt{x^2+1}\cdot(\cos^3 3x)'}{\cos^6 3x}$
$= \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\cos\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^3 3x + 9\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^2 3x\cdot\sin 3x}{\cos^6 3x}$.
$= \dfrac{x\cdot\cos\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^3 3x + 9\cdot\sqrt{x^2+1}\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^2 3x\sin 3x}{\cos^6 3x\sqrt{x^2+1}}$.

③ $y' = \left(\sqrt{\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}}}$
$= \dfrac{[\sin(5+x^2)]'\cdot\cos^3 2x - \sin(5+x^2)\cdot(\cos^3 2x)'}{\cos^6 2x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}}}$
$= \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{\sin(5+x^2)}{\cos^3 2x}}}\cdot\dfrac{2x\cdot\cos(5+x^2)\cdot\cos^3 2x + 6\sin(5+x^2)\cdot\cos^2 2x\cdot\sin 2x}{\cos^6 2x}$.

□

BÀI 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 4\sin^2\sqrt{x^3+1} + \dfrac{1}{\sin 5x}$.

② $y = 8\sqrt{\tan 3x} + \dfrac{4}{\sin^2\sqrt{x}}$.

Lời giải.

① $y' = \left(4\sin^2\sqrt{x^3+1} + \dfrac{1}{\sin 5x}\right)'$

$= 4\cdot 2\cdot \sin\sqrt{x^3+1}\cdot(\sin\sqrt{x^3+1})' - \dfrac{(\sin 5x)'}{\sin^2 5x}$

$= 4\cdot 2\cdot \sin\sqrt{x^3+1}\cdot(\sqrt{x^3+1})'\cdot\cos\sqrt{x^3+1} - \dfrac{5\cdot\cos 5x}{\sin^2 5x}$

$= 4\cdot 2\cdot \sin\sqrt{x^3+1}\cdot\dfrac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}\cdot\cos\sqrt{x^3+1} - \dfrac{5\cdot\cos 5x}{\sin^2 5x}$

$= \dfrac{6\cdot x^2\cdot\sin 2\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^3+1}} - \dfrac{5\cdot\cos 5x}{\sin^2 5x}.$

② $y' = \left(8\sqrt{\tan 3x} + \dfrac{4}{\sin^2\sqrt{x}}\right)' = 8\cdot\dfrac{(\tan 3x)'}{2\sqrt{\tan 3x}} - \dfrac{4\cdot(\sin^2\sqrt{x})'}{\sin^4\sqrt{x}}$

$= 8\cdot\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{\tan 3x}\cdot\cos^2 3x} - \dfrac{4\cdot 2\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}}{\sin^4\sqrt{x}}$

$= \dfrac{12}{\cos^2 3x\sqrt{\tan 3x}} - \dfrac{4\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sin^3\sqrt{x}}.$

□

DẠNG 3.2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

Phương pháp giải: *Dùng các công thức đạo hàm để tính đạo hàm của hàm số, sau đó sử dụng các công thức lượng giác biến đổi chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình.*

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = (\tan x)' = \tan^2 x + 1$.
Suy ra $y' - y^2 - 1 = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - 1 = 0$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = (\cot 2x)' = -2\left(\cot^2 2x + 1\right)$ và $y^2 = \cot^2 2x \Rightarrow 2y^2 + 2 = 2\cot^2 2x + 2$.
Suy ra $y' + 2y^2 + 2 = -2\left(\cot^2 x + 1\right) + 2\cot^2 x + 2 = 0$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x.\cos^2 x\right] + 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Suy ra $y' = 0$. □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = \left(\cos^2 x - \sin x\right)' = -2\sin x.\cos x - \cos x$. Suy ra

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow -2\sin x.\cos x - \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x\left(-2\sin x - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ -2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$.

Lời giải

Ta có $y' = (3\cos x + 4\sin x + 5x)' = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5 \\ &\Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k2\pi, \text{với} \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \cos\alpha = \dfrac{3}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 6. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

Lời giải

Ta có $y' = (\tan x + \cot x)' = -\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x}$. Suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x.\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x} = 0\,(*)$.

Điều kiện $\sin^2 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình $y' = 0$ có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3} - \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x - \dfrac{\cos 3x}{3}\right)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \cos 3x + \sin x - \sqrt{3}\,(\cos x + \sin 3x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos 3x + \sin x - \sqrt{3}\,(\cos x + \sin 3x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = 3x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - 3x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} - k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Cho hàm số $y = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

Chứng minh rằng $y' = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x \\ &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos 2x \\ &= 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3}.\cos 2x + \cos 2x \\ &= 1 - \cos 2x + \cos 2x = 1 \end{aligned}$$

Suy ra $y' = 0$. □

BÀI 2. Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh rằng

① $xy - 2\,(y' - \sin x) + x\,(2\cos x - y) = 0$.

② $\dfrac{y'}{\cos x} - x = \tan x$.

Lời giải.

① Ta có: $y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

$$\begin{aligned} xy - 2\left(y' - \sin x\right) + x\left(2\cos x - y\right) &= x^2\sin x - 2\left(\sin x + x\cos x - \sin x\right) + x\left(2\cos x - x\sin x\right) \\ &= x^2\sin x - 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x = 0. \end{aligned}$$

② Ta có: $y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x$.
$\dfrac{y'}{\cos x} - x = \dfrac{\sin x + x\cos x}{\cos x} - x = \tan x + x - x = \tan x$.

□

BÀI 3. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \left[1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)\right]' = \cos x + \sin\dfrac{x}{2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = 1 \\ \sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $\sin\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi$.

Với $\sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{3} + k4\pi \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $y' = 0$ có các nghiệm là $x = \pi + k4\pi; x = -\dfrac{\pi}{3} + k4\pi; x = \dfrac{7\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
□

BÀI 4. Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \sin 2x - 2\cos x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sin 2x - 2\cos x)' = 2\cos 2x + 2\sin x$. Suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Với $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $y' = 0$ có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
□

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = a\sin x + b\cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Tìm a, b biết $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ và $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = a\cos x - b\sin x$. Khi đó

$$\begin{cases} f'(0) = \dfrac{1}{2} \\ f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cos 0 - b\sin 0 = \dfrac{1}{2} \\ a\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + b\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ và $b = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 6. Cho các hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. Chứng minh rằng $3f'(x) - 2g'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2(\sin x.\cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \\ &= 1 - \frac{1-\cos 4x}{4} = \frac{3+\cos 4x}{4} \\ &\Rightarrow f'(x) = -\sin 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3(\sin x.\cos x)^2\right) \\ &= 1 - 3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3\sin^2 2x}{4} \\ &= 1 - \frac{3-3\cos 4x}{8} = \frac{5+3\cos 4x}{8} \\ &\Rightarrow g'x = -\frac{3}{2}\sin 4x. \end{aligned}$$

Suy ra $3f'(x) - 2g'(x) = -3\sin 4x + 3\sin 4x = 0$. □

BÀI 7. Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

Lời giải.

$y' = -2\cos x\sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. ; (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in (0;\pi) \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. □

BÀI 8. Cho hàm số $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có: $y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\geq c^2$

$\Leftrightarrow (m+1)^2+m^2\geq (m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -1\\ m\geq 3\end{array}\right.$. □

BÀI 9. Cho hàm số $f(x)=2\cos^2(4x+2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f'(x)$.

Lời giải.

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có:
$f'(x)=2.2\cos(4x+2).(-\sin(4x+2)).4=-8\sin(8x+4)$.
Mặt khác ta có:
$-8\leq -8\sin(8x+4)\leq 8$. Suy ra:
Giá trị lớn nhất của $f'(x)$ bằng 8 khi $\sin(8x+4)=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{2}+k\dfrac{\pi}{4},(k\in\mathbb{Z})$.
Giá trị nhỏ nhất của $f'(x)$ bằng -8 khi $\sin(8x+4)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{2}+k\dfrac{\pi}{4},(k\in\mathbb{Z})$. □

BÀI 10. Cho hàm số $y=\cos^2 x+m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau.

① Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=\pi$ có hệ số góc bằng 1.

② Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x=-\dfrac{\pi}{4}$ và $x=\dfrac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau.

Lời giải.

Ta có: $y'=-\sin 2x+m\cos x$.

① Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=\pi$ có hệ số góc bằng 1 nên suy ra
$y'(\pi)=1\Leftrightarrow -\sin 2\pi+m\cos\pi=-1\Leftrightarrow m=-1$.

② Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x=-\dfrac{\pi}{4}$ và $x=\dfrac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau nên suy ra

$$\begin{aligned} y'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=y'\left(\frac{\pi}{3}\right)&\Leftrightarrow -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+m\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}+m\cos\frac{\pi}{3}\\ &\Leftrightarrow 1+m.\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{m}{2}\\ &\Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính tổng $S=\cos x+2\cos 2x+3\cos 3x+...+n\cos nx$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin nx$. Khi đó $S=f'(x)$.

— Trường hợp 1: Nếu $\sin\dfrac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}.f(x)&=2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}\sin 3x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\sin nx\\&=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{7x}{2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\\&=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\frac{\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}-\frac{-(2n+1)\sin\dfrac{2n+1}{2}x\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{-1+\cos nx+2n\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{n\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin^2\dfrac{nx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

— Trường hợp 2: Nếu $x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$, ta có

$$\cos x=\cos 2x=\cos 3x=\ldots=\cos nx=1$$

$$\Rightarrow S=1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

$$\text{Vậy } S=\begin{cases}\dfrac{n\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin^2\dfrac{nx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} & \text{khi } x\neq k2\pi,(k\in\mathbb{Z})\\[2ex] \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{khi } x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}.$$

□

DẠNG 3.3. Tính giới hạn của hàm số có chứa biểu thức lượng giác

Ta thực hiện biến đổi hàm số về dạng có chứa các giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u}{u}$.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2\sin 3x}{3x}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cdot\sin 4x}{4x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{3x}+\dfrac{2\sin 3x}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\cdot\sin 3x}{3x}\right)$
$=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{1}{3}+2=\dfrac{7}{3}.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{3\sin 3x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)$
$=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}.$

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cdot\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}=2\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2x-\dfrac{\pi}{3}}=2.$

□

VÍ DỤ 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

④ $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\cos x-\cos b}{x-b}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\cdot\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}.$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left[\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}\right]$
$=\lim\limits_{x\to a}\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\dfrac{x-a}{2}}=\cos\left(\dfrac{a+a}{2}\right)\cdot 1=\cos a.$

④ $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\cos x-\cos b}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{-2\sin\left(\dfrac{x+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-b}{2}\right)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\left[-\sin\left(\dfrac{x+b}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{x-b}{2}\right)}{\dfrac{x-b}{2}}\right]$
$=-\lim\limits_{x\to b}\sin\left(\dfrac{x+b}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x-b}{2}\right)}{\dfrac{x-b}{2}}=-\sin\left(\dfrac{b+b}{2}\right).1=-\sin b.$

□

VÍ DỤ 3. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{1-\cos x}$.

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}+\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{5\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{2}{5}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{2}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2=1$.

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}+\sin x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+\dfrac{\left(\sqrt{x+4}+2\right)\sin x}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sqrt{x+4}-2}{1+\sqrt{x+1}}+\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-3\sin 5x}{x}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 9x}$.

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{2\cdot 3x}=\dfrac{3}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{2}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-3\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4\cdot\dfrac{\sin 4x}{4x}-15\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\right)=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}-15\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=-11$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 9x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{72x\cdot\sin 8x}{72x\cdot\sin 9x}=\dfrac{8}{9}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\sin 9x}=\dfrac{8}{9}.$

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=2\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2x-\dfrac{\pi}{3}}=2.$

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 x}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(4\cos x)=4.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{5x}{2}}{x^2}=\dfrac{25}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}}\right)^2=\dfrac{25}{2}.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}}=-1.$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}.$
Ta có: $1-\cos x\cos 2x\cos 3x=(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x).$
Và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{kx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{kx}{2}}{\dfrac{kx}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot k^2=k^2.$
Cho nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}=1+1\cdot 4+1\cdot 1\cdot 9=14.$

□

BÀI 3. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}.$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{\sin x-\sin a}.$

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}.$

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3\cos 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x\cos 3x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{21x\sin 7x\cos 3x}{21x\sin 3x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\cos 3x}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=\dfrac{7}{3}.$

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{\sin x-\sin a}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a\cdot 2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\cos x\cos a\cdot 2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\cos x\cos x\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)}=\dfrac{1}{\cos^3 a}.$

④ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x\left(\cos x-\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}{-4\cos x\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)}{2\cos x\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)}=-\sqrt{2}.$

□

BÀI 4. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

③ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2\cos x-1}$.

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^3-8}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}$.

Ta có: $\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=\dfrac{-2x^2}{2\sin^2 x\left(1+\sqrt{2x^2+1}\right)}=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\dfrac{-1}{1+\sqrt{2x^2+1}}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x}=-\dfrac{1}{2}$.

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$.

Ta có: $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}$

$=\left(\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}\right):\dfrac{-1-x}{\sqrt{3x+4}+2+x}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}=\left(\dfrac{-2}{2}+1\right):\dfrac{-1}{4}=0$.

③ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos x-\cos\dfrac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x^3-8}\cdot\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}\cdot\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\right]=\dfrac{1}{3}.$

□

BÀI 5. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\sin 3x\sin x}{45x^3}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}.$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{\sin^2 x}.$

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\sin 3x\sin x}{45x^3}=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}.$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}{\left(1-\cos^2\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}\left(1+\cos\sqrt{x}\right)}{\sin^2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\right)^2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{\cos x}}\right]=0.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(a+x)\cos x-2\sin(a+x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(a+x)(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin(a+x)\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[-\sin(a+x)\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\right]=-\sin 2a.$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{\sin^2 x}.$

Ta có: $\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{\sin^2 x}=[\cos ax-\cos bx+\cos bx(1-\cos cx)]\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$=\left[-2\sin\left(\dfrac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\dfrac{ax-bx}{2}\right)+2\cos bx\sin^2\dfrac{cx}{2}\right]\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$=\left[-2\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{ax+bx}{2}\right)}{\dfrac{ax+bx}{2}}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{ax-bx}{2}\right)}{\dfrac{ax-bx}{2}}\cdot\dfrac{ax+bx}{2}\cdot\dfrac{ax-bx}{2}+2\cos bx\left(\dfrac{\sin\dfrac{cx}{2}}{\dfrac{cx}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{c^2x^2}{4}\right]\cdot$

$\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$

$=\left[\dfrac{b^2-a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{ax+bx}{2}\right)}{\dfrac{ax+bx}{2}}\cdot\dfrac{\sin\left(\dfrac{ax-bx}{2}\right)}{\dfrac{ax-bx}{2}}+\cos bx\left(\dfrac{\sin\dfrac{cx}{2}}{\dfrac{cx}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{c^2}{2}\right]\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{\sin^2 x}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}.$

□

BÀI 4. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a;b)$. Khi đó ta có hàm số y' xác định trên khoảng $(a;b)$. Nếu hàm số y' có đạo hàm tại x thì ta nói đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$. Hàm số đạo hàm của hàm y' được kí hiệu là y''.

Đạo hàm cấp $3, 4, \ldots$ của hàm số cũng được định nghĩa tương tự và được kí hiệu là $y^{(3)}, y^{(4)}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 4.1. Tính đạo hàm cấp hai - Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

VÍ DỤ 1. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = (x^2+1)^3$.

② $y = \dfrac{x}{x-2}$.

③ $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải

① $y = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1; y' = 6x^5 + 12x^3 + 6x; y'' = 30x^4 + 36x^2 + 6$.

② $y' = \left(\dfrac{x}{x-2}\right)' = \dfrac{-2}{(x-2)^2}; y'' = \left(\dfrac{-2}{(x-2)^2}\right)' = 2 \cdot \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{4}{(x-2)^3}$.

③ $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1}$.

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{2x+5}$.

② $y = x\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải

① $y' = \left(\sqrt{2x+5}\right)' = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

$y'' = -\dfrac{\left(\sqrt{2x+5}\right)'}{2x+5} = -\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = -\dfrac{1}{(2x+5)\sqrt{2x+5}}.$

② $y' = \sqrt{x^2+1} + x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$

$y'' = \dfrac{4x\sqrt{x^2+1} - (2x^2+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

□

VÍ DỤ 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \sin x$.

② $y = \tan x$.

Lời giải

① $y' = \cos x = sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right); y'' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi + x).$

② $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; y'' = -\dfrac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}.$

□

VÍ DỤ 4. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s.

Lời giải

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = \left(t^3 - 3t^2 + 5t + 2\right)' = 3t^2 - 6t + 5$$
$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$.

② $y = \dfrac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$.

Lời giải.

① $y' = -12x^3 + 12x^2 + 10x - 2; y'' = -36x^2 + 24x + 10.$

② $y' = 4x^4 - 6x - 1; y'' = 16x^3 - 6.$

□

BÀI 2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = -\dfrac{1}{x}.$

② $y = \dfrac{1}{x-3}$

③ $y = \dfrac{-2x^2 + 3x}{1-x}.$

④ $y = \dfrac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}.$

Lời giải.

① $y' = \dfrac{1}{x^2}; y'' = -\dfrac{2}{x^3}.$

② $y' = -\dfrac{1}{(x-3)^2}; y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3}.$

③ $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \dfrac{1}{(1-x)^2}; y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}.$

④ $y' = \dfrac{(10x-3)(x^2-2x-3) - (5x^2-3x-20)(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{-7x^2+10x-31}{(x^2-2x-3)^2}.$

$$y'' = \frac{(-14x+10)\cdot(x^2-2x-3)^2 - (-7x^2+10x-31)\cdot 2\cdot(x^2-2x-3)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-3)^4}$$
$$= \frac{2(7x^3-15x^2+93x-77)}{(x^2-2x-3)^3}.$$

□

BÀI 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{2x+1}.$

② $y = x^2 \cdot \sqrt{x^3 - x}.$

Lời giải.

① $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}; y'' = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}.$

② $y' = \dfrac{x^2(7x^2-5)}{2\sqrt{x^3-x}}; y'' = \dfrac{x^2(35x^4-54x^2+15)}{4\sqrt{(x^3-x)^3}}.$

□

BÀI 4. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right).$

② $y = \sin 2x$.

③ $y = \sin^2 2x$.

④ $y = 3\sin x + 2\cos x$.

⑤ $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x$.

Lời giải.

① $y' = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right); y'' = -4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

② $y' = 2\cos 2x; y'' = -4\sin 2x$.

③ $y' = 2\sin 2x\,(2\cos 2x) = 2\sin 4x; y'' = 8\cos 4x$.

④ $y = 3\sin x + 2\cos x; y' = 3\cos x - 2\sin x; y'' = -3\sin x - 2\cos x$.

⑤ $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} + \cos x - \sin x = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x$.
$y'' = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

□

BÀI 5. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

① $y = x \cdot \sin x$.

② $y = x^2 \cdot \cos^2 x$.

③ $y = \dfrac{\cos x}{x^3 + 1}$.

Lời giải.

① $y' = \sin x + x\cos x; y'' = 2\cos x - x\sin x$.

② $y' = 2x\cos x(\cos x - x \cdot \sin x); y'' = (1 - 2x^2)\cos 2x - 4x\sin 2x + 1$.

③ $y' = -\dfrac{\sin x}{x^3+1} - \dfrac{3x^2\cos x}{(x^3+1)^2}; y'' = \left(-\dfrac{1}{x^3+1} - \dfrac{6x}{(x^3+1)^2} + \dfrac{18x^4}{(x^3+1)^3}\right)\cos x + \dfrac{6x^2\sin x}{(x^3+1)^2}$.

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Tính giá trị $f''(0)$.
Lời giải.
$f'(x) = 3(x+1)^2; f''(x) = 6(x+1) \Rightarrow f''(0) = 6$. □

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Lời giải.
$f'(x) = 3\sin^2 x\cos x + 2x; f''(x) = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x + 2 \Rightarrow f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. □

BÀI 8. Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.
Lời giải.
$h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$;
$h'(x) = 15(x+1)^2 + 4$;
$h''(x) = 30(x+1)$.
$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. □

BÀI 9. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = \left(t^3 - 3t^2 - 9t + 2\right)' = 3t^2 - 6t - 9$$
$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(2) = 6.$$

□

BÀI 10. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ s.

Lời giải.

Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t chính là đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t.

$$s' = 3t^2 - 6t \Rightarrow s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18.$$

□

DẠNG 4.2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2

— *Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.*

— *Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi vế này cho bằng vế kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.*

CÁC VÍ DỤ MẪU

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3.y'' + 1 = 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y'' = -\dfrac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3.y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3} \cdot \dfrac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} + 1 = -1 + 1 = 0$ (đpcm). □

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$. Chứng minh rằng: $2y.y'' - 1 = (y')^2$.

Lời giải

Ta có: $y' = x + 1, y'' = 1$

Thế vào đẳng thức: $2y.y'' - 1 = x^2 + 2x + 1 = (y')^2$ (đpcm). □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng: $x.y - 2\left(y' - \sin x\right) + x.y'' = 0$.

Lời giải

Ta có: $y' = \sin x + x\cos x;\ y'' = 2\cos x - x\sin x$
$VT = x^2\sin x - 2\left(\sin x + x\cos x - \sin x\right) + 2x\cos x - x^2\sin x = -2x\cos x + 2x\cos x = 0 = VP$ (đpcm). □

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x.
$P = 2(y')^2 - y''\left(y-1\right)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

Lời giải

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow 2(y')^2 = \frac{18}{(x-1)^4}$$
$$y'' = -3\cdot\frac{-2\left(x-1\right)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}$$
$$y-1 = \frac{3}{x-1} \Rightarrow y''\left(y-1\right) = \frac{18}{(x-1)^4}$$
$$P = 2(y')^2 - y''\left(y-1\right) = \frac{18}{(x-1)^4} - \frac{18}{(x-1)^4} = 0$$
Vậy đẳng thức được chứng minh xong.

□

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng: $\dfrac{6y}{y''} - \dfrac{1}{y'} - \cos 2x = 1$.

Lời giải

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x;\ y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)$$

Do đó:

$$\frac{6y}{y''} - \frac{1}{y'} - \cos 2x = \frac{6\tan x}{2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)} - \frac{1}{1+\tan^2 x} - \cos 2x = \frac{2}{1+\tan^2 x} - \cos 2x =$$
$$= 2\cos^2 x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 1 \text{ (đpcm).}$$ □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3y'' + 4 = 0$.
Lời giải.
$$y' = \frac{2-2x}{\sqrt{4x-2x^2}};\ y'' = \frac{-4}{\left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3}$$
$$VT = \left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3\cdot\frac{-4}{\left(\sqrt{4x-2x^2}\right)^3} + 4 = 0 = VP \text{ (đpcm).}$$ □

BÀI 2. Cho hàm số $y = -2 + \dfrac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2y'}{x} + y'' = 0$.
Lời giải.

$y' = -\dfrac{5}{x^2}; y'' = \dfrac{10}{x^3}$
$\dfrac{2y'}{x} + y'' = -\dfrac{10}{x^3} + \dfrac{10}{x^3} = 0.$ □

BÀI 3. Cho $y = \dfrac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)\,y''$.

Lời giải.
$y = \dfrac{x-3}{x+4} \Rightarrow y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\dfrac{14}{(x+4)^3}.$
Ta có vế trái: $2(y')^2 = \dfrac{98}{(x+4)^4}.$
Và vế phải:$(y-1)\,y'' = \left(\dfrac{x-3}{x+4} - 1\right)\left[\dfrac{-14}{(x+4)^3}\right] = \dfrac{98}{(x+4)^4}.$
Vậy $2(y')^2 = (y-1)\,y''$. □

BÀI 4. Cho hàm số $y = x\cos x$. Chứng minh rằng: $x.y - 2(y' - \cos x) + x.y'' = 0$.

Lời giải.
$y' = \cos x - x\sin x; y'' = -2\sin x - x\cos x$
$VT = x.y - 2\,(y' - \cos x) + x.y'' = x.x\cos x - 2\,(\cos x - x\sin x - \cos x) + x\,(-2\sin x - x\cos x) =$
$= x^2\cos x + 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x = 0 = VP$ (đpcm). □

BÀI 5. Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $xy - 2y' + xy'' = -2\sin x$.

Lời giải.
$y' = \sin x + x\cos x; y'' = 2\cos x - x\sin x$
$xy - 2y' + xy'' = x^2\sin x - 2(\sin x + x\cos x) + x(2\cos x - x\sin x) = -2\sin x.$ □

BÀI 6. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y'\tan x + y'' - 2 = 0$.

Lời giải.
$y' = 2\sin x\cos x; y'' = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$2y + y'\tan x + y'' - 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x} + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng). □

BÀI 7. Cho hàm số $y = \cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32\,(2y-1) + y'' = 0$.

Lời giải.
$y' = 2\cos 4x.(\cos 4x)' \Rightarrow y' = -8\cos 4x.\sin 4x \Rightarrow y' = -4\sin 8x$
$y'' = -32\cos 8x$
$VT = 32\,(2y-1) + y'' = 32\,(2\cos^2 4x - 1) - 32\cos 8x = 32\cos 8x - 32\cos 8x = 0 = VP.$ □

BÀI 8. Cho hàm số $y = x\tan x$. Chứng minh rằng: $x^2y'' - 2(x^2+y^2)(1+y) = 0$.

Lời giải.
$y' = \tan x + x + x\tan^2 x$
$y'' = 1 + \tan^2 x + 1 + \tan^2 x + 2x\tan x.(1 + \tan^2 x) = 2 + 2\tan^2 x + 2x\tan x + 2x\tan^3 x$
$VT = x^2(2 + 2\tan^2 x + 2x\tan x + 2x\tan^3 x) - 2(x^2 + x^2\tan^2 x)(1 + x\tan x) =$
$= 2x^2 + 2x^2\tan^2 x + 2x^3\tan x + 2x^3\tan^3 x - 2x^2 - 2x^3\tan x - 2x^2\tan^2 x - 2x^3\tan^3 x = 0 = VP.$
□

BÀI 9. Cho hàm số $y = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x\cos x}$. Chứng minh rằng : $y'' + y = 0$.

Lời giải.
Ta có: $y = \dfrac{(\sin x + \cos x)\,(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)}{1 - \sin x\cos x} = \sin x + \cos x$
$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x; y'' = -\sin x - \cos x$
$\Rightarrow y'' + y = 0.$
□

DẠNG 4.3. Vận dụng đạo hàm cấp hai chứng minh đẳng thức tổ hợp

- *Nhận dạng: Số hạng tổng quát của tổng có chứa thành phần dạng* $(k-1).k$.
- *Phương pháp: Chọn hàm* $f(x)$ *sao cho khai triển nhị thức Newtơn của* $f(x)$ *có đạo hàm cấp hai tại một điểm chính là tổng cần tính. Lưu ý:*

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\mathrm{C}_n^k \Rightarrow f(x)=(1+x)^n;$$
$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(k-1)k\mathrm{C}_n^k \Rightarrow f(x)=(1-x)^n;$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)(n-k)\mathrm{C}_n^k \Rightarrow f(x)=(x+1)^n;$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k(n-k-1)(n-k)\mathrm{C}_n^k \Rightarrow f(x)=(x-1)^n.$$

VÍ DỤ 1. Với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, chứng minh rằng

$$1.2\mathrm{C}_n^2+2.3\mathrm{C}_n^3+\cdots+(n-1)n\mathrm{C}_n^n=(n-1)n2^{n-2}.$$

Lời giải

Đặt $S=1.2\mathrm{C}_n^2+2.3\mathrm{C}_n^3+\cdots+(n-1)n\mathrm{C}_n^n=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\mathrm{C}_n^k$.

Xét

$$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kx^k$$
$$\Rightarrow f'(x)=n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{C}_n^kx^{k-1}$$
$$\Rightarrow f''(x)=(n-1)n(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\mathrm{C}_n^kx^{k-2}$$
$$\Rightarrow f''(1)=(n-1)n2^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k\mathrm{C}_n^k=S.$$

Vậy $1.2\mathrm{C}_n^2+2.3\mathrm{C}_n^3+\cdots+(n-1)n\mathrm{C}_n^n=(n-1)n2^{n-2}$. □

VÍ DỤ 2. Với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, tính tổng $S=1^2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+n^2\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải

- Cách 1: Ta có $S=1^2\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+n^2\mathrm{C}_n^n=\sum_{k=1}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k$.

Xét

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$
$$\Rightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$
$$\Rightarrow xf'(x) = n.x(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k$$
$$\Rightarrow (xf'(x))' = n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^{k-1}.$$

Thay $x = 1$ ta có $S = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

• Cách 2: Biến đổi

$$S = 1.(1+0)C_n^1 + 2.(1+1)C_n^2 + 3.(1+2)C_n^3 + \cdots + n(1+(n-1))C_n^n.$$

Khi đó, đặt

$$S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n, S_2 = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n$$
$$\Rightarrow S = S_1 + S_2.$$

Xét $f(x) = (1+x)^n$. Ta có

$$S_1 = f'(1) = n2^{n-1}, S_2 = f''(1) = (n-1)n2^{n-2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 = n(n+1)2^{n-2}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính tổng $S = 1^2 C_{2017}^1 + 2^2 C_{2017}^2 + \cdots + 2017^2 C_{2017}^{2017}$.

Lời giải.

Ta có $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$. Thay $n = 2017$ ta có $S = 2017.2018.2^{2015}$. □

BÀI 2. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng $1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + \cdots + (-1)^n(n-1)nC_n^n = 0$.

Lời giải.

Xét

$$f(x) = (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^k$$
$$\Rightarrow f'(x) = -n(1-x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k (-1)^k x^{k-1}$$
$$\Rightarrow f''(x) = (n-1)n(1-x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} (k-1)kC_n^k (-1)^k x^{k-2}$$
$$\Rightarrow f''(1) = 0 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k (k-1)kC_n^k.$$

Suy ra đpcm. □

BÀI 3. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tính tổng

$$S = (n-1)nC_n^0 + (n-2)(n-1)C_n^1 + \cdots + (n-k-1)(n-k)C_n^k + \cdots + 2.3C_n^{n-3} + 1.2C_n^{n-2}.$$

Lời giải.

Xét

$$f(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k}$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\mathrm{C}_n^k x^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (n-1)n(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k)\mathrm{C}_n^k x^{n-k-2}$$

$$\Rightarrow f''(1) = (n-1)n2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k)\mathrm{C}_n^k = S.$$

Vậy $S = (n-1)n2^{n-2}$. □

BÀI 4. Với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tính tổng $S = 1^2\mathrm{C}_n^0 + 2^2\mathrm{C}_n^1 + \cdots + (n+1)^2\mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

Xét

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$$

$$\Rightarrow xf(x) = x(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{k+1}$$

$$\Rightarrow (xf(x))' = (1+x+nx)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathrm{C}_n^k x^k$$

$$\Rightarrow x(xf(x))' = (x+x^2+nx^2)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\mathrm{C}_n^k x^{k+1}$$

$$\Rightarrow [x(xf(x))']' = (1+2x+2nx)(1+x)^{n-1} + (x+x^2+nx^2)(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\mathrm{C}_n^k x^k.$$

Thay $x = 1$ ta có $S = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\mathrm{C}_n^k = (n^2+5n+4)2^{n-2}$. □

BÀI 5. Với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chứng minh rằng

$$2.3\mathrm{C}_n^0 + 3.4\mathrm{C}_n^1 + \cdots + (n+2)(n+3)\mathrm{C}_n^n = (n^2+11n+24)2^{n-2}.$$

Lời giải.

Xét

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$$

$$\Rightarrow x^3 f(x) = x^3(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{k+3}$$

$$\Rightarrow (x^3 f(x))' = (3x^2+3x^3+nx^3)(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} (k+3)\mathrm{C}_n^k x^{k+2}$$

$$\Rightarrow (x^3 f(x))'' = (6x+9x^2+3nx^2)(1+x)^{n-1} + (3x^2+3x^3+nx^3)(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+3)\mathrm{C}_n^k x^{k+1}.$$

Thay $x = 1$ ta có $VT = \sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+3)\mathrm{C}_n^k = (n^2+11n+24)2^{n-2} = VP$. □

BÀI 6. Với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tính tổng

$$S = (2n-1)2nC_{2n}^0 + (2n-3)(2n-2)C_{2n}^2 + \cdots + 1.2C_{2n}^{2n-2}.$$

Lời giải.
Xét

$$f(x) = (x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^{2n-k}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2n(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (2n-k)C_{2n}^k x^{2n-k-1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (2n-1).2n.(x+1)^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k x^{2n-k-2}.$$

Đặt $S_1 = (2n-2)(2n-1)C_{2n}^1 + (2n-4)(2n-3)C_{2n}^3 + \cdots + 2.3C_{2n}^{2n-3}$. Suy ra

$$f''(1) = (2n-1).2n.2^{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k = S + S_1,$$

$$f''(-1) = 0 = \sum_{k=0}^{2n-2} (2n-k-1)(2n-k)C_{2n}^k (-1)^{2n-k-2} = S - S_1.$$

Suy ra $S = (2n-1)n2^{2n-2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 7. Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ thỏa mãn $\dfrac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 42$. Tính tổng

$$S = 2^2C_n^2 - 3^2C_n^3 + 4^2C_n^4 - \cdots + (-1)^n n^2 C_n^n.$$

Lời giải.
Ta có

$$\frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 42 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + \frac{n!}{(n-3)!3!} = 42(n-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 42(n-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{n}{6} = 42 \Leftrightarrow n = 36.$$

- $S = 2^2C_{36}^2 - 3^2C_{36}^3 + 4^2C_{36}^4 - \ldots + 36^2C_{36}^{36} = \sum_{k=2}^{36} (-1)^k k^2 C_{36}^k$.
- Xét

$$f(x) = (1-x)^{36} = \sum_{k=0}^{36} C_{36}^k (-1)^k x^k$$

$$\Rightarrow f'(x) = -36(1-x)^{35} = \sum_{k=1}^{36} kC_{36}^k (-1)^k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow xf'(x) = -36x(1-x)^{35} = \sum_{k=1}^{36} kC_{36}^k (-1)^k x^k$$

$$\Rightarrow (xf'(x))' = -36(1-36x)(1-x)^{34} = \sum_{k=1}^{36} k^2 C_{36}^k (-1)^k x^{k-1}.$$

Thay $x = 1$ ta có

$$0 = \sum_{k=1}^{36} k^2 \mathrm{C}_{36}^{k} (-1)^k = -\mathrm{C}_{36}^{1} + S \Rightarrow S = \mathrm{C}_{36}^{1} = 36.$$

□

BÀI 8. Giải phương trình

$$\mathrm{C}_{2n+1}^{1} - 1.2.2\mathrm{C}_{2n+1}^{2} + 2.2^2.3\mathrm{C}_{2n+1}^{3} - \cdots - (2n-1)2^{2n-1}2n\mathrm{C}_{2n+1}^{2n} + 2n2^{2n}(2n+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 4005.$$

Lời giải.
Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}_{2n+1}^{1} - 1.2.2\mathrm{C}_{2n+1}^{2} + 2.2^2.3\mathrm{C}_{2n+1}^{3} - \cdots - (2n-1)2^{2n-1}2n\mathrm{C}_{2n+1}^{2n} + 2n2^{2n}(2n+1)\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = 4005 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{C}_{2n+1}^{1} - 1.2\mathrm{C}_{2n+1}^{2} + \cdots - (2n-1)2n2^{2n-2}\mathrm{C}_{2n+1}^{2n} + 2n(2n+1)2^{2n-1}\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1} = \frac{4005}{2} \quad (*).
\end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned}
&f(x) = (-1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} (-1)^{2n+1-k} x^k \\
&\Rightarrow f'(x) = (2n+1)(-1+x)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k\mathrm{C}_{2n+1}^{k} (-1)^{2n+1-k} x^{k-1} \\
&\Rightarrow f''(x) = 2n(2n+1)(-1+x)^{2n-1} = \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)k\mathrm{C}_{2n+1}^{k} (-1)^{2n+1-k} x^{k-2} \\
&\Rightarrow f''(2) = 2n(2n+1) = \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)k\mathrm{C}_{2n+1}^{k} (-1)^{2n+1-k} 2^{k-2}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2n+1) + \sum_{k=2}^{2n+1} (k-1)k\mathrm{C}_{2n+1}^{k} (-1)^{2n+1-k} 2^{k-2} = \frac{4005}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2n+1) + 2n(2n+1) = \frac{4005}{2} \\
&\Leftrightarrow 8n^2 + 6n - 4004 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 22 \\ n = -\dfrac{91}{4}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $n = 22$. □

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 5

A ĐỀ SỐ 1A

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau
a) $y = (x-1)^4$.
b) $y = x\sqrt{x+3}$.
c) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-2}$.
d) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Lời giải.
a) $y' = 4(x-1)^3(x-1)'$ ..... 0,5 điểm
$= 4(x-1)^3$ ..... 0,5 điểm
b) $y' = x'\sqrt{x+3} + x\sqrt{x+3}'$ ..... 0,25 điểm
$= \sqrt{x+3} + \dfrac{x(x+3)'}{2\sqrt{x+3}}$ ..... 0,25 điểm
$= \dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$. ..... 0,5 điểm
c) $y = x+3+\dfrac{5}{x-2}$ ..... 0,5 điểm
$y' = 1 - \dfrac{5}{(x-2)^2}$. ..... 0,5 điểm
d) $y' = \dfrac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$ ..... 0,25 điểm
$= \dfrac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$ ..... 0,25 điểm
$= -\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(x-2)^2}$. ..... 0,5 điểm □

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \text{ khi } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải.
$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x}{x} = -2$ ..... 0,25 điểm
$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2}{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2x}{x(x+1)} = -2$ ..... 0,25 điểm
Suy ra $f'(0^+) = f'(0^-) = -2$. Vậy $f'(0) = -2$. ..... 0,5 điểm □

Câu 3. a) Cho hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.
b) Một vật được ném lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 4{,}9$ m/s. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9{,}8$ m/s^2, hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn), vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải.
a) Ta có $f''(x) = -\sin x + 2\cos x - 2$ ..... 0,5 điểm
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x + 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\cos x = -2$ ..... 0,25 điểm
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin x - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ..... 0,25 điểm

Chọn số thực a thỏa mãn $\sin a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos b = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos(x-a) = \cos a$ ..... 0,5 điểm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = 2a + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. ..... 0,5 điểm

b)

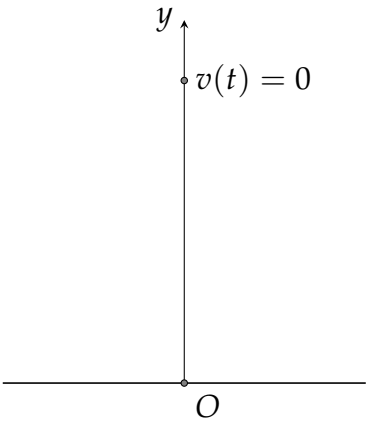
Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, gốc O ở mặt đất. Khi đó, phương trình chuyển động của vật là $s(t) = 4,9t - 4,9t^2$. ..0,5 điểm

Phương trình vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = 4,9 - 9,8t$ ...0,5 điểm

Vật đạt độ cao lớn nhất khi vận tốc bằng 0.

Xét phương trình $v(t) = 0$ ..... 0,5 điểm.

$\Leftrightarrow 4,9 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ ..... 0,5 điểm.



□

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-2}{x^2-2x-8}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-4}$. ..... 0,25 điểm

$y^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)} + \left(\dfrac{1}{x-4}\right)^{(n)}$ ..... 0,25 điểm

Chứng minh quy nạp ta có $\left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$ ..... 0,25 điểm

Chứng minh quy nạp ta có $\left(\dfrac{1}{x-4}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-4)^{n+1}}$.

Vậy $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-4)^{n+1}}$ ..... 0,25 điểm □

B ĐỀ SỐ 1B

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x+5)^5$.

b) $y = x.\sqrt{x-7}$.

c) $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$.

d) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$.

Lời giải.

a) $y' = 5(x+5)^4(x+5)'$ ..... 0,5 điểm

$= 5(x+5)^4$ ..... 0,5 điểm

b) $y' = x'\sqrt{x-7} + x\sqrt{x-7}'$ ..... 0,25 điểm

$= \sqrt{x-7} + \dfrac{x(x-7)'}{2\sqrt{x-7}}$ ..... 0,25 điểm

$= \dfrac{3x-14}{2\sqrt{x-7}}$. ..... 0,5 điểm

c) $y = x + 2 - \dfrac{3}{x+2}$ ..... 0,5 điểm

$y' = 1 + \dfrac{3}{(x+2)^2}$. ..... 0,5 điểm

d) $y' = \dfrac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}$ ..... 0,25 điểm

$= \dfrac{\frac{4}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}$ ..... 0,25 điểm

$= \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}} \cdot \dfrac{2}{(x+2)^2}$. ..... 0,5 điểm □

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 \text{ khi } x < 0 \\ \dfrac{4}{x+1} \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải.

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 - 4x}{x} = -4$ ..... 0,25 điểm

$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{4}{x+1} - 4}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-4x}{x(x+1)} = -4$ ..... 0,25 điểm

Suy ra $f'(0^+) = f'(0^-) = -4$. Vậy $f'(0) = -4$. ..... 0,5 điểm □

Câu 3. a) Cho hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.
b) Ném một quả bóng lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 7,35$ m/s. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8$ m/s^2, hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc ném), quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải.

a) Ta có $f''(x) = -2\sin x + \cos x - 2$ ..... 0,5 điểm

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - \cos x = -2$ ..... 0,25 điểm

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ..... 0,25 điểm

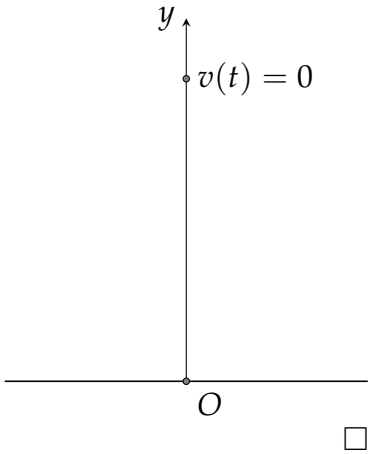
Chọn số thực a thỏa mãn $\sin a = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \cos b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Khi đó phương trình trở thành $\cos(x-a) = -\sin a \Leftrightarrow \cos(x-a) = \cos\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ..... 0,5 điểm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = 2a + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. ..... 0,5 điểm

b)

Chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, gốc O ở mặt đất. Khi đó, phương trình chuyển động của vật là $s(t) = 7,35t - 4,9t^2$. . 0,5 điểm
Phương trình vận tốc của vật là $v(t) = s'(t) = 7,35 - 9,8t$. 0,5 điểm
Quả bóng đạt độ cao lớn nhất khi vận tốc bằng 0.
Xét phương trình $v(t) = 0$ ..... 0,5 điểm.
$\Leftrightarrow 7,35 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 0,75$. ..... 0,5 điểm.



□

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x^2+2x-15}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{1}{x-3} + 2\dfrac{1}{x+5}$. ..... 0,25 điểm

$y^{(n)} = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(n)} + 2\left(\dfrac{1}{x+5}\right)^{(n)}$ ..... 0,25 điểm

Chứng minh quy nạp ta có $\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$ ..... 0,25 điểm

Chứng minh quy nạp ta có $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x+5)^{n+1}}$.

Vậy $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}} + 2\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+5)^{n+1}}$ ..... 0,25 điểm □

ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = x^3 - 3(1-x)^2$.

② $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

③ $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Lời giải.

① $y' = 3x^2 - 6(1-x).(1-x)' = 3x^2 + 6(1-x) = 3x^2 - 6x + 6.$ (2 điểm)

② $y' = \dfrac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2} = \dfrac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)^2}.$ (1 điểm)

③ $y = \sqrt{x^2-2x} = \dfrac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$ (1 điểm)

□

Câu 2. ***(1,0 điểm)*** Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Bằng định nghĩa, tính $f'(0)$.

Lời giải.

Ta có $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. (0,5 điểm)

$\Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} = 1.$ (0,5 điểm)

□

Câu 3. ***(4,0 điểm)***

① Cho hàm số $y = 16\cos x + 17\sin x$. Chứng minh rằng $y'' + y = 0$.

② Cho hàm số $y = x^3 - x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M biết điểm M cách trục tung một khoảng bằng 1.

Lời giải.

① Ta có $y' = -16\sin x + 17\cos x$. (0,5 điểm)
$\Rightarrow y'' = -16\cos x - 17\sin x$. (0,5 điểm)
$\Rightarrow y'' + y = -16\cos x - 17\sin x + 16\cos x + 17\sin x = 0.$ (0,5 điểm)

② Điểm M cách trục tung một khoảng bằng 1 nên $x_M = 1$. (0,5 điểm)
Mà $M \in (C)$ nên $y_M = 1 \Rightarrow M(1;1)$. (0,5 điểm)
Lại có $y' = 3x^2 - 1 \Rightarrow y'(1) = 2$. (0,5 điểm)
Vậy phương trình tiếp tuyến tại M của (C) là $y = 2(x-1)+1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$. (1 điểm)

□

Câu 4. ***(1,0 điểm)*** Tính tổng $S = C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + ... + 2017C_{2017}^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(1+x)^{2017} &= C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + ... + C_{2017}^{2017} x^{2017},\\ (1-x)^{2017} &= C_{2017}^0 - C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 - ... - C_{2017}^{2017} x^{2017}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{2017} - (1-x)^{2017} = 2\left(C_{2017}^1 x + C_{2017}^3 x^3 + C_{2017}^5 x^5 + ... + C_{2017}^{2017} x^{2017}\right).$$

(0,5 điểm)

Đạo hàm hai vế ta được

$$2017\left[(1+x)^{2016} + (1-x)^{2016}\right] = 2\left(C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 x^2 + 5C_{2017}^5 x^4 + ... + 2017C_{2017}^{2017} x^{2016}\right).$$

Thay $x = 1$ ta được

$$2017\left[(1+1)^{2016} - (1-1)^{2016}\right] = 2\left(C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + ... + 2017C_{2017}^{2017}\right)$$

$$\Rightarrow S = C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + ... + 2017C_{2017}^{2017} = 2017.2^{2015}.$$

(0,5 điểm)

□

D ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** Tính đạo hàm các hàm số sau

① $y = (1-x)^3 - \dfrac{x^2}{2}$.

② $y = \dfrac{x+1}{1-x}$.

③ $y = \sqrt{x - 2x^2}$.

Lời giải.

① $y' = 3(1-x)^2.(1-x)' - \dfrac{2x}{2} = -3(1-x)^2 - x$. (2 điểm)

② $y' = \dfrac{(x+1)'(1-x) - (1-x)'(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$. (1 điểm)

③ $y' = \dfrac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. (1 điểm)

□

Câu 2. ***(4,0 điểm)***

① Cho hàm số $y = f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

② Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải.

① Ta có $y' = \cos x - \sqrt{3}\sin x$. (0,5 điểm)
$\Rightarrow y'' = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$. (0,5 điểm)
Khi đó

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\Leftrightarrow -\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. $(k \in \mathbb{Z})$. (1 điểm)

② Gọi M là giao của đồ thị hàm số với trục tung.
$\Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow y_M = 2 \Rightarrow M(0;2)$. (0,5 điểm)
Ta có $y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow y'(0) = 3$. (0,5 điểm)
Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 3(x-0) + 2 \Leftrightarrow y = 3x + 2$. (1 điểm)

□

Câu 3. ***(1,0 điểm)*** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3 - m$. Khi đó (0,25 điểm)

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - m \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 4x + 3 \geq m,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \min_{x\in\mathbb{R}} g(x) \geq m. \end{aligned}$$

(0,5 điểm)
Mà $g(x) = (x-2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow \min_{x\in\mathbb{R}} g(x) = -1 \Rightarrow m \leq -1$. (0,25 điểm)

□

Câu 4. ***(1,0 điểm)*** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}(t-2)^3 + \frac{t^2}{2} + 4t - \frac{8}{3}$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, đến giây thứ 5, vận tốc lớn nhất và nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải.

Vận tốc của vật là $v(t) = s' = -(t-2)^2 + t + 4 = -t^2 + 5t$ với $t \in [1;5]$. (0,25 điểm)

Ta có $v(t)$ là một hàm bậc 2 có đồ thị là đương parabol có đỉnh là $I\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	1		$\frac{5}{2}$		5
$v(t)$	4	↗	$\frac{25}{4}$	↘	0

(0,5 điểm)

$\Rightarrow$ Vận tốc lớn nhất là $\dfrac{25}{4}$ (m/s) và vận tốc nhỏ nhất là 0 (m/s). (0,25 điểm)

□

ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** **Tìm đạo hàm của các hàm số sau:**

① $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2017$;

② $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x + 1}$;

③ $y = \sin^2 2x$;

④ $y = \sqrt{\tan\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

Lời giải.

① Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4$.

② Ta có $y' = \dfrac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x + 2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$.

③ Ta có $y' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\cos 2x) \cdot 2 = 2\cos 4x$.

④ Ta có $y' = \dfrac{\left[\tan\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]'}{2\sqrt{\tan\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right)}} = \dfrac{2017}{2 \cdot \cos^2\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{\tan\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right)}}$.

□

Câu 2. ***(3,0 điểm)*** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 4$ có đồ thị (C).

① Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2;

② Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.

Lời giải.

① Ta có, $y' = 3x^2 - 4x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ được cho bởi công thức $k = f'(2) = 4$.

Vậy hệ số góc cần tìm là $k = 4$.

② Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến cần tìm.

Khi đó, ta có $k = f'(x_0) \Rightarrow 3x_0^2 - 4x_0 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

— Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = 3$.
Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(1;3)$ là $y = -x + 4$.

— Với $x_0 = \dfrac{1}{3}$ ta được $y_0 = \dfrac{103}{27}$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{103}{27}\right)$ là $y = -x + \dfrac{112}{27}$.

□

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$.

① Tính đạo hàm y' của hàm số đã cho;

② Chứng minh đẳng thức $2y' + (x-1)\cdot y'' = 0$.

Lời giải.

① Ta có $y' = \dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

② Theo câu *a*) ta có $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ nên

$y'' = -\dfrac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$

Khi đó, $2y' + (x-1)\cdot y'' = \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^3} = \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{(x-1)^2} = 0.$

(*điều phải chứng minh*)

□

Câu 4. ***(1,0 điểm)*** Chứng minh đẳng thức

$$C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \cdots + 2017C_{2018}^{2017} = 2018\left(2^{2017} - 1\right).$$

Lời giải.

Xét hàm số $y = (1+x)^{2018} = 1 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + C_{2018}^3 x^3 + \cdots + C_{2018}^{2017} x^{2017} + C_{2018}^{2018} x^{2018}$

Đạo hàm hai vế ta được:

$2018\,(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + 3C_{2018}^3 x^2 + \cdots + 2017C_{2018}^{2017} x^{2016} + 2018x^{2017}$.

Chọn $x = 1$ ta được: $2018 \cdot 2^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \cdots + 2017 \cdot C_{2018}^{2017} + 2018$

$\Leftrightarrow \left(2^{2017} - 1\right) 2018 = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \cdots + 2017 \cdot C_{2018}^{2017}$. □

F ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. ***(4,0 điểm)*** **Tìm đạo hàm của các hàm số sau:**

① $y = x^{2018} - x^{2017} + 2016$;

② $y = \dfrac{1-2x}{x+3}$;

③ $y = x^2 \sin x$;

④ $y = \sqrt{\tan\left(x^2+1\right)}$.

Lời giải.

① Ta có $y' = 2018x^{2017} - 2017x^{2016}$.

② Ta có $y' = \dfrac{(-2)(x+3)-(1-2x)}{(x+3)^2} = \dfrac{-7}{(x+3)^2}$.

③ Ta có $y' = \left(x^2 \sin x\right)' = 2x.\sin x + x^2.\cos x$.

④ Ta có $y' = \dfrac{\left[\tan\left(x^2+1\right)\right]'}{2\sqrt{\tan\left(x^2+1\right)}} = \dfrac{2x}{2\cdot\cos^2\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{\tan\left(x^2+1\right)}} = \dfrac{x}{\cos^2\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{\tan\left(x^2+1\right)}}$.

□

Câu 2. ***(3,0 điểm)*** Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ có đồ thị (C).

① Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -2;

② Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 6x + 2017$.

Lời giải.

① Ta có, $y' = x^2 - x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = -2$ được cho bởi công thức $k = f'(-2) = 6$.

Vậy hệ số góc cần tìm là $k = 6$.

② Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến cần tìm.
Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 6x + 2017$ nên tiếp tuyến có dạng $y = 6x + b$ với $b \neq 2017$, có hệ số góc $k = 6$

Khi đó, ta có $k = f'(x_0) \Rightarrow x_0^2 - x_0 = 6. \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

— Với $x_0 = 3$ ta được $y_0 = 3$.
Vậy phương trình tiếp tuyến tại $M_1\left(3; \dfrac{11}{2}\right)$ là$y = 6x - \dfrac{25}{2}$.

— Với $x_0 = -2$ ta được $y_0 = \dfrac{-11}{3}$.
Vậy Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2\left(-2; \dfrac{-11}{3}\right)$ là $y = 6x + \dfrac{25}{3}$.

□

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2017$, với m là tham số. Tìm m để $y' > 0$ với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Ta có, $y' = 3x^2 - 6x + m$
Theo đề bài: $y' > 0$ với mọi m
$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m > 0$ với mọi giá trị m
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta'_{y'} = 9 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$
Vậy $m > 3$ thì $y' > 0$ với mọi giá trị của tham số m. □

Câu 4. ***(1,0 điểm)*** Một vật chuyển động với phương trình $S = t^2 - 25t - 1$ tính bằng mét (m), t là khoảng thời gian tính bằng giây (s). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 20s$.

Lời giải.

Ta có $S' = 2t - 25$

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 20s$ được cho bởi công thức:

$v(20) = S'(20) = 2.20 - 25 = 15$ m/s. □

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm $20s$ là 15 m/s.

PHẦN

II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1 PHÉP BIẾN HÌNH

BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① **Định nghĩa**
Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

② **Kí hiệu và thuật ngữ**
Cho phép biến hình F.
— Nếu M' là ảnh của điểm M qua F thì ta viết $M' = F(M)$. Ta nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'.
— Nếu H là một hình nào đó thì $H' = \{M' | M' = F(M), M \in H\}$ được gọi là ảnh của hình H qua F. Kí hiệu là $H' = F(H)$.

③ **Phép dời hình**
Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
Phép dời hình biến
— ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
— đường thẳng thành đường thẳng.
— tia thành tia.
— đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
— tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
— đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
— góc thành góc bằng góc ban đầu.

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Định nghĩa
Định nghĩa 1. Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là *vectơ tịnh tiến*.

$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

② Tính chất

Tính chất 1. Nếu $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'$, $\mathrm{T}_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Tính chất 2. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

③ Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (a;b)$. Với mỗi điểm $M(x;y)$ ta có $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x=a \\ y'-y=b \end{cases}$. Từ đó suy ra $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$.

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức tọa độ* của phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến

Phương pháp giải: *Gọi H' là ảnh của hình H qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (a;b)$.*
Với mọi điểm $M(x;y)$ bất kì thuộc H, ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(M) = M'(x';y') \in H'$.

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases} \Rightarrow M(x'-a;y'-b)$$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình biểu diễn hình H ta thu được phương trình biểu diễn hình H'.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v} = (2;1)$ và điểm $M(3;2)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

① $A = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. **ĐS:** $A(5;3)$ ② $M = \mathrm{T}_{\vec{v}}(A)$. **ĐS:** $A(1;1)$

Lời giải

① Giả sử $A(x;y)$ ta có $A = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x=3+2 \\ y=2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(5;3)$.

② Gọi $A(x;y)$, ta có $M = \mathrm{T}_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} 3=x+2 \\ 2=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$.

□

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d. Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

① $d\colon 2x-3y+12=0$ và $\vec{v} = (4;-3)$. **ĐS:** $2x-3y-5=0$

② $d\colon 2x+y-4=0$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A(3;1)$, $B(-1;8)$. **ĐS:** $2x+y-3=0$

Lời giải

Gọi d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$; $M(x;y)$ là một điểm bất kì trên đường thẳng d và $M'(x';y') = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

① $\begin{cases} x' = x+4 \\ y' = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-4 \\ y = y'+3 \end{cases} \Rightarrow M(x'-4;y'+3)$. Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên

$$2(x'-4) - 3(y'+3) + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 5 = 0.$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $2x - 3y - 5 = 0$.

② Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-4;7)$. Do đó $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+4 \\ y = y'-7 \end{cases} \Rightarrow M(x'+4;y'-7)$.

Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên

$$2(x'+4) + y' - 7 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 3 = 0$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $2x + y - 3 = 0$.

□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C). Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}$, biết

① $(C)\colon (x-4)^2 + (y+3)^2 = 6$ và $\vec{v} = (3;2)$. **ĐS:** $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 6$

② $(C)\colon x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(-1;1)$, $B(1;-2)$. **ĐS:** $x^2 + y^2 + 2y + 16 = 0$

Lời giải

Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x;y)$ là một điểm bất kì trên đường tròn (C) và $M'(x';y') = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

① $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-2 \end{cases} \Rightarrow M(x'-3;y'-2)$. Mà điểm M thuộc đường tròn (C) nên

$$(x'-3-4)^2 + (y'-2+3)^2 = 6 \Leftrightarrow (x'-7)^2 + (y'+1)^2 = 6.$$

Hay phương trình đường tròn (C') là $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 6$.

② Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2;-3)$ và $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+3 \end{cases} \Rightarrow M(x'-2;y'+3)$. Mà điểm M thuộc đường tròn (C) nên

$$(x'-2)^2 + (y'+3)^2 + 4(x'-2) - 4(y'-3) - 1 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2y' + 16 = 0$$

Hay phương trình đường tròn (C') là $x^2 + y^2 + 2y + 16 = 0$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm phương trình ảnh của các đường sau qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

① Elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và $\vec{v}=(-3,4)$. **ĐS:** $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

② Parabol $(P)\colon y=x^2-2x$, và $\vec{v}=(1;1)$. **ĐS:** $y=x^2-4x+4$

Lời giải

① Gọi (E') là ảnh của elip (E) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x;y)$ là một điểm bất kì trên elip (E) và $M'(x';y')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

$$\begin{cases}x'=x-3\\y'=y+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+3\\y=y'-4\end{cases}\Rightarrow M(x'+3;y'-4).$$

Mà điểm M thuộc đường elip (E) nên $\dfrac{(x'+3)^2}{9}+\dfrac{(y'-4)^2}{4}=1$.
Hay phương trình đường elip (E') là $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$.

② Gọi (P') là ảnh của parabol (P) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x;y)$ là một điểm bất kì trên parabol (P) và $M'(x';y')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

$$\begin{cases}x'=x+1\\y'=y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-1\\y=y'-1\end{cases}\Rightarrow M(x'-1;y'-1).$$

Mà điểm M thuộc parabol (P) nên $y'-1=(x'-1)^2-2(x'-1)\Leftrightarrow y'=x'^2-4x'+4$.
Hay phương trình parabol (P') là $y=x^2-4x+4$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(-1;3)$, điểm $M(-1;4)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

① $A=\mathrm{T}_{2\vec{v}}(M)$ **ĐS:** $A(-2;7)$ ② $M=\mathrm{T}_{-\vec{v}}(A)$ **ĐS:** $M(-2;7)$

Lời giải.
Giả sử $A(x;y)$.

① Ta có $2\vec{v}=(-2;6)$. Ta có

$$A=\mathrm{T}_{2\vec{v}}(M)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-1=-2\\y=4+3=7\end{cases}\Rightarrow A(-2;7).$$

② Ta có $-\vec{v}=(1;-3)$. Ta có

$$M=\mathrm{T}_{-\vec{v}}(A)\Leftrightarrow\begin{cases}-1=x+1\\4=y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\end{cases}\Rightarrow M(-2;7).$$

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(3;5)$, $B(-1;1)$, $\vec{v}=(-1;2)$, đường thẳng d và đường tròn (C) có phương trình $d\colon x-2y+3=0$, $(C)\colon (x-2)^2+(y-3)^2=25$.

① Tìm ảnh của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. **ĐS:** $B'(-2;3)$

② Tìm tọa độ điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. **ĐS:** $C(4;3)$

③ Tìm phương trình đường thẳng d', đường tròn (C') lần lượt là ảnh của d, (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.
ĐS: $d'\colon x-2y+8=0$ và $(C')\colon (x-1)^2+(y-5)^2=25$

Lời giải.

① Ta có $\begin{cases} x_{A'}=3-1=2 \\ y_{A'}=5+2=7 \end{cases} \Rightarrow A'(2;7)$ và $\begin{cases} x_{B'}=-1-1=-2 \\ y_{B'}=1+2=3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2;3)$.

② Ta có $A=\mathrm{T}_{\vec{v}}(C) \Leftrightarrow \begin{cases} 3=x_C-1 \\ 5=y_C+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=4 \\ y_C=3 \end{cases} \Rightarrow C(4;3)$.

③ Gọi $M(x;y)$ là một điểm bất kì trên đường thẳng d và $M'(x';y')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Ta có

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'-2 \end{cases} \Rightarrow M(x'+1;y'-2)$$

Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên $x'+1-2(y'-2)+3=0 \Leftrightarrow x'-2y'+8=0$.
Hay phương trình đường thẳng d' là $x-2y+8=0$.
Gọi $N(x;y)$ là một điểm bất kì trên đường tròn (C) và $N'(x';y')=\mathrm{T}_{\vec{v}}(N)$. Ta có

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'-2 \end{cases} \Rightarrow N(x'+1;y'-2)$$

Mà điểm M thuộc đường tròn (C) nên $(x'+1-2)^2+(y'-2-3)^2=25 \Leftrightarrow (x'-1)^2+(y'-5)^2=25$.
Hay phương trình đường tròn (C') là $(x-1)^2+(y-5)^2=25$.

□

BÀI 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(2;5)$ là tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm là $G'(-3;4)$, biết rằng $A(-1;6)$, $B(3;4)$. Tìm tọa độ các điểm A', B', C'.
ĐS: $A'(1;11)$, $B'(5;9)$, $C'(-15;-8)$

Lời giải.
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó ta có

+) $A'=\mathrm{T}_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=-1+2=1 \\ y_{A'}=6+5=11 \end{cases} \Rightarrow A'(1;11)$.

+) $B'=\mathrm{T}_{\vec{v}}(B) \Rightarrow \begin{cases} x_{B'}=3+2=5 \\ y_{B'}=4+5=9 \end{cases} \Rightarrow B'(5;9)$.

+) G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên

$$\begin{cases} x_{C'}=3x_{G'}-x_{A'}-x_{B'} \\ y_{C'}=3y_{G'}-y_{A'}-y_{B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'}=-9-1-5=-15 \\ y_{C'}=12-11-9=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'}=-15 \\ y_{C'}=-8 \end{cases} \Rightarrow C'(-15;-8).$$

□

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-2;3)$ biến điểm M thành điểm M' nằm trên trục tung. **ĐS:** $M(2;0)$

Lời giải.

Gọi $M(x;0)$ và $M'(x';y') = \mathrm{T}_{\vec{v}}(M)$. Ta có $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = 0+3 \end{cases} \Rightarrow M'(x-2;3)$.

Do điểm M' thuộc trục Oy nên $x-2=0 \Rightarrow x=2$. Do đó $M(2;0)$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d. Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

① $d\colon 2x-3y+5=0$, $\vec{v}=(3;2)$. **ĐS:** $2x-3y+5=0$

② $d\colon 3x-y+2=0$, $\vec{v}=(-4;2)$. **ĐS:** $3x-y+16=0$

③ $d\colon 3x+4y-5=0$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $A(0;2)$, $B(2;3)$. **ĐS:** $3x+4y-15=0$

④ $d\colon x+3y-2=0$, $\vec{v}=2\overrightarrow{AB}$, $A(-2;3)$, $B(0,2)$. **ĐS:** $x+3y=0$

⑤ d cắt Ox, Oy tại $A(-1;0)$, $B(0;5)$ và $\vec{v}=(2;2)$. **ĐS:** $-5x+y+17=0$

BÀI 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C). Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

① $(C)\colon (x-2)^2+(y+4)^2=16$, $\vec{v}=(2;-3)$. **ĐS:** $(x-4)^2+(y+7)^2=16$

② $(C)\colon (x+1)^2+(y-3)^2=25$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $A(-1;1)$, $B(1;-2)$. **ĐS:** $(x-1)^2+y^2=25$

③ $(C)\colon (x+2)^2+(y+4)^2=9$, $\vec{v}=-\overrightarrow{CB}$, $B(2;-3)$, $C(-1;5)$ **ĐS:** $(x+5)^2+(y-4)^2=9$

④ $(C)\colon x^2+y^2-4x-6y-8=0$, $\vec{v}=(5;-2)$. **ĐS:** $(x-7)^2+(y-1)^2=21$

⑤ $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y-4=0$, $\vec{v}=(-2;3)$ **ĐS:** $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

⑥ $(C)\colon x^2+y^2+6x-2y+6=0$, $\vec{v}=3\overrightarrow{BC}$, $B(1;-2)$, $C(-1;-5)$. **ĐS:** $(x+9)^2+(y+8)^2=4$

BÀI 7. Trong mặt phẳng Oxy, Cho $A(1;3)$, $B(-2;2)$, $C(3;-4)$. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi (C) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C. Hãy xác định

① $A' = \mathrm{T}_{\overrightarrow{BC}}(A)$ và $B' = \mathrm{T}_{\overrightarrow{AC}}(B)$ **ĐS:** $A'(6;-3)$, $B'(0;-5)$

② $A_1 = \mathrm{T}_{\overrightarrow{CG}}(A)$ và $G_1 = \mathrm{T}_{\overrightarrow{AM}}(G)$ **ĐS:** $A_1\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{13}{3}\right)$, $G_1\left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{11}{3}\right)$

③ $d' = \mathrm{T}_{\overrightarrow{BM}}(d)$ với d là đường thẳng đi qua A, M. **ĐS:** $4x-\dfrac{1}{2}y-14=0$

DẠNG 2.2. Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh

Phương pháp giải: Giả sử $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(a;b)$. Khi đó, ta có $\vec{v}=\overrightarrow{MM'}$ và tọa độ $\vec{v}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} a = x'-x \\ b = y'-y \end{cases}.$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho một phép tịnh tiến biến đường tròn $(C)\colon (x+1)^2+(y-2)^2=16$ thành đường tròn $(C')\colon (x-10)^2+(y+5)^2=16$. Hãy xác định phép tịnh tiến đó. **ĐS:** $\vec{v}=(11;-7)$

Lời giải

Từ phương trình đường tròn (C) và (C'), ta suy ra tâm của hai đường tròn đó lần lượt là $I(-1;2)$ và $I'(10;-5)$. Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(C)=(C')\Rightarrow \mathrm{T}_{\vec{v}}(I)=I'\Rightarrow \vec{v}=\overrightarrow{II'}=(11;-7)$.

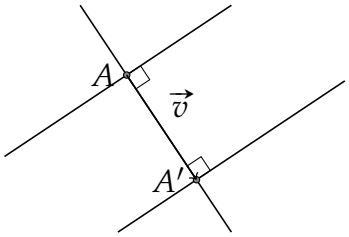
□

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon 2x-3y+3=0$ và $d'\colon 2x-3y-5=0$. Tìm tọa độ của $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d' là ảnh của d qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$.
ĐS: $\vec{v}=\left(\dfrac{16}{13};-\dfrac{24}{13}\right)$

Lời giải

Chọn điểm $A(0;1)\in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d
$\Rightarrow \Delta: 3x+2y-2=0$.
Gọi $A'=d'\cap\Delta$. Tọa độ điểm A' thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-3y-5=0\\3x+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{16}{13}\\y=-\dfrac{11}{13}\end{cases}\Rightarrow A'\left(\frac{16}{13};-\frac{11}{13}\right).$$



Vậy $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}=\left(\dfrac{16}{13};-\dfrac{24}{13}\right)$.

□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d\colon 3x-5y+3=0$ và $d'\colon 3x-5y+24=0$. Tìm $\vec{v}$, biết $|\vec{v}|=\sqrt{13}$ và $\mathrm{T}_{\vec{v}}(d)=d'$.
ĐS: $\vec{v}=(-2;3)$ hay $\vec{v}=\left(-\dfrac{29}{17};\dfrac{54}{17}\right)$

Lời giải

Chọn điểm $A(-1;0)\in d$. Gọi $A'(-8+5t;3t)\in d'$ là ảnh của A qua $\mathrm{T}_{\vec{v}}$. Khi đó, $\vec{v}=\overrightarrow{AA'}=(-7+5t;3t)$.
Ta có $|\vec{v}|=\sqrt{13}\Leftrightarrow|\overrightarrow{AA'}|=\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{(-7+5t)^2+(3t)^2}=\sqrt{13}\Leftrightarrow 34t^2-70t+36=0\Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{18}{17}\end{array}\right.$
Với $t=1$, ta có $\vec{v}=(-2;3)$.
Với $t=\dfrac{18}{17}$, ta có $\vec{v}=\left(-\dfrac{29}{17};\dfrac{54}{17}\right)$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon 3x-y-9=0$.

① Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ có phương song song với trục Ox, biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ. Khi đó hãy viết phương trình đường thẳng d'. **ĐS:** $\vec{v}=(-3;0)$

② Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ có giá song song với trục Oy, biến d thành d'' đi qua điểm $A(1;1)$.

ĐS: $\vec{v}=\left(-\dfrac{7}{3};0\right)$

Lời giải.

① Ox cắt d và d' lần lượt tại $A(3;0)$ và $O(0;0)$. Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(A)=O\Rightarrow\vec{v}=\overrightarrow{AO}=(-3;0)$

② Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1;1)$ và song song với $Oy\Rightarrow\Delta\colon x=1$. Gọi $B=\Delta\cap d\Rightarrow B\left(\dfrac{10}{3};1\right)$.

Ta có $\mathrm{T}_{\vec{v}}(B)=A\Rightarrow\vec{v}=\overrightarrow{BA}=\left(-\dfrac{7}{3};0\right)$

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(3;-1)$ thành một điểm trên đường thẳng $d\colon x-y-9=0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $|\vec{v}|=5$. **ĐS:** $\vec{v}=(5;0)$ hay $\vec{v}=(0;-5)$

Lời giải.

Gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Ta có $M'\in d\Rightarrow M(m,m-9)$.

$\mathrm{T}_{\vec{v}}(M)=M'\Rightarrow\vec{v}=\overrightarrow{MM'}=(m-3;m-8)$.

$$|\vec{v}|=5\Leftrightarrow\sqrt{(m-3)^2+(m-8)^2}=5\Leftrightarrow 2m^2-22m+48=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=8\end{array}\right.$$

Với $m=3$, ta có $\vec{v}=(0;-5)$.

Với $m=8$, ta có $\vec{v}=(5;0)$. □

BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình chứa cạnh AB là $3x-2y+3=0$ và chứa cạnh CD là $3x-2y-6=0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $CD=\mathrm{T}_{\vec{v}}(AB)$ và $\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}$.

ĐS: $\vec{v}=\left(\dfrac{27}{13};-\dfrac{18}{13}\right)$

Lời giải.

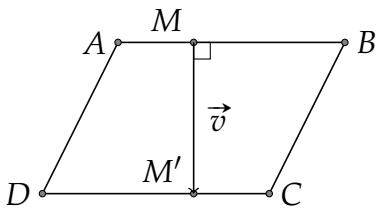
Chọn điểm $M(-1;0)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Gọi Δ là đương thẳng chứa $MM'\Rightarrow\Delta\perp AB$ (do $MM'\perp AB$) và đi qua M.

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta\colon 2x+3y+2=0$.

Ta có $M'=\Delta\cap CD\Rightarrow M'\left(\dfrac{14}{13};-\dfrac{18}{13}\right)$

Vậy $\vec{v}=\overrightarrow{MM'}=\left(\dfrac{27}{13};-\dfrac{18}{13}\right)$.



□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ cùng phương với trục hoành biến đường thẳng $d\colon x-4y+4=0$ thành đường thẳng d' qua $A(1;-3)$. **ĐS:** $\vec{v}=(17;0)$

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình là $d\colon 3x-y-7=0$, $d'\colon 3x-y+13=0$ và vecto $\vec{u}=(1;-1)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{v}$ trong phép tịnh tiến $\mathrm{T}_{\vec{v}}$ biến d thành d', biết rằng vecto $\vec{v}$ và $\vec{u}$ cùng phương. **ĐS:** $\vec{v}=(-5;5)$

BÀI 6. Cho $(P)\colon y=x^2-4x+7$ và $(P')\colon y=x^2$. Tìm phép tịnh tiến biến (P) thành (P'). **ĐS:** $\vec{v}=(-2;-7)$

DẠNG 2.3. Các bài toán ứng dụng của phép tịnh tiến

① ***Chứng minh hoặc xác định các yếu tố hình học***

— *Từ giả thiết tìm hai điểm cố định phù hợp để xây dựng một vectơ cố định.*

— *Xác định một phép tịnh tiến phù hợp theo vectơ cố định vừa tìm được.*

— *Dùng tính chất của phép tịnh tiến để chứng minh các tính chất hình học hoặc xác định các yếu tố của hình.*

② ***Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn tính chất cho trước (Toán quỹ tích)***

— *Chỉ ra phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ biến điểm E nào đó thành M mà quỹ tích điểm E đã biết hoặc dễ tìm hơn.*

$$T_{\vec{v}}: E \mapsto M$$
$$(H) \mapsto (H')$$

— *Xác định hình (H) là quỹ tích của điểm E.*

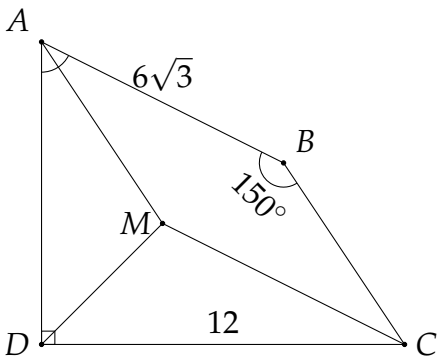
— *Khi đó tập hợp các điểm M là hình (H') với (H') là ảnh của (H) qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$.*

Điều kiện áp dụng: *Bài toán có yếu tố song song và bằng nhau, có vecto, ...*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}=60^\circ$, $\widehat{B}=150^\circ$,$\widehat{D}=90^\circ$, $CD=12$ và $AB=6\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh AD và BC. **ĐS:** $AD=6\sqrt{3}, BC=6$

Lời giải.



Xét $T_{\overrightarrow{BC}}(A)=M \Rightarrow ABCM$ là hình bình hành.

$\Rightarrow \widehat{BCM}=180^\circ-\widehat{ABC}=30^\circ$

Ta có: $\widehat{BCD}=360^\circ-(\widehat{DAB}+\widehat{ADC}+\widehat{ABC})=60^\circ \Rightarrow \widehat{MCD}=30^\circ$.

Theo định lý cosin cho ΔMDC:

$MD^2=MC^2+DC^2-2MC\cdot DC\cdot\cos 30^\circ=36 \Rightarrow MD=6$.

$MD=\dfrac{1}{2}CD$ và $MC=MD\sqrt{3} \Rightarrow \Delta MDC$ là nửa tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{DMC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MDA}=30^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{MDA}=\widehat{MAD}=\widehat{MAB}=30^\circ$

$\Rightarrow \Delta AMD$ cân tại $M \Rightarrow BC=MA=MD=6$.

Theo định lý sin cho ΔAMD: $\dfrac{AD}{\sin\widehat{AMD}}=\dfrac{DM}{\sin\widehat{MAD}}$

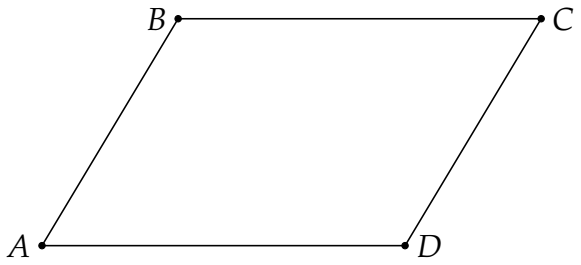
$$\Leftrightarrow AD=\frac{DM\cdot\sin\widehat{AMD}}{\sin\widehat{MAD}}=\frac{6\cdot\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=6\sqrt{3}.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho hình bình $ABCD$, AB cố định, D di động trên đường thẳng d cố định. Tìm tập hợp điểm C.

ĐS: Tập hợp điểm C là đường thẳng d', là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$

Lời giải.



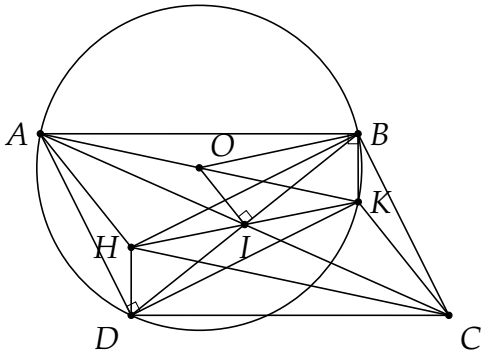
$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Suy ra phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$ biến D thành C, mà điểm D di động trên đường thẳng d cố định, do đó C di động trên d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng $2a$, ba điểm A, B, D nằm trên một đường tròn cố định $(O;R)$. Tìm tập hợp điểm C.

ĐS: Tập hợp điểm C là đường tròn ảnh của đường tròn tâm A, bán kính $2\sqrt{R^2-a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$, với K là giao điểm của AO với đường tròn $(O;R)$

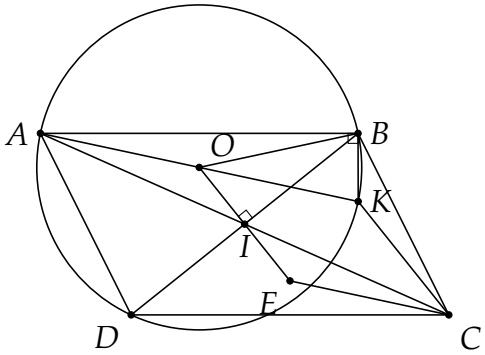
Lời giải.

① **Cách 1**



Gọi H là trực tâm của ΔABD, K là giao điểm của AO với đường tròn $(O;R)$. Khi đó K cố định.
Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: OI là đường trung bình của ΔAKC, suy ra $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI}$ (1).
Mặt khác: $HBDK$ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của HK, do đó OI là đường trung bình của ΔAHK.
Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AH}$ nên $AHCK$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{HC}$.
Xét ΔOBI vuông tại I có $OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$.
Suy ra $AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.
Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$ biến H thành C, A thành K.
Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm K, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$, là ảnh của đường tròn tâm A, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$.

② **Cách 2**



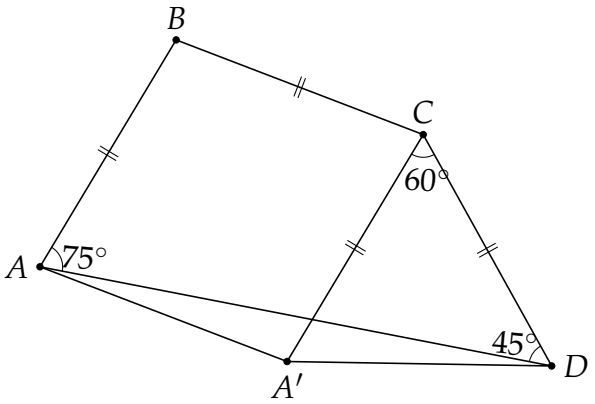
Gọi K là giao điểm của AO với đường tròn $(O;R)$. Khi đó K cố định.
Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: OI là đường trung bình của ΔAKC, suy ra $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI}$.
Gọi E đối xứng với O qua I. Khi đó $OE = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.
Suy ra tập hợp điểm E là đường tròn tâm O, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.
Ta có: $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OE}$, suy ra $OKCE$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{EC}$.
Suy ra phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OK}$ biến điểm E thành C, O thành K. Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm K, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$, là ảnh của đường tròn tâm O, bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OK}$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 75^\circ$, $\widehat{ADC} = 45^\circ$. Tính AD. **ĐS:** $AD = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Lời giải.

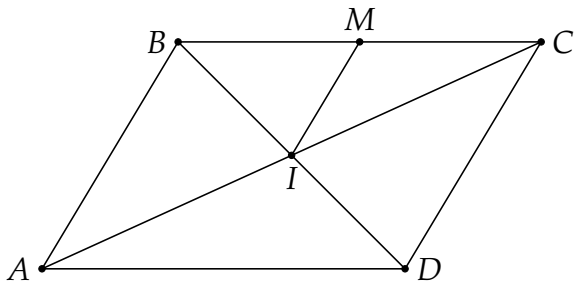


Xét $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = A'$. Khi đó tứ giác $ABCA'$ là hình bình hành.
Suy ra $\widehat{CBA} + \widehat{A'CB} = 180^\circ$ và $AA' = CA' = BA = CD = a \Rightarrow \Delta CA'D$ cân tại C.
Ta có: $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{DCB} = 240^\circ \Rightarrow \widehat{A'CD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta CA'D$ đều.
$\Rightarrow \widehat{A'DA} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AA'D} = 150^0$ ($\Delta A'AD$ cân tại A').
Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'AD$: $AD^2 = A'A^2 + A'D^2 - 2 \cdot A'A \cdot A'D \cdot \cos \widehat{AA'D} = 2a^2 + \sqrt{3}a^2$.
$\Rightarrow AD = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. □

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$, hai điểm A, B cố định, tâm I của hình bình hành di động trên đường tròn (C). Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh BC.

ĐS: Tập hợp điểm M là đường tròn (C'), là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải.



Ta có: IM là đường trung bình của $\Delta CAB \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Suy ra: $M = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(I)$ mà I di động trên đường tròn (C), do đó M di động trên đường tròn (C'), là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD. Giả sử $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Chứng minh: $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$.

BÀI 4. Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O bán kính R nằm về một phía của đường thẳng AB. Lấy điểm M trên (C) rồi dựng hình bình hành $ABMM'$. Tìm tập hợp các điểm M' khi M di động trên (C).

ĐS: Tập hợp điểm C là đường tròn (C'), là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$

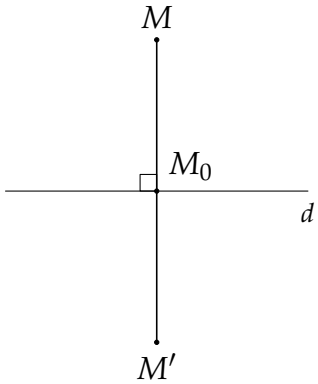
BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC (BÀI ĐỌC THÊM)

A ĐỊNH NGHĨA

① Điểm M' được gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'. Khi điểm M nằm trên d thì ta xem M đối xứng với chính nó qua đường thẳng d.

② Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d, hay gọi tắt là phép đối xứng trục.

③ Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng. Kí hiệu $Đ_d$.
Như vậy $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d.



B BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với mỗi điểm $M(x_M; y_M)$, gọi $M'(x_{M'}; y_{M'}) = Đ_d(M)$.

— Nếu chọn d là trục Ox thì ta có $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M. \end{cases}$

— Nếu chọn d là trục Oy thì ta có $\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M. \end{cases}$

C TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nên có đầy đủ tính chất của phép dời hình:

— Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;

— Biến một đường thẳng thành đường thẳng;

— Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho;

— Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho;

— Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

D TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến hình H thành chính nó, tức là $H = Đ_d(H)$.

BÀI 4. PHÉP QUAY

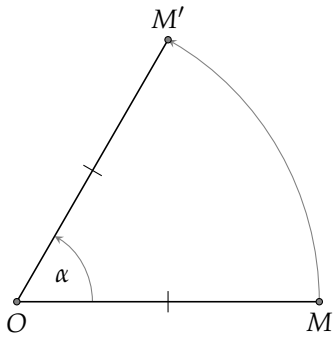
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay. Phép quay tâm O góc α, kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (OM, OM') = \alpha \\ OM = OM'. \end{cases}$$



— Phép quay nào biến là cờ (C) thành lá cờ (C'):

— Phép quay nào biến là cờ (C') thành lá cờ (C):

② Tính chất

Phép tịnh tiến là phép biến hình biến:

— Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

— Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

— Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.

— Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

— Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

Giả sử phép quay tâm O góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Khi đó:

— Nếu $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α.

— Nếu $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.

③ **Hai hình bằng nhau**

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 4.1. Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép quay

Phương pháp xác định ảnh của một điểm qua phép quay

① ***Phương pháp 1.*** *Sử dụng định nghĩa*

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi $M'(x_M;y_M)$ là ảnh của $M(x_M;y_M)$ qua phép quay tâm $I(a;b)$, góc quay α. Khi đó:

$$M'(x_M;y_M) = Q_{(I;\alpha)}(M) \Rightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ \widehat{MIM'} = \alpha. & (2) \end{cases}$$

Từ (1), sử dụng công thức tính độ dài, sẽ tìm được phương trình thứ nhất thưo hai ẩn.
Từ (2), sử dụng định lý hàm số cos, sẽ tìm được phương trình thứ hai theo hai ẩn.
Giải hệ phương trình này tìm được x_M, y_M, từ đó suy ra tọa độ điểm $M'(x_M;y_M)$.

Chú ý góc của phép quay để chọn được tọa độ điểm phù hợp.

② ***Phương pháp 2.*** *Sử dụng công thức tọa độ*

$$M'(x'_M;y'_M) = Q_{(I;\alpha)(M)} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_M = (x_M - a)\cos\alpha - (y_M - b)\sin\alpha + a \\ y'_M = (x_M - a)\sin\alpha + (y_M - b)\cos\alpha + b. \end{cases}$$

③ ***Phương pháp 3.*** *Trong các trường hợp đơn giản sử dụng hệ trục tọa độ, thực hiện phép quay tìm ngay được tọa độ điểm ảnh.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay tâm O, góc quay $90°$. Biết

① $A(1;0)$. **ĐS:** $A'(0;1)$ ② $B(0;-2)$. **ĐS:** $B'(2;0)$

Lời giải

① Xét điểm $A(1;0)$.
Gọi A' có tọa độ là $(x';y')$. Khi đó

$$A'(x';y') = Q_{(O;90^\circ)}(A) \Rightarrow \begin{cases} OA = OA' & (1) \\ \widehat{AOA'} = 90^\circ. & (2) \end{cases}$$

Từ (1), suy ra $(x')^2 + (y')^2 = 1$.
Từ (2), suy ra $1 \cdot x' + 0 \cdot y' = 0$.
Vậy, thu được $(x';y') = (0;1)$ hoặc $(x';y') = (0;-1)$. Vì góc quay dương nên thu được điểm $A'(0;1)$.

② Xét điểm $B(0;-2)$.
Gọi B' có tọa độ là $(x';y')$. Khi đó

$$\begin{cases} x' = (x_B - x_O)\cos 90^\circ - (y_B - y_O)\sin \\ y' = (x_B - x_O)\sin 90^\circ + (y_B - y_O)\cos \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow B'(2;0).$$

! Biểu diễn điểm A, B trên hệ trục tọa độ, có thể suy ra ngay tọa độ điểm A' và B'.

□

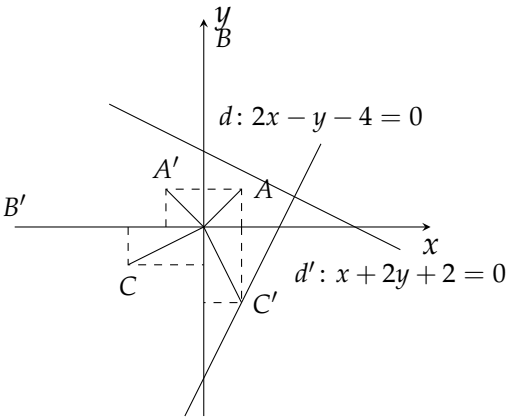
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;5)$, $C(-2;-1)$ và đường thẳng $d\colon 2x - y - 4 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$ và phương trình đường thẳng d' theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC và đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90°.

Lời giải.

① Phép quay tâm O, góc quay 90° biến $A(1;1)$ thành $A'(-1;1)$, biến $B(0;5)$ thành $B'(-5;0)$, biến $C(-2;-1)$ thành $C'(1;-2)$.

② Phép quay tâm O, góc quay 90° biến đường thẳng $d\colon 2x - y - 4 = 0$ thành đường thẳng $d'\colon x + 2y + 2 = 0$.



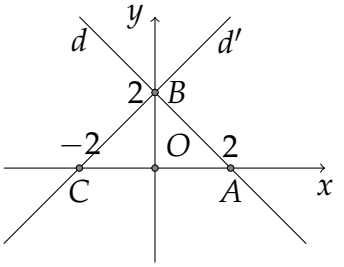
□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2;0)$ và đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90^0.

Lời giải.

Ta có: $Q_{(O,90^0)}(A) = B$ với $B(0;2)$.
$Q_{(O,90^0)}(B) = C$ với $C(-2;0)$.
Gọi d' là ảnh của d qua $Q_{(O,90^0)}$. Vì A, B thuộc d nên B, C thuộc d'.
Phương trình đường thẳng $d' : x - y + 2 = 0$.



□

DẠNG 4.2. Tìm phương trình ảnh của một đường tròn qua phép quay

Phương pháp xác định ảnh của một đường tròn qua phép quay
Vì phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên để tìm phương trình ảnh của đường tròn qua phép quay, chúng ta thực hiện qua ba bước sau đây:

① *Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn tạo ảnh từ phương trình đường tròn đã cho.*

② *Tìm tọa độ tâm I' là ảnh của tâm I qua phép quay.*

③ *Viết phương trình đường tròn ảnh với tọa độ tâm I' và bán kính R.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây:

① $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=1, \quad \alpha=90^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon (x+1)^2+(y-2)^2=1$

② $(C)\colon x^2+y^2-4x-5=0, \quad \alpha=90^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon x^2+(y-2)^2=9$

Lời giải

① Ta có:
+ Tâm $I(2;1)$, $R=1$. Suy ra: $I'(-1;2)$, $R'=R=1$.
+ $(C')\colon (x+1)^2+(y-2)^2=1$.

② Ta có:
+ Tâm $I(2;0)$, $R=3$. Suy ra: $I'(0;2)$, $R'=R=3$.
+ $(C')\colon x^2+(y-2)^2=9$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây:

① $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y=1, \quad \alpha=-90^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon (x+2)^2+(y+1)^2=6$

② $(C)\colon x^2+(y-1)^2=1, \quad \alpha=60^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon \left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

Lời giải.

① Ta có:
+ Tâm $I(1;-2)$, $R=\sqrt{6}$. Suy ra: $I'(-2;-1)$, $R'=R=\sqrt{6}$.
+ $(C')\colon (x+2)^2+(y+1)^2=6$.

② Ta có:
+ Tâm $I(0;1)$, $R=1$. Suy ra: $I'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $R'=R=1$.
+ $(C')\colon \left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây:

① $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y=0$, $\alpha=-30^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon \left(x-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=5$

② $(C)\colon x^2+y^2+6x+5=0$, $\alpha=90^\circ$. **ĐS:** $(C')\colon x^2+(y+3)^2=4$

BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay α trong các trường hợp sau đây

① $d\colon x+y-2=0$, $\alpha=90^\circ$; **ĐS:** $x-y+2=0$

② $d\colon x-3y+11=0$, $\alpha=-90^\circ$; **ĐS:** $3x+y-11=0$

③ $d\colon x-3y+5=0$, $\alpha=60^\circ$; **ĐS:** $\left(1+3\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{3}-3\right)y+10=0$

④ $d\colon 2x-y+6=0$, $\alpha=45^\circ$. **ĐS:** $3x+y+6\sqrt{2}=0$

Lời giải.

① Lấy $M(0;2), N(2;0)\in d$.
Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases}x_{M'}=0\cdot\cos 90^\circ-2\cdot\sin 90^\circ=-2\\ y_{M'}=0\cdot\sin 90^\circ+2\cdot\cos 90^\circ=0\end{cases}$ và $\begin{cases}x_{N'}=2\cdot\cos 90^\circ-0\cdot\sin 90^\circ=0\\ y_{N'}=2\cdot\sin 90^\circ+0\cdot\cos 90^\circ=2.\end{cases}$
Suy ra $M'(-2;0), N'(0;2)$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N'.
Ta có $\overrightarrow{M'N'}=(2;2)=2(1;1)$.
Suy ra phương trình đường thẳng d' là $1(x-0)-1(y-2)=0\Leftrightarrow x-y+2=0$.

② Lấy $M(-11;0), N(1;4)\in d$.
Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases}x_{M'}=-11\cdot\cos(-90^\circ)-0\cdot\sin(-90^\circ)=0\\ y_{M'}=-11\cdot\sin(-90^\circ)+0\cdot\cos(-90^\circ)=11\end{cases}$ và $\begin{cases}x_{N'}=1\cdot\cos(-90^\circ)-4\cdot\sin(-90^\circ)=4\\ y_{N'}=1\cdot\sin(-90^\circ)+4\cdot\cos(-90^\circ)=-\end{cases}$
Suy ra $M'(0;11), N'(4;-1)$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N'.
Ta có $\overrightarrow{M'N'}=(4;-12)=4(1;-3)$.
Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x-0)+1(y-11)=0\Leftrightarrow 3x+y-11=0$.

③ Lấy $M(-5;0), N(1;2)\in d$.
Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases}x_{M'}=-5\cdot\cos 60^\circ-0\cdot\sin 60^\circ=-\dfrac{5}{2}\\ y_{M'}=-5\cdot\sin 60^\circ+0\cdot\cos 60^\circ=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}x_{N'}=1\cdot\cos 60^\circ-2\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}\\ y_{N'}=1\cdot\sin 60^\circ+2\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$
Suy ra $M'\left(-\frac{5}{2};-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right), N'\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2};\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N'.
Ta có $\overrightarrow{M'N'}=\left(3-\sqrt{3};1+3\sqrt{3}\right)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $\left(1+3\sqrt{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)+\left(\sqrt{3}-3\right)\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(1+3\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{3}-3\right)y+10=0.$

④ Lấy $M(-3;0), N(0;6) \in d$.
Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{M'} = -3\cdot\cos 45^\circ - 0\cdot\sin 45^\circ = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_{M'} = -3\cdot\sin 45^\circ + 0\cdot\cos 45^\circ = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_{N'} = 0\cdot\cos 45^\circ - 6\cdot\sin 45^\circ = -3\sqrt{2} \\ y_{N'} = 0\cdot\sin 45^\circ + 6\cdot\cos 45^\circ = 3\sqrt{2}. \end{cases}$
Suy ra $M'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), N'\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N'.
Ta có $\overrightarrow{M'N'} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{9\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1;-3)$.
Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x+3\sqrt{2})+1(y-3\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 3x+y+6\sqrt{2}=0$.

□

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon 2x-3y+2=0$ và đường tròn có phương trình là $(C)\colon x^2+y^2-4x-4y-1=0$.

① Viết phương trình d' là ảnh của d qua phép $Q_{(O,90^\circ)}$. **ĐS:** $3x+2y+2=0$

② Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép $Q_{(O,90^\circ)}$. **ĐS:** $(x+2)^2+(y-2)^2=9$

Lời giải.

① Lấy $M(-1;0), N(2;2) \in d$.
Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{M'} = -1\cdot\cos 90^\circ - 0\cdot\sin 90^\circ = 0 \\ y_{M'} = -1\cdot\sin 90^\circ + 0\cdot\cos 90^\circ = -1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_{N'} = 2\cdot\cos 90^\circ - 2\cdot\sin 90^\circ = -2 \\ y_{N'} = 2\cdot\sin 90^\circ + 2\cdot\cos 90^\circ = 2. \end{cases}$
Suy ra $M'(0;-1), N'(-2;2)$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N'.
Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (-2;3)$.
Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x-0)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+2=0$.

② Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=3$.
Gọi I' là ảnh của I qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{I'} = 2\cdot\cos 90^\circ - 2\cdot\sin 90^\circ = -2 \\ y_{I'} = 2\cdot\sin 90^\circ + 2\cdot\cos 90^\circ = 2 \end{cases}$.
Suy ra $I'(-2;2)$.
Vì (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O,90^\circ)}$ nên (C') có tâm là I' và bán kính bằng 3.
Vậy $(C')\colon (x+2)^2+(y-2)^2=9$.

□

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;2)$, đường thẳng $d\colon 2x-y-2=0$ và đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh của $M, d, (C)$ qua:

① Phép quay tâm O góc quay 45°. **ĐS:**
$M'(0;2\sqrt{2}), d'\colon 3x+y-2\sqrt{2}=0, (C')\colon x^2+(y-2)^2=4$

② Phép quay tâm $I(1;2)$ góc quay 45°.

ĐS: $M''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1;\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)$, $d''\colon 3x+y-2\sqrt{2}-5=0$, $(C'')\colon \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)^2=4$

Lời giải.

① — Gọi M' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{M'}=2\cdot\cos 45^\circ-2\cdot\sin 45^\circ=0 \\ y_{M'}=2\cdot\sin 45^\circ+2\cdot\cos 45^\circ=2\sqrt{2}. \end{cases}$
Suy ra $M'(0;2\sqrt{2})$.

— Lấy $A(1;0), B(0;-2)\in d$.
Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{A'}=1\cdot\cos 45^\circ-0\cdot\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{A'}=1\cdot\sin 45^\circ+0\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_{B'}=0\cdot\cos 45^\circ+2\cdot\sin 45^\circ=\sqrt{2} \\ y_{B'}=0\cdot\sin 45^\circ-2\cdot\cos 45^\circ=-\sqrt{2}. \end{cases}$
Suy ra $A'(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}), B'(\sqrt{2};-\sqrt{2})$.
Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$, khi đó d' đi qua A', B'.
Ta có $\overrightarrow{A'B'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1;-3)$.
Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x-\sqrt{2})+1(y+\sqrt{2})=0\Leftrightarrow 3x+y-2\sqrt{2}=0$.

— Đường tròn (C) có tâm $E(1;1)$, bán kính $R=2$.
Gọi E' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{E'}=1\cdot\cos 45^\circ-1\cdot\sin 45^\circ=0 \\ y_{E'}=1\cdot\sin 45^\circ+1\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{2} \end{cases}$.
Suy ra $E'(0;\sqrt{2})$.
Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O,45^\circ)}$ nên (C') có tâm là E' và bán kính bằng 2.
Vậy $(C')\colon x^2+(y-2)^2=4$.

② — Gọi M'' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(I,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{M''}=(2-1)\cdot\cos 45^\circ-(2-2)\cdot\sin 45^\circ+1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1 \\ y_{M''}=(2-1)\cdot\sin 45^\circ+(2-2)\cdot\cos 45^\circ+2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2. \end{cases}$
Suy ra $M''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1;\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)$.

— Lấy $A(1;0), B(0;-2)\in d$.
Gọi A'', B'' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay $Q_{(I,45^\circ)}$.
Khi đó $\begin{cases} x_{A''}=(1-1)\cdot\cos 45^\circ-(0-2)\cdot\sin 45^\circ+1=\sqrt{2}+1 \\ y_{A''}=(1-1)\cdot\sin 45^\circ+(0-2)\cdot\cos 45^\circ+2=-\sqrt{2}+2 \end{cases}$

và $\begin{cases} x_{B''} = (0-1)\cdot\cos 45^\circ - (-2-2)\cdot\sin 45^\circ + 1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{B''} = (0-1)\cdot\sin 45^\circ + (-2-2)\cdot\cos 45^\circ + 2 = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$

Suy ra $A''\left(\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+2\right), B''\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+1; -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+2\right)$.

Gọi d'' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(I,45^\circ)}$, khi đó d'' đi qua A'', B''.

Ta có $\overrightarrow{A''B''} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1;-3)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d'' là $3\cdot(x-\sqrt{2}-1)+1\cdot(y+\sqrt{2}-2) = 0 \Leftrightarrow 3x+y-2\sqrt{2}-5=0$.

— Đường tròn (C) có tâm $E(1;1)$, bán kính $R=2$.
Gọi E'' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(I,45^\circ)}$.

Khi đó $\begin{cases} x_{E''} = (1-1)\cdot\cos 45^\circ - (1-2)\cdot\sin 45^\circ + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{E''} = (1-1)\cdot\sin 45^\circ + (1-2)\cdot\cos 45^\circ + 2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$

Suy ra $E''\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\right)$.

Gọi (C'') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(I,45^\circ)}$ nên (C'') có tâm là E'' và bán kính bằng 2.

Vậy (C''): $\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\right)^2 = 4$.

□

BÀI 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(4;3)$, đường tròn (C): $(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=5$. Tìm ảnh của A, (C) qua phép quay tâm O góc quay 60°. **ĐS:** $A'\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$, (C'): $(x+2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=5$

Lời giải.

— Gọi A' là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$.

Khi đó $\begin{cases} x_{A'} = 4\cdot\cos 60^\circ - 3\cdot\sin 60^\circ = \dfrac{4-3\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'} = 4\cdot\sin 60^\circ + 3\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Suy ra $A'\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}; \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

— Đường tròn (C) có tâm $E(2;2\sqrt{3})$, bán kính $R=\sqrt{5}$.
Gọi E' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$.

Khi đó $\begin{cases} x_{E'} = 2\cdot\cos 60^\circ - 2\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ = -2 \\ y_{E'} = 2\cdot\sin 60^\circ + 2\sqrt{3}\cdot\cos 60^\circ = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Suy ra $E'(-2;2\sqrt{3})$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$ nên (C') có tâm là E' và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Vậy (C'): $(x+2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=5$.

□

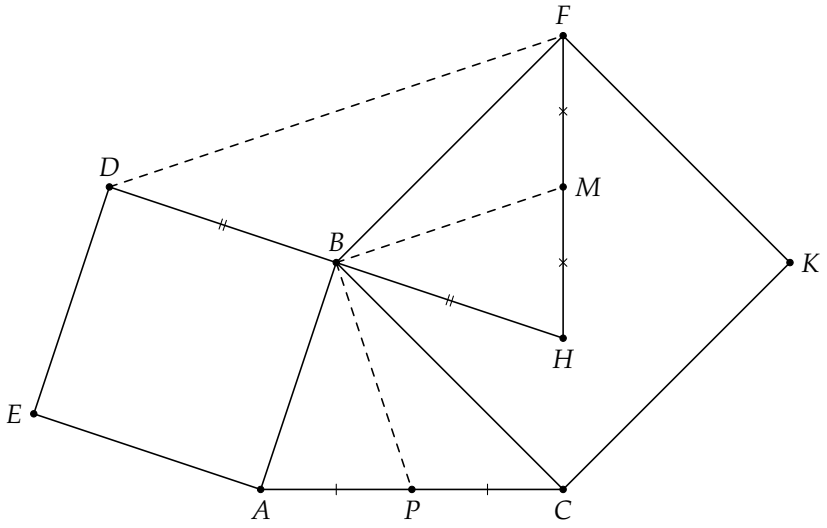
BÀI 7. Cho tam giác ABC có các đỉnh kí hiệu theo hướng âm, dựng bên ngoài các hình vuông $ABDE, BCKF$. Gọi P là trung điểm của AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm của FH.

① Xác đỉnh ảnh của $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}$ trong phép quay $Q_{(B,90^\circ)}$. **ĐS:** $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BM}$

② Chứng minh $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

Lời giải.

① Từ giả thiết ta có
$Q_{(B,90^\circ)}: B \longrightarrow B$
$A \longrightarrow H$
$\overrightarrow{BA} \longrightarrow \overrightarrow{BH}$
$C \longrightarrow F$
$AC \longrightarrow HF$
$P \longrightarrow M$
$\overrightarrow{BP} \longrightarrow \overrightarrow{BM}.$



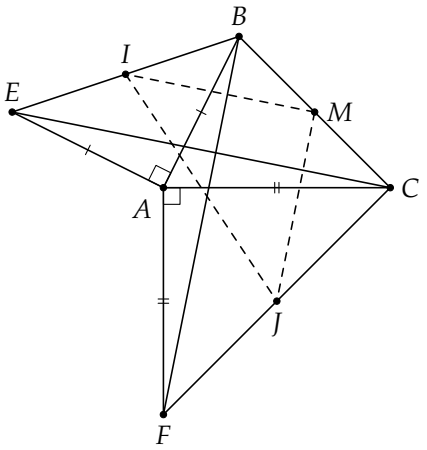
② Vì $Q_{(B,90^\circ)}: \overrightarrow{BP} \longrightarrow \overrightarrow{BM}$
nên ta có $\begin{cases} BP = BM \\ \widehat{(BP, BM)} = 90^\circ \end{cases}$
mà BM là đường trung bình của tam giác HFD nên $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

□

BÀI 8. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M, J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC, CF. Chứng minh tam giác IMJ vuông cân.

Lời giải.

Vì $\Delta ABE, \Delta ACF$ là những tam giác vuông cân tại A nên ta có
$Q_{(A,90^\circ)}: B \longrightarrow E$
$F \longrightarrow C$
$BF \longrightarrow EC$
Suy ra $\begin{cases} BF = EC \\ \widehat{(BF, EC)} = 90^\circ. \end{cases}$
Mà MI, MJ lần lượt là đường trung bình của $\Delta BEC, \Delta CBF$ nên
$\begin{cases} MI = MJ \\ \widehat{(MI, MJ)} = 90^\circ. \end{cases}$
Do đó ΔIMJ vuông cân tại M.



□

BÀI 9. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng AB, BC làm cạnh, dựng các tam giác đều ABE và BCF nằm cùng về một phía so với đường thẳng AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh tam giác BMN đều.

Lời giải.

Vì tam giác ABE và BCF là những tam giác đều nên ta có

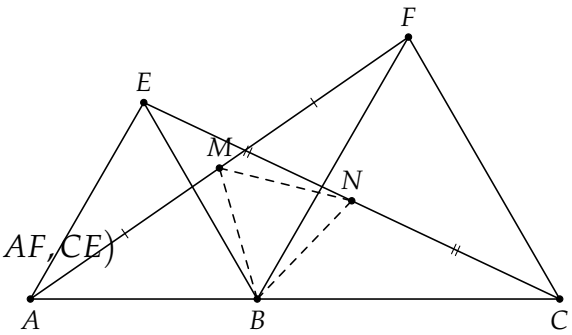
$Q_{(B,60^\circ)}$: $A \longrightarrow E$

$F \longrightarrow C$

$AF \longrightarrow EC$

$M \longrightarrow N$ (Vì M, N lần lượt là trung điểm của AF, CE)

Do đó $\begin{cases} BM = BN \\ \widehat{(BM, BN)} = 60^\circ \end{cases}$ hay tam giác BMN đều.



□

BÀI 5. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Phép đối xứng tâm). Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm đoạn thẳng MM', được gọi là phép đối xứng tâm I, nghĩa là $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$. Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Œ_I$.

Nhận xét. (Biểu thức tọa độ) *Trong mặt phẳng Oxy, cho $I(x_I; y_I)$, $M(x_M; y_M)$ và $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm I. Khi đó* $\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M. \end{cases}$

Tính chất 1. Phép đối xứng tâm

- bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- biến một đường tròn thành đường đường tròn có cùng bán kính.

Định nghĩa 2 (Tâm đối xứng của một hình). Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathscr{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathscr{H}$ được gọi là hình có tâm đối xứng.

BÀI 6. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Phép vị tự). Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $\mathrm{V}_{(O;k)}$ (O được gọi là tâm vị tự).

Định lí 1. *Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.*

Định lí 2. *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*

Hệ quả 1. Phép vị tự

- biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
- biến tia thành tia.
- biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.
- biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- biến góc bằng góc ban đầu.

!
- Qua phép vị vự $\mathrm{V}_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng d qua tâm vị tự O.
- Nếu $M' = \mathrm{V}_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = \mathrm{V}_{\left(I;\frac{1}{k}\right)}(M')$.

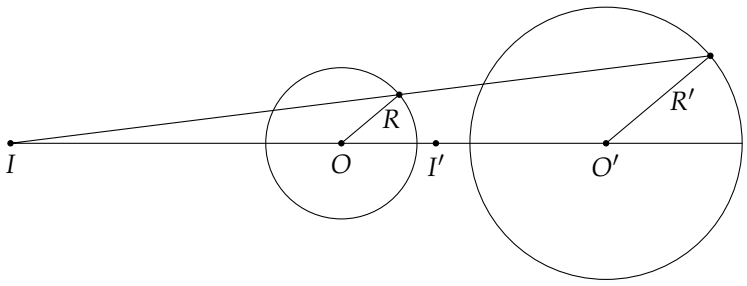
Định lí 3 (Ảnh của đường tròn qua phép vị tự). *Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k| \cdot R$.*

! Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì $|k| = \dfrac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$.

Định nghĩa 2 (Tâm vị tự của hai đường tròn). Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.
Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự trong.

Nhận xét. (Cách xác định tâm vị tự)

- *Nếu I là tâm vị tự ngoài, ta có $\overrightarrow{IO} = \dfrac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.*
- *Nếu I là tâm vị tự trong, ta có $\overrightarrow{IO} = -\dfrac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.*



Định nghĩa 3 (Phép đồng dạng). Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = k \cdot MN$.
Mọi phép đồng dạng tỉ số k đều hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình D.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 6.1. Phép vị tự trong hệ tọa độ Oxy

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

— $\mathrm{V}_{(O,k)}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

— *Phép vị tự* $\mathrm{V}_{(I,k)}$ *biến*

① *Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.*
② *Đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phép vị tự tâm $O(0;0)$ sau

① Cho $A(1;-1)$, $B(2;3)$. Tìm $A' = \mathrm{V}_{(O;k)}(A)$ và $B' = \mathrm{V}_{(O;k)}(B)$ với $k = -3$. **ĐS:** $A'(-3;3)$, $B'(-6;-9)$

② Cho $M'(3;-1)$ và $M' = \mathrm{V}_{(O;k)}(M)$ với $k = 3$. Tìm tọa độ M. **ĐS:** $M\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$

Lời giải

① $A' = \mathrm{V}_{(O;-3)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3x_A = -3 \\ y_{A'} = -3y_A = 3 \end{cases}$. Vậy $A'(-3;3)$.

$B' = \mathrm{V}_{(O;-3)}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = -3x_B = -6 \\ y_{B'} = -3y_B = -9 \end{cases}$. Vậy $B'(-6;-9)$.

② $M' = \mathrm{V}_{(O;3)}(M) \Leftrightarrow M = \mathrm{V}_{\left(O;\frac{1}{3}\right)}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{1}{3}x_{M'} = 1 \\ y_M = \dfrac{1}{3}y_{M'} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Vậy $M\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

□

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường thẳng (d) trong các trường hợp

① Cho $d\colon 2x-y+3=0$. Tìm $d'=\mathrm{V}_{(O;k)}(d)$ với $O(0;0)$ và $k=2$. **ĐS:** $d'\colon 2x-y+6=0$

② Cho $d\colon 3x+2y-6=0$. Tìm $d'=\mathrm{V}_{(I;k)}(d)$ với $I(1;2)$ và $k=-2$. **ĐS:** $d'\colon 3x+2y-9=0$

③ Cho $d\colon 2x-3y+6=0$. Tìm $d'=\mathrm{V}_{(I;k)}(d)$ với $I(2;-1)$ và $k=-2$. **ĐS:** $d'\colon 2x-3y-33=0$

Lời giải

① $O\notin d$ do đó $d'\colon 2x-y+c=0$ $(c\neq 3)$ là ảnh của d qua $\mathrm{V}_{(O;2)}$. Lấy $A(0;3)\in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $\mathrm{V}_{(O;2)}$.
Ta có $A'=\mathrm{V}_{(O;2)}(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow \begin{cases}x_{A'}=2x_A=0\\ y_{A'}=2y_A=6\end{cases}\Leftrightarrow A'(0;6)$. Mà $A'\in d'\Rightarrow 2\cdot 0-6+c=0\Rightarrow c=6$.
Vậy $d'\colon 2x-y+6=0$.

② $I\notin d$ do đó $d'\colon 3x+2y+c=0$ $(c\neq -6)$ là ảnh của d qua $\mathrm{V}_{(I;-2)}$. Lấy $A(0;3)\in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $\mathrm{V}_{(I;-2)}$.
Ta có $A'=\mathrm{V}_{(I;-2)}(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=-2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow \begin{cases}x_{A'}=-2x_A+3x_I=3\\ y_{A'}=-2y_A+3y_I=0\end{cases}\Leftrightarrow A'(3;0)$. Mà $A'\in d'\Rightarrow 3\cdot 3+2\cdot 0+c=0\Rightarrow c=-9$.
Vậy $d'\colon 3x+2y-9=0$.

③ $I\notin d$ do đó $d'\colon 2x-3y+c=0$ $(c\neq 6)$ là ảnh của d qua $\mathrm{V}_{(I;-2)}$. Lấy $A(0;2)\in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $\mathrm{V}_{(I;-2)}$.
Ta có $A'=\mathrm{V}_{(I;-2)}(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'}=-2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow \begin{cases}x_{A'}=-2x_A+3x_I=6\\ y_{A'}=-2y_A+3y_I=-7\end{cases}\Leftrightarrow A'(6;-7)$. Mà $A'\in d'\Rightarrow 2\cdot 6-3\cdot(-7)+c=0\Rightarrow c=-33$.
Vậy $d'\colon 2x-3y-33=0$.

□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm ảnh của đường tròn (C) trong các trường hợp

① Cho $(C)\colon (x+1)^2+(y-3)^2=2$. Tìm $(C')=\mathrm{V}_{(O;k)}((C))$ với $O(0;0)$ và $k=3$. **ĐS:** $(C')\colon (x+3)^2+(y-9)^2=18$

② Cho $(C)\colon (x-3)^2+(y+1)^2=9$. Tìm $(C')=\mathrm{V}_{(M;k)}((C))$ với $M(1;2)$ và $k=-2$. **ĐS:** $(C')\colon (x+3)^2+(y-8)^2=36$

③ Cho $(C)\colon x^2+(y-1)^2=1$. Tìm $(C')=\mathrm{V}_{(M;k)}((C))$ với $M(2;1)$ và $k=3$. **ĐS:** $(C')\colon (x+4)^2+(y-1)^2=9$

Lời giải

① Đường tròn có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.
Vì $(C')=\mathrm{V}_{(O;3)}((C))$ nên $I'=\mathrm{V}_{(O;3)}(I)$ là tâm và $R'=3R=3\sqrt{2}$ của là bán kính của (C').
$I'=\mathrm{V}_{(O;3)}(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{OI'}=3\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{I'}=3x_I=-3\\y_{I'}=3y_I=9\end{cases}\Leftrightarrow I'(-3;9)$. Vậy $(C')\colon (x+3)^2+(y-9)^2=18$.

② Đường tròn có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=3$.
Vì $(C')=\mathrm{V}_{(M;-2)}((C))$ nên $I'=\mathrm{V}_{(M;-2)}(I)$ là tâm và $R'=2R=6$ của là bán kính của (C').
$I'=\mathrm{V}_{(M;-2)}(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{MI'}=-2\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{I'}=-2x_I+3x_M=-3\\y_{I'}=-2y_I+3y_M=8\end{cases}\Leftrightarrow I'(-3;8)$. Vậy $(C')\colon (x+3)^2+(y-8)^2=36$.

③ Đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R=1$.
Vì $(C')=\mathrm{V}_{(M;3)}((C))$ nên $I'=\mathrm{V}_{(M;3)}(I)$ là tâm và $R'=3R=3$ của là bán kính của (C').
$I'=\mathrm{V}_{(M;3)}(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{MI'}=3\overrightarrow{MI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{I'}=3x_I-2x_M=-4\\y_{I'}=3y_I-2y_M=1\end{cases}\Leftrightarrow I'(-4;1)$. Vậy $(C')\colon (x+4)^2+(y-1)^2=9$.

□

VÍ DỤ 4. Cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Gọi f là phép biến hình có được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; rồi đến phép vị tự tâm $M\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ với tỉ số $k=2$. Viết phương trình đường tròn (C') qua phép biến hình f. **ĐS:** $(C')\colon \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{20}{3}\right)^2=16$

Lời giải

Đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$.
Gọi $(C'')=\mathrm{T}_{\vec{v}}((C))$. Do đó, $I''=\mathrm{T}_{\vec{v}}(I)$ là tâm và $R''=R=2$ của là bán kính của (C'').
$I''=\mathrm{T}_{\vec{v}}(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{II''}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{I''}=x_I+x_{\vec{v}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\y_{I''}=y_I+y_{\vec{v}}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow I''\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$. Vì $(C')=\mathrm{V}_{(M;2)}((C''))$ nên $I'=\mathrm{V}_{(M;2)}(I'')$ là tâm và $R'=2R''=4$ là bán kính của (C').
$I'=\mathrm{V}_{(M;2)}(I'')\Leftrightarrow\overrightarrow{MI'}=2\overrightarrow{MI''}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{I'}=2x_{I''}-x_M=\frac{5}{3}\\y_{I'}=2y_{I''}-y_M=\frac{20}{3}\end{cases}\Leftrightarrow I'\left(\frac{5}{3};\frac{20}{3}\right)$. Vậy $(C')\colon \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{20}{3}\right)^2=16$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(4;-2)$, đường thẳng $d\colon x-y+2=0$ và đường tròn $(C)\colon (x+2)^2+(y+5)^2=9$.

① Tìm tọa độ điểm B_1 là ảnh của B qua phép quay tâm O, góc quay 90° và điểm B_2, biết B là ảnh của B_2 qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;-3)$. **ĐS:** $B_1(2;4)$,$B_2(3;1)$

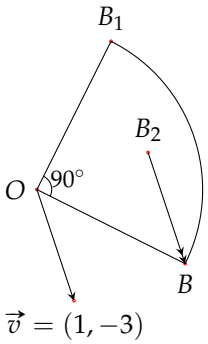
② Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số -3. **ĐS:** $(C')\colon (x-6)^2+(y-15)^2=81$

③ Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$. **ĐS:** $d'\colon x-y+4=0$

Lời giải.

①

$B_1(x;y)$ là ảnh của $B(4;-2)$ qua phép quay tâm O, góc quay 90° nên $\begin{cases}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB_1}=0\\ OB=OB_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-2y=0\\ x^2+y^2=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases};\begin{cases}x=-2\\ y=-4\end{cases}$. Góc quay theo chiều dương nên $B_1(2;4)$.



$B(4;-2)$ là ảnh của $B_2(m;n)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}=(1;-3)$ nên
$\overrightarrow{B_2B}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m=1\\ -2-n=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\ n=1\end{cases}$. Vậy $B_2(3;1)$.

② (C) có tâm $I(-2;-5)$ và bán kính $R=3$. (C') có tâm $I'(x;y)$ và bán kính R'.
(C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O, tỉ số -3 nên $R'=3R=9$ và $\overrightarrow{OI'}=-3\overrightarrow{OI}\Rightarrow x=6;y=15$.
Vậy $(C')\colon (x-6)^2+(y-15)^2=81$.

③ d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$.
$M(x;x+2)\in d$, qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$ biến M thành M' với $\overrightarrow{OM'}=2\overrightarrow{OM}$ do đó $M'(2x;2x+4)\in d'$.
Vậy $d'\colon x-y+4=0$.

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d\colon 3x-4y-8=0$ và đường tròn có phương trình $(C)\colon x^2+y^2-18x+4y+36=0$

① Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O, góc quay 90°. **ĐS:** $d'\colon 4x+3y-8=0$

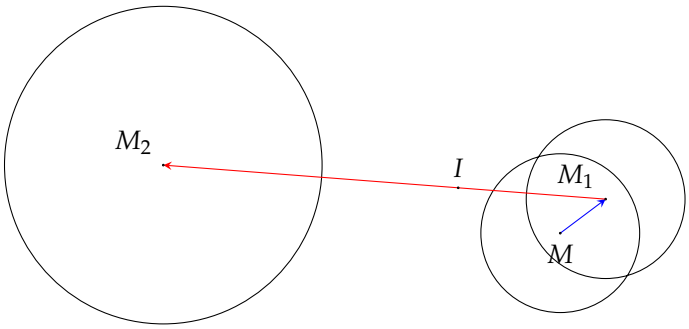
② Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(4;3)$ và phép vị tự tâm $I(0;2), k=-2$. **ĐS:** $(C_2\colon (x+26)^2+(y-4)^2=14^2$

Lời giải.

① Phép quay tâm O, góc quay 90° biến $N(x;y)$ thành $N'(-y;x)$.
Ảnh của d qua phép quay tâm O, góc quay 90° là đường thẳng d'.
Có $M\left(x;\frac{1}{4}(3x-8)\right)\in d\colon 3x-4y-8=0$, qua phép quay tâm O, góc quay 90° biến M thành $M'\left(-\frac{1}{4}(3x-8);x\right)\in d'$. Vậy $d'\colon 4x+3y-8=0$

②

Đường tròn (C): $x^2+y^2-18x+4y+36=0$ có tâm $M(9;-2)$ và bán kính $R=7$.
Phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(4;3)$ biến (C) thành (C_1) có tâm $M_1(13;1)$ và bán kính $R_1=R=7$. Nên (C_1): $(x-13)^2+(y-1)^2=49$.
Phép vị tự tâm $I(0;2)$,$k=-2$ biến (C_1) thành đường tròn (C_2) có tâm M_2 và bán kính R_2 với $\overrightarrow{IM_2}=-2\overrightarrow{IM_1}$, $R_2=2R_1$. Nên $M_2(-26;4)$, $R_2=14$. Vậy $(C_2$: $(x+26)^2+(y-4)^2=14^2$.



□

BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $B(-2;3)$, $I(3;-1)$, đường thẳng d: $2x+y-1=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y-1=0$.

① Tìm ảnh của điểm B qua phép qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 90° và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;2)$. **ĐS:** $B_2(-4;0)$

② Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O, tỉ số -2. **ĐS:** d': $2x+y+2=0$

③ Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I, tỉ số 3 và phép quay tâm O, góc quay 90^0. **ĐS:** (C_2): $(x-7)^2+(y+3)^2=81$

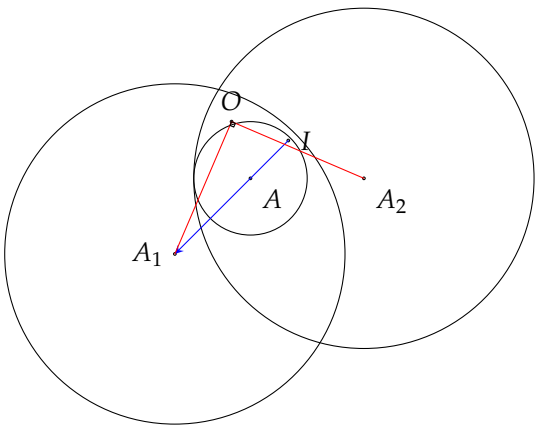
Lời giải.

① Phép quay tâm O, góc quay 90° biến $B(-2;3)$ thành $B_1(-3;-2)$.
Phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;2)$ biến $B_1(-3;-2)$ thành $B_2(-4;0)$.

② Phép vị tự tâm O, tỉ số -2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.
Phép vị tự tâm O, tỉ số -2 biến $M(x;-2x+1)\in d$ thành M' với $\overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}$ nên $M'(-2x;4x-2)\in d'$.
Vậy d': $2x+y+2=0$.

③

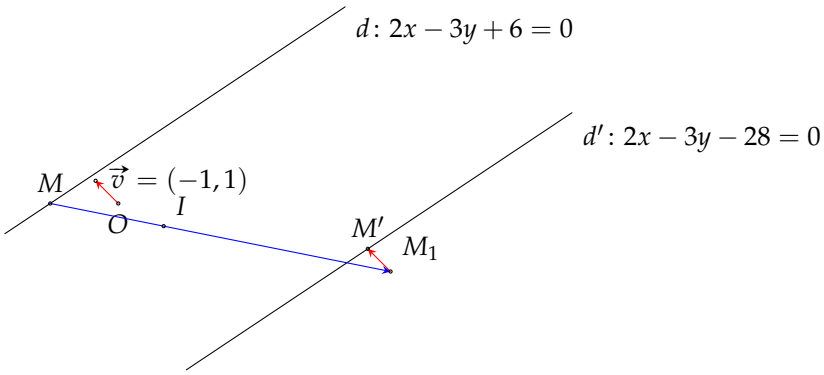
Đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+6y-1=0$ có tâm $A(1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{11}$
Phép vị tự tâm I, tỉ số 3 biến (C) thành (C_1) có tâm A_1 và bán kính R_1 với $\overrightarrow{IA_1}=3\overrightarrow{IA}$, $R_1=3R$. Nên $A_1(-3;-7)$, $R_1=3\sqrt{11}$. Vậy (C_1): $(x+3)^2+(y+7)^2=99$.
Phép quay tâm O, góc quay 90° biến $A_1(-3;-7)$ thành $A_2(7;-3)$ và biến (C_1) thành đường tròn (C_2) có tâm $A_2(7;-3)$ và bán kính $R_2=R_1=3\sqrt{11}$. Vậy (C_2): $(x-7)^2+(y+3)^2=99$



□

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $2x-3y+6=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(2;-1)$ tỉ số vị tự $k=-2$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;1)$. **ĐS:** d': $2x-3y-28=0$

Lời giải.
Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(2;-1)$ tỉ số vị tự $k=-2$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;1)$ biến đường thẳng $d\colon 2x-3y+6=0$ thành $d'\colon 2x-3y+m=0$ (d' và d song song hoặc trùng nhau).
Phép vị tự tâm $I(2;-1)$ tỉ số vị tự $k=-2$ biến điểm $M(-3;0)\in d$ thành M_1 với $\overrightarrow{IM_1}=-2\overrightarrow{IM}$ nên $M_1(12;-3)$.
Phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-1;1)$ biến $M_1(12;-3)$ thành $M'(11;-2)\in d'\colon 2x-3y+m=0$ do đó $m=-28$. Vậy $d'\colon 2x-3y-28=0$.



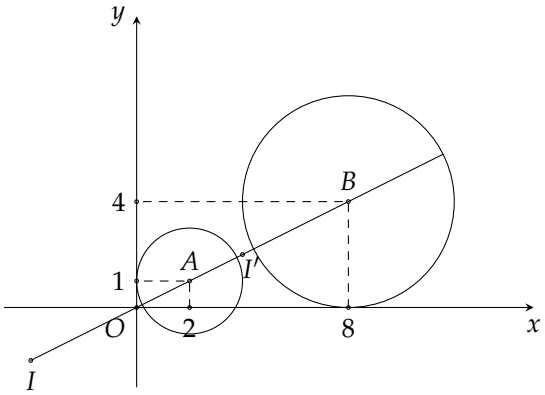
□

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai parabol $(P_1)\colon y=ax^2$ và $(P_2)\colon y=bx^2$ (với $a\neq b$). Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia. **ĐS:** $\mathrm{V}_{\left(O;\frac{a}{b}\right)}$

Lời giải.
Giả sử $M(m;am^2)\in(P_1)$, với $m\neq 0$. Đường thẳng OM có phương trình $y=amx$.
Khi đó đường thẳng OM cắt (P_2) tại hai điểm $O(0;0)$ và $N\left(\dfrac{am}{b};\dfrac{a^2m^2}{b}\right)$.
Đặt $k=\dfrac{a}{b}$ ta được $\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$.
Do đó phép vị tự tâm O, tỉ số $k=\dfrac{a}{b}$ biến (P_1) thành (P_2). □

BÀI 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A;2)$ và $(B;4)$. **ĐS:** $I(-4;-2)$ và $I'(4;2)$

Lời giải.
Gọi $I(x;y)$, $I'(x';y')$ lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(A;2)$ và $(B;4)$. Ta có



① $\overrightarrow{IA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x=\dfrac{1}{2}(8-x)\\1-y=\dfrac{1}{2}(4-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=-2.\end{cases}$

② $\overrightarrow{I'A}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{I'B}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x'=-\dfrac{1}{2}(8-x')\\1-y'=-\dfrac{1}{2}(4-y')\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x'=4\\y'=2.\end{cases}$

Vậy có hai tâm vị tự thỏa mãn bài toán là $I(-4;-2)$ và $I'(4;2)$.

□

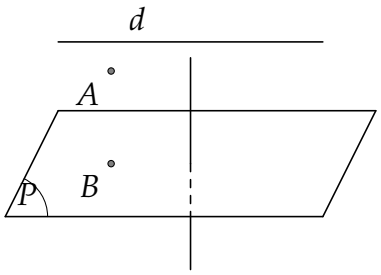
CHƯƠNG 2 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Mở đầu về hình học không gian.

— Đối tượng cơ bản:
. Điểm: kí hiệu A, B, C, ...
. Đường thẳng: kí hiệu a, b, c, d, ...
. Mặt phẳng: kí hiệu (P), (Q), (α), (β), ...



— Quan hệ cơ bản:

. Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ $A \in d$, $M \in (P)$ ...

. Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $d \subset (P)$, $b \subset (\alpha)$.

— Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

. Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.

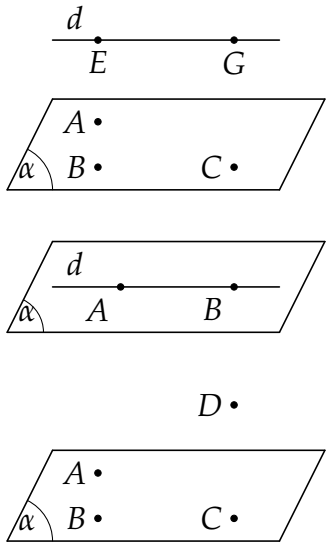
. Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).

. Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.

. Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

② Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian.

— Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
— Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
— Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
— Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
— Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



③ Điều kiện xác định mặt phẳng.

. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.

④ Hình chóp và hình tứ diện.

— Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1A_2A_3...A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_32, ... SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ... SA_nA_1 được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta gọi:

. S là đỉnh của hình chóp.

. $A_1A_2A_3...A_n$ là mặt đáy của hình chóp.

. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ... SA_nA_1 được gọi là các mặt bên.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

— Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, BCD, ABD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và được kí hiệu là $ABCD$.

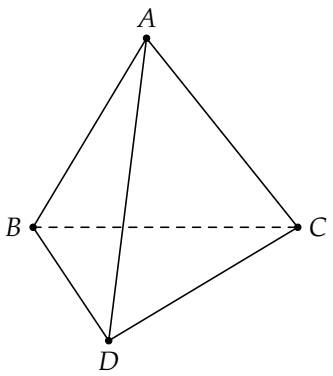
. Các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.

. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện.

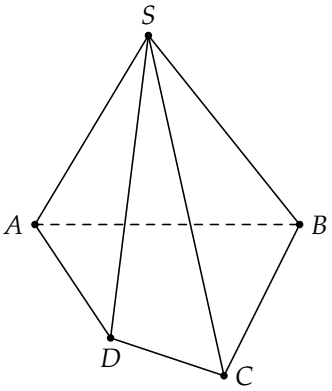
. Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.

. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện.

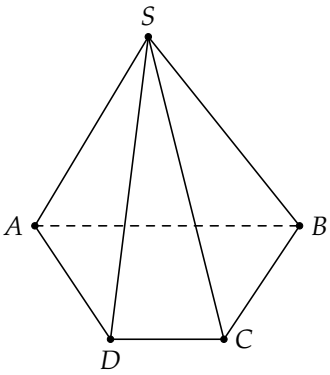
Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



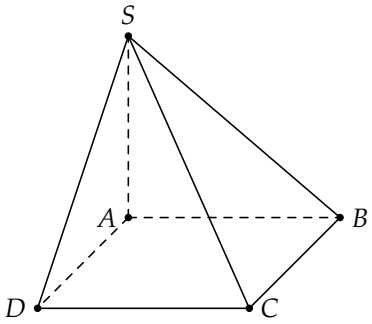
Hình chóp tam giác (Tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

— *Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.*

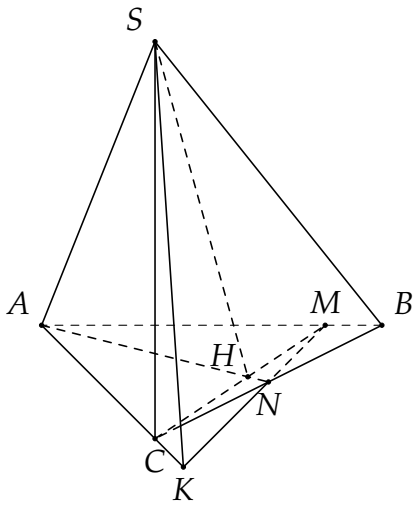
— *Đường thẳng nối hai điểm đó là giao tuyến của chúng.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SMN) và (SAC); ② (SAN) và (SCM).

Lời giải



① Trong (ABC), gọi $K = MN \cap AC$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SMN) \cap (SAC) S \\ K \in (SMN) \cap (SAC). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng SK.

② Trong (ABC), gọi $H = AN \cap CM$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAN) \cap (SCM) \\ H \in (SAN) \cap (SCM). \end{cases}$$

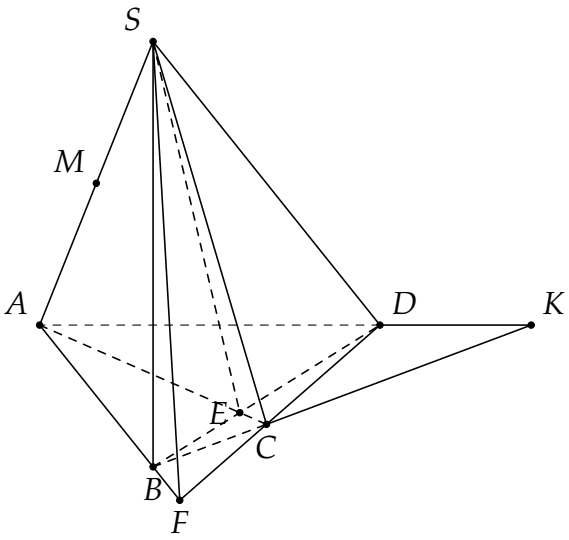
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng SH.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAC) và (SBD); ② (SAB) và (SCD); ③ (MBC) và (SAD).

Lời giải



① Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là SE.

② Trong $(ABCD)$, gọi $F = AB \cap CD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ F \in (SAB) \cap (SCD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SF.

③ Trong $(ABCD)$, gọi $K = AD \cap CB$, ta có

$$\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ K \in (MBC) \cap (SAD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là MK.

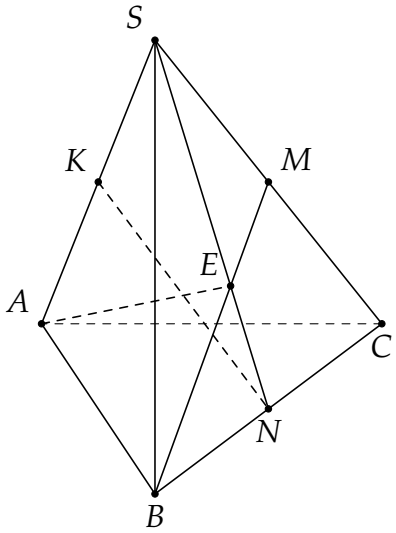
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAN) và (ABM); ② (SAN) và (BCK).

Lời giải.



① Trong (SBC), gọi $E = SN \cap BM$, ta có

$$\begin{cases} A \in (SAN) \cap (ABM) \\ E \in (SAN) \cap (ABM). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là AE.

② Ta có

$$\begin{cases} N \in (SAN) \cap (BCK) \\ K \in (SAN) \cap (BCK). \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng là KN.

□

BÀI 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M trên đoạn BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

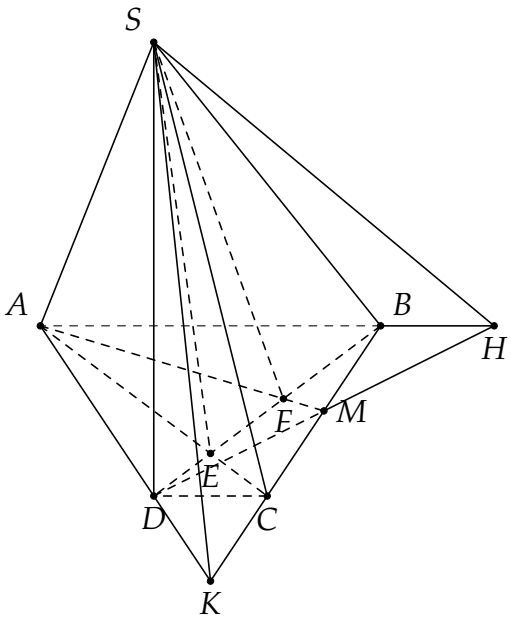
① (SAC) và (SBD);

② (SAD) và (SBC);

③ (SAM) và (SBD);

④ (SDM) và (SAB).

Lời giải.



① Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là SE.

② Trong $(ABCD)$, gọi $K = AD \cap CB$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ K \in (SAD) \cap (SBC). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SK.

③ Trong $(ABCD)$, gọi $F = AM \cap DB$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAM) \cap (SBD) \\ F \in (SAM) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SF.

④ Trong $(ABCD)$, gọi $= DM \cap AB$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SDM) \cap (SAB) \\ H \in (SDM) \cap (SAB). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SH.

□

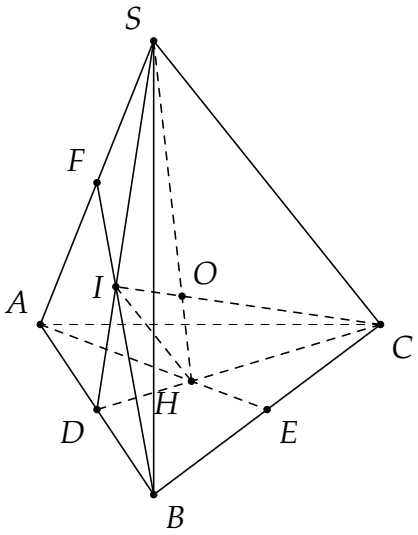
BÀI 3. Cho tứ diện $SABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA.

① Tìm giao tuyến SH của hai mặt phẳng (SCD) và (SAE);

② Tìm giao tuyến CI của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC);

③ SH và CI có cắt nhau không? Giải thích? Nếu có, gọi giao điểm đó là O, chứng minh $IH \parallel SC$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OS}$.

Lời giải.



① Trong (ABC), gọi $H = AE \cap CD \equiv H$.
Ta có giao tuyến của (SCD) và (SAE) là SH.

② Trong (SAB), gọi $I = SD \cap BF$.
Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC) là CI.

③ Ta có CI và SH cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).
Xét tam giác SCD có $I \in SD; H \in CD$ nên CI và SH cắt nhau tại O.
Ta có I là trọng tâm tam giác SAB suy ra $\dfrac{ID}{SD} = \dfrac{1}{3}$.
H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\dfrac{DH}{CD} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra $\dfrac{ID}{SD} = \dfrac{DH}{CD} \Leftrightarrow IH \parallel SC$.
Vậy $\dfrac{OH}{OS} = \dfrac{IH}{SC} = \dfrac{ID}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

□

3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD).
② (BCM) và (SAD).
③ (CDM) và (SAB).
④ (BDM) và (SAC).

BÀI 5. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trung điểm của CD là M. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD).
② (SBM) và (SAC).
③ (SBM) và (SAD).
④ (SAM) và (SBC).

BÀI 6. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn SA. Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (BDM) và (SAC).
② (BCM) và (SAD).
③ (BCM) và (SCD).

BÀI 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Lấy điểm M trên cạnh SA, trung điểm CD là N. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (BMN) và (SAC). ② (BMN) và (SAD).

③ (MCD) và (SBD). ④ (MCD) và (SAB).

BÀI 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SBM) và (SCD). ② (ABM) và (SCD).

③ (ABM) và (SAC).

BÀI 9. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy I thuộc cạnh SA, J thuộc cạnh SB sao cho IJ không song song với AB. Lấy K là một điểm thuộc miền trong tứ giác $ABCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (IJK) và $(ABCD)$. ② (IJK) và (SAB).

③ (IJK) và (SAD). ④ (IJK) và (SAC).

⑤ (IJK) và (SBD).

BÀI 10. Cho hình chóp $SABC$. Trên cạnh SA, SC lấy điểm M, N sao cho MN không song song với AC. Gọi K là trung điểm của BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (MNK) và (ABC). ② (MNK) và (SAB).

BÀI 11. Cho hình chóp $SABC$. Trên cạnh SA, SC lấy điểm M, N sao cho MN không song song với AC. Gọi O là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (MNO) và (ABC). ② (MNO) và (SAB).

③ (SMO) và (SBC). ④ (ONC) và (SAB).

BÀI 12. Cho tứ diện $ABCD$ có M là điểm trên cạnh AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $MB = 2MA, AN = 2ND$. Gọi P là điểm nằm trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (CMN) và (BCD). ② (MNP) và (SAD).

③ (MNP) và (ABC).

BÀI 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC, N là điểm nằm trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (CDM) và (ABD). ② (BCN) và (ABD).

③ (CMN) và (BCD).

BÀI 14. Cho tứ diện SAC. Lấy điểm E, F lần lượt trên đoạn SA, SB và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (EFG) và (ABC). ② (EFG) và (SBC).

③ (EFG) và (SGC).

BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm G, H lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SGH) và $(ABCD)$. ② (SAC) và (SGH).

③ (SAC) và (BGH). ④ (SCD) và (BGH).

BÀI 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Lấy M thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD). ② (SAD) và (SBC).

③ (ADM) và (SBC).

BÀI 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, SA. Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

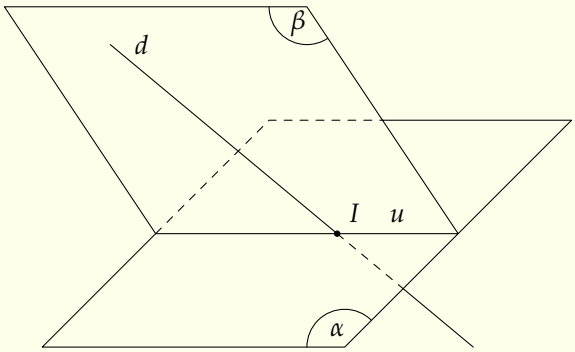
① (MNP) và (SAB). ② (MNP) và (SAD).

③ (MNP) và (SBC). ④ (MNP) và (SCD).

BÀI 18. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, SBC và M là trung điểm cạnh AC, $I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (IHK) và (ABC). ② (IHK) và (SBC).

DẠNG 1.2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)



— *Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho dễ tạo giao tuyến với (α). Mặt phẳng này thường xác định bởi d và một điểm của (α).*

— *Tìm giao tuyến u của (α) và (β).*

— *Trong (β), d cắt u tại I, mà $u \subset (\alpha)$. Vậy d cắt (α) tại I.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA, O là điểm nằm trong tam giác ABC. Tìm các giao điểm của

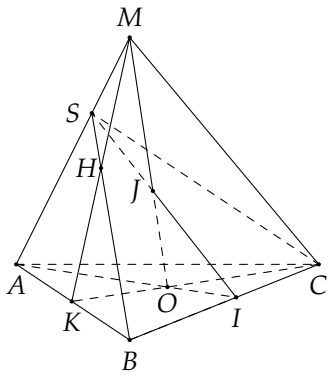
① Đường thẳng BC và mặt phẳng (SOA);

② Đường thẳng MO và mặt phẳng (SBC);

③ Đường thẳng AB và mặt phẳng (MOC);

④ Đường thẳng SB và mặt phẳng (MOC).

Lời giải



① Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài AO cắt BC tại I.
Ta có $\begin{cases} I \in BC \\ I \in AO \subset (SOA) \end{cases} \Rightarrow I$ là giao điểm của BC và (SOA).

② Chọn mặt phẳng phụ chứa MO là (SOA), ta có $(SOA) \cap (SBC) = SI$.
Trong $(SOA) \equiv (SMI)$, gọi J là giao điểm của SI và MO.
Ta có $\begin{cases} J \in MO \\ J \in SI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J$ là giao điểm của MO và (SBC).

③ Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài CO cắt AB tại K.
Ta có $\begin{cases} K \in AB \\ K \in CO \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow K$ là giao điểm của AB và (MOC).

④ Chọn mặt phẳng phụ chứa SB là (SAB), ta có $(SAB) \cap (MOC) = MK$.
Trong $(SAB) \equiv (MAB)$, gọi H là giao điểm của SB và MK.
Ta có $\begin{cases} H \in SB \\ H \in MK \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow H$ là giao điểm của SB và (MOC).

□

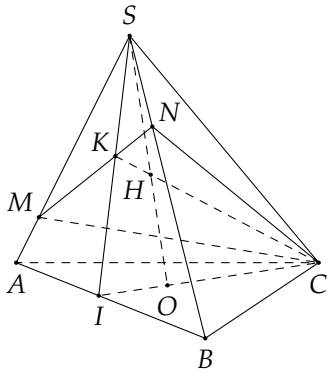
VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC. Xác định giao điểm của

① Đường thẳng AB và mặt phẳng (SOC);

② Đường thẳng MN và mặt phẳng (SOC);

③ Đường thẳng SO và mặt phẳng (CMN).

Lời giải



① Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài CO cắt AB tại I.
Ta có $\begin{cases} I \in AB \\ I \in CO \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow I$ là giao điểm của AB và (SOC).

② Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (SAB), ta có $(SAB) \cap (SOC) = SI$.
Trong (SAB), gọi K là giao điểm của SI và MN.
Ta có $\begin{cases} K \in MN \\ K \in SI \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow K$ là giao điểm của MN và (SOC).

③ Chọn mặt phẳng phụ chứa SO là (SIC), ta có $(SIC) \cap (CMN) = KC$.
Trong (SIC), gọi H là giao điểm của KC và SO.
Ta có $\begin{cases} H \in SO \\ H \in KC \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow H$ là giao điểm của SO và (CMN).

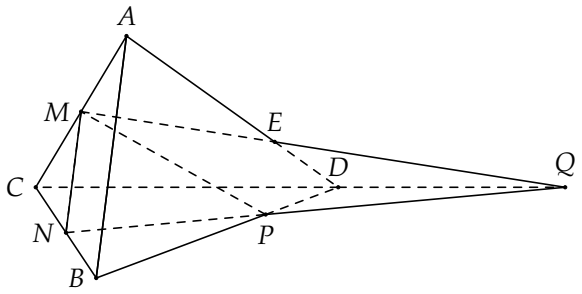
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $PB > PD$. Tìm giao điểm của

① CD và (MNP). ② AD và (MNP).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (BCD), xét tam giác BCD có $\dfrac{NB}{NC} = 1 \neq \dfrac{PB}{PC}$ nên NP và DC cắt nhau giả sử tại Q. Rõ ràng $Q \in CD$ theo cách dựng. Lại có $Q \in NP \subset (MNP)$ nên $Q \in (MNP)$. Vậy $Q = CD \cap (MNP)$.

② Trong mặt phẳng (ACD) nối Q với M cắt AD tại E. Dễ thấy $E \in AD$ theo cách dựng. Lại có $E \in MQ \subset (MNP)$ nên $E \in (MNP)$. Vậy $E = AD \cap (MNP)$.

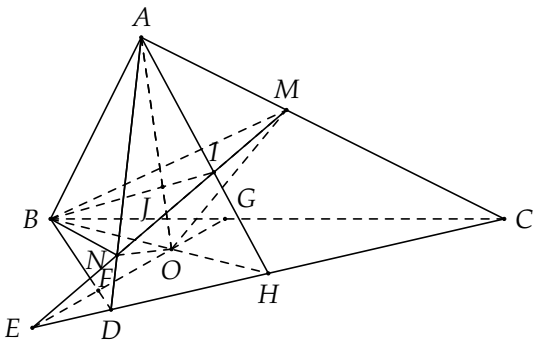
□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của

① BD và (OMN). ② BC và (OMN). ③ MN và (ABO). ④ AO và (BMN).

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ACD), vì MN không song song với CD nên ta giả sử MN cắt CD tại E. Trong mặt phẳng (BCD), nối E với O kéo dài cắt BD và BC lần lượt tại F và G.



① Ta có $F \in OE \subset (OMN)$ và $F \in BD$. Suy ra $F = BD \cap (OMN)$.

② Theo cách dựng thì $G \in BC$ và $G \in OE \subset (OMN)$. Vậy $G = BC \cap (OMN)$.

③ Trong mặt phẳng (BCD) kéo dài BO cắt DC tại H. Trong mặt phẳng (ADC) nối H với A cắt MN tại I. Vì $H \in BO \subset (ABO)$ nên $AH \subset (ABO)$. Suy ra $I \in (ABO)$. Vậy $I = MN \cap (ABO)$.

④ Trong mặt phẳng (ABH) nối B với I cắt AO tại J. Rõ ràng $J \in AO$ theo cách dựng và $J \in BI \subset (BMN)$. Vậy $J = AO \cap (BMN)$.

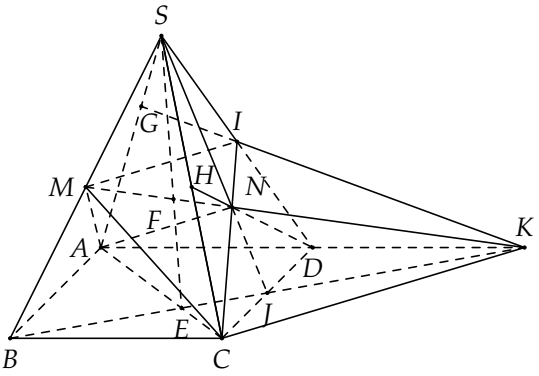
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của

① MN và $(ABCD)$. ② MN và (SAC). ③ SC và (AMN). ④ SA và (CMN).

Lời giải.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và DC. Trọng tâm của tam giác SCD là $N = SJ \cap CI$.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối B với J cắt AC và AD lần lượt tại E và K. Vì $DK \parallel BC$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có

$$\frac{JB}{JK} = \frac{JC}{JD} = 1 \Rightarrow JC = JD.$$

Vậy $\triangle SCD$ và $\triangle SBK$ có chung đường trung tuyến là SJ. Vì thế trọng tâm N của $\triangle SCD$ cũng là trọng tâm của $\triangle SBK$. Suy ra $K \in MN$. Lúc đó $K = MN \cap (ABCD)$.

② Trong mặt phẳng (SBJ) nối S với E cắt MN tại F. Ta có $F = MN \cap (SAC)$.

③ Trong mặt phẳng (SCD) nối N với D kéo dài cắt SC tại H. Vì $D \in AK \subset (AMN)$ nên $ND \subset (AMN)$. Suy ra $H \in (AMN)$. Vậy $H = SC \cap (AMN)$.

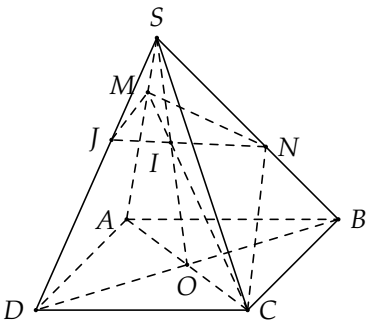
④ Theo cách dựng ta thấy $IK = (CMN) \cap (SAD)$. Trong mặt phẳng (SAD) kéo dài IK cắt SA tại G. Lúc đó $G = SA \cap (CMN)$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O. Trên SA, SB lần lượt lấy hai điểm M và N.

① Tìm giao điểm của SO và (CMN). ② Tìm giao tuyến của (SAD) và (CMN).

Lời giải.
Trong mặt phẳng (SAC) nối S với O cắt MC tại I. Trong mặt phẳng (SBD) kéo dài IN cắt SD tại J. Lúc đó



① $I = SO \cap (CMN)$.

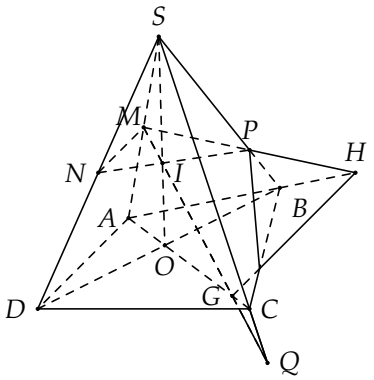
② $J \in (SAD) \cap (CMN)$. Lại có $M \in (SAD) \cap (CMN)$. Vậy $JM = (SAD) \cap (CMN)$.

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD và P là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SP = 3PB$.

① Tìm giao điểm Q của SC và (MNP). ② Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải.
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SBD) gọi I là giao điểm của NP với SO. Lúc đó $I \in (MNP)$ và $MI \subset (SAC)$.



① Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của MI và SC. Vì $Q \in MI$ nên $Q = SC \cap (MNP)$.

② Trong mặt phẳng (SAC) gọi G là giao điểm của MI và AC. Lúc đó $G \in (MNP) \cap (ABCD)$. Trong mặt phẳng (SAB), vì

$$1 = \frac{MS}{MA} \neq \frac{PS}{PB} = 3$$

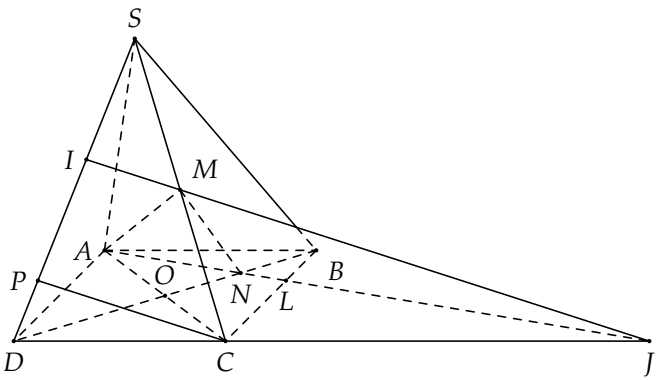
nên MP và AB cắt nhau. Gọi H là giao điểm của MP và AB. Ta có $H \in (MNP) \cap (ABCD)$. Vậy $GH = (MNP) \cap (ABCD)$.
.

□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SC, N là trung điểm của OB với O là giao điểm của AC và BD.

① Tìm giao điểm I của SD với (AMN). ② Tính tỉ số $\dfrac{SI}{ID}$.

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối A với N kéo dài cắt DC tại J và cắt BC tại L. Trong mặt phẳng (SDC) nối J với M kéo dài cắt SD tại I. Vì $J \in AN \subset (AMN)$ nên $MJ \subset (AMN)$. Suy ra $I \in (AMN)$. Vậy $I = SD \cap (AMN)$.

② Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vì $AB \parallel DJ$ nên $\triangle NAB$ đồng dạng với $\triangle NJD$. Suy ra

$$\frac{DJ}{AB} = \frac{DN}{NB} = 3 \Rightarrow DJ = 3AB = 3DC.$$

Trên cạnh SD lấy điểm P sao cho I là trung điểm của SP. Ta có IM là đường trung bình của $\triangle SPC$ nên $IM \parallel PC \Rightarrow IM \parallel IJ$. Áp dụng Định lý Talet trong $\triangle DIJ$ ta có

$$\frac{DI}{DP} = \frac{DJ}{DC} = 3 \Rightarrow DI = 3DP \text{ và } SI = PI = 2DP.$$

Vậy $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$, K là trung điểm BC và D là điểm đối xứng của G qua A.

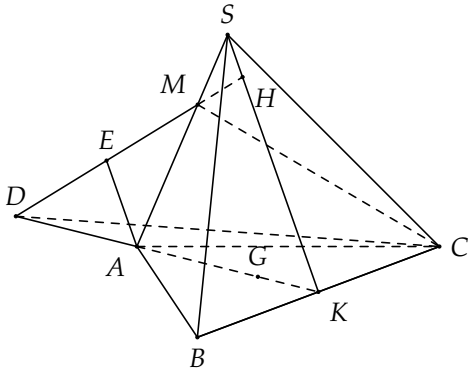
① Tìm giao điểm H của SK với (MCD). ② Tính tỉ số $\dfrac{HK}{SK}$.

Lời giải.

① Trong mặt phẳng (SDK) kéo dài DM cắt SK tại H. Lúc đó $H = SK \cap (MCD)$.

② Trong mặt phẳng (SDK) vẽ đường thẳng qua A và song song với SK cắt DH tại E. Vì $AE \parallel SH$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có

$$\frac{AE}{SH} = \frac{MA}{MS} = 2 \Rightarrow SH = \frac{1}{2}AE.$$



Trong $\triangle DHK$ ta có $AE \parallel HK$ nên theo Định lý Talet thì

$$\frac{AE}{HK} = \frac{DA}{DK} = \frac{2}{5} \Rightarrow HK = \frac{5}{2}AE.$$

Ta có $SK = SH + HK = \dfrac{1}{2}AE + \dfrac{5}{2}AE = 3AE$. Vậy $\dfrac{HK}{SK} = \dfrac{5}{6}$.

□

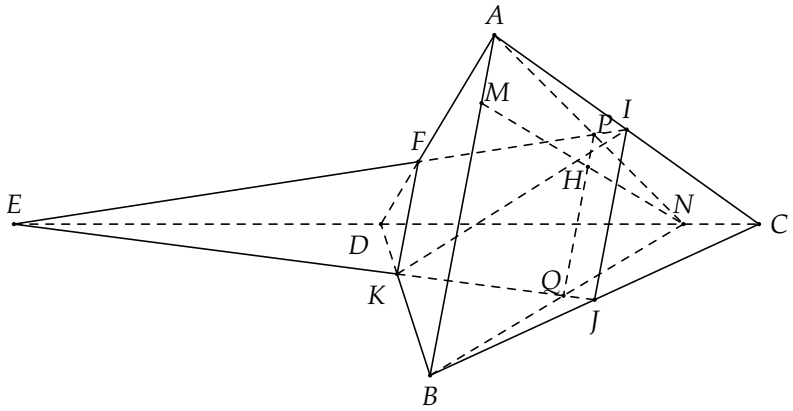
BÀI 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

① Tìm giao điểm E của CD với (IJK). Chứng minh: $DE = DC$.

② Tìm giao điểm F của AD với (IJK). Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK \parallel IJ$.

③ Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của MN với (IJK).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (BCD) kéo dài JK cắt CD tại E. Lúc đó, dễ thấy $E \in CD$ theo cách dựng. Lại có $E \in KJ \subset (IJK)$. Suy ra $E = CD \cap (IJK)$.

Trong mặt phẳng (BCD) lấy điểm E' thuộc đường thẳng DC sao cho D là trung điểm của $E'C$. Xét $\triangle E'BC$ có BD và $E'J$ là các đường trung tuyến. Vì $BK = 2KD$ nên K là trọng tâm $\triangle E'BC$. Suy ra E', K, J thẳng hàng. Từ đây có $E' = DC \cap KJ$. Vậy $E' \equiv E$. Suy ra $DE = DC$.

② Trong mặt phẳng (ACD), nối I với E cắt AD tại F. Lúc đó rõ ràng $F \in AD$ và vì $F \in EI \subset (IJK)$ nên $F \in (IJK)$. Vậy $F = AD \cap (IJK)$.

Trong $\triangle AEC$, vì các điểm D, I lần lượt là trung điểm của EC và AC nên $F = AD \cap EI$ chính là trọng tâm của $\triangle AEC$. Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $FA = 2FD$.

Vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC nên $IJ \parallel AB$. Mặt khác, vì $\dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DA} = \dfrac{1}{3}$ nên theo Định lý Talet ta có $FK \parallel AB$. Từ đó suy ra $FK \parallel IJ$.

③ Trong mặt phẳng (BCD) nối B với N cắt KJ tại Q. Ta có $Q \in (IJK)$. Trong mặt phẳng (ADC) nối A với N cắt EI tại P. Vì $(IJK) \equiv (IEJ)$ nên $P \in EI \subset (IEJ) \Rightarrow P \in (IJK)$. Trong mặt phẳng (ABN) nối P với Q cắt MN tại H. Lúc đó, vì $H \in PQ \subset (IJK)$ nên $H \in (IJK)$. Vậy $H = MN \cap (IJK)$.

□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$, E là trung điểm của SA. Gọi N là điểm thuộc đoạn AB sao cho $NB = 2NA$ và M là điểm thuộc đoạn CD sao cho $MD = 2MC$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EMN) và (SAD).

② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EMN)và (SCD).

③ Tìm giao điểm L của đường thẳng EM và mặt phẳng (SBC).

④ Tìm giao tuyến của (CDE) và (SAB). Giao tuyến này cắt SB tại P và cắt AB tại I. Chứng minh: $2SB = 3SP$ và $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$.

Lời giải.

① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài MN và AD cắt nhau tại J. Lúc đó $J \in AD \subset (SAD)$ và $J \in MN \subset (EMN)$. Vì thế $J \in (SAD) \cap (EMN)$. Dễ thấy $E \in (SAD) \cap (EMN)$. Vậy $EJ = (EMN) \cap (SAD)$.

② Trong mặt phẳng (SAD) kéo dài JE cắt SD tại Q. Vì $JE \subset (EJM) \equiv (EMN)$ nên $Q \in (EMN)$. Lúc đó $QM = (EMN) \cap (SCD)$.

③ Trong mặt phẳng (SAB) kéo dài NE và SB cắt nhau tại K. Lúc đó $K \in (EMN) \cap (SBC)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài MN và BC cắt nhau tại H. Ta có $H \in (EMN) \cap (SBC)$. Suy ra $GH = (EMN) \cap (SBC)$. Trong mặt phẳng (EMN) kéo dài KH và EM cắt nhau tại L. Vì $KH \subset (SBC)$ nên $L \in (SBC)$. Vậy $L = EM \cap (SBC)$.

④ Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài CD và AB cắt nhau tại I. Lúc đó $IE = (CDE) \cap (SAB)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vì $BC \parallel AD$ nên áp dụng Định lý Talet với $\triangle IAD$ ta có

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = AB \text{ và } ID = 2IC.$$

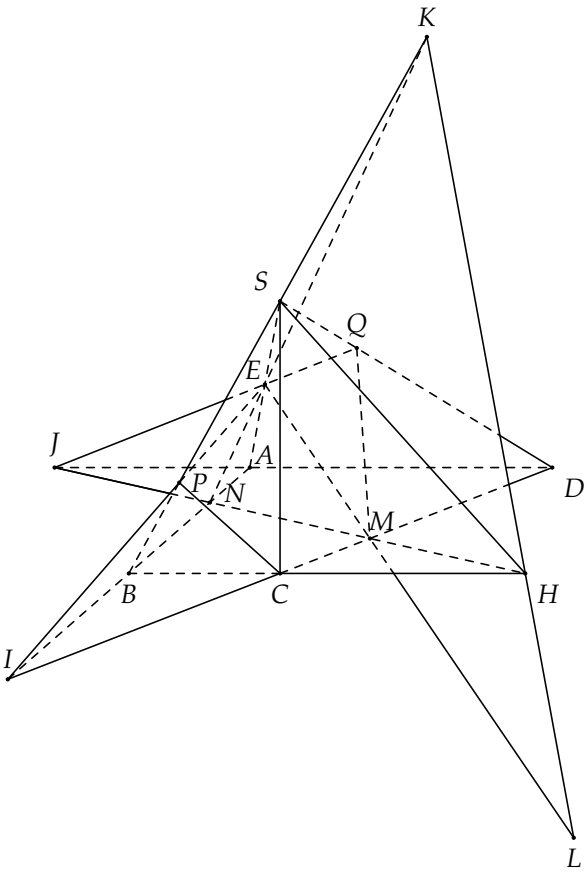
Trong mặt phẳng (SAB) xét $\triangle SIA$ có B và E lần lượt là trung điểm các cạnh IA và SA. Lúc đó $P = IE \cap SB$ là trọng tâm $\triangle SIA$. Theo tính chất trọng tâm thì

$$IE = \frac{3}{2}IP \text{ và } 2SB = 3SP.$$

Ta có

$$S_{\triangle IDE} = \frac{1}{2}IE \cdot ID \cdot \sin \widehat{EID} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}IP \cdot 2IC \cdot \sin \widehat{EID}$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot IP \cdot IC \cdot \sin \widehat{PIC} = 3S_{\triangle ICP}.$$

Vậy $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$.



□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB đáy lớn và $AB = 3CD$. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên cạnh SB thỏa $SM = 3MB$, điểm I trên cạnh SA và thỏa $AI = 3IS$.

① Tìm giao điểm của đường thẳng MN với (SAD).

② Gọi H là giao điểm của CB với (IMN). Tính tỉ số $\frac{HB}{HC}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAB) vì $\frac{1}{3} = \frac{IS}{AI} \neq \frac{MS}{MB} = 3$ nên IM và AB cắt nhau. Gọi J là giao điểm của IM và AB. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối J, N cắt AD tại P. Trong mặt phẳng (IMN) nối M, N cắt IP tại K.

① Theo cách dựng, dễ thấy $K \in MN$. Vì $K \in IP \subset (SAD)$ nên $K \in (SAD)$. Vậy $K = MN \cap (SAD)$.

② Vì H là giao điểm của CB với (IMN) nên $H = CB \cap NJ$.

Ta có $NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{6}AB$.

Vì $NC \parallel BJ$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{BJ}{NC} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = 6 \cdot \frac{BJ}{AB} = 6 \cdot \frac{BJ}{JA - BJ} = 6 \cdot \frac{1}{\frac{JA}{BJ} - 1}.$$

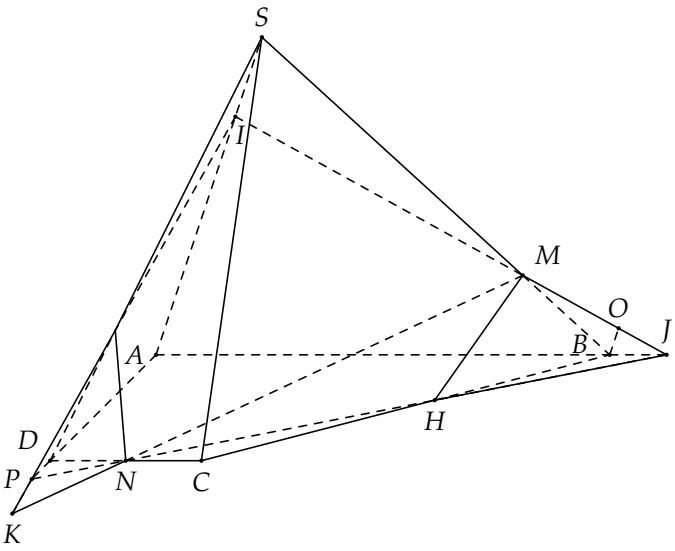
Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng qua B và song song với SA cắt IJ tại O.
Vì $BO \parallel SI$ nên áp dụng Hệ quả Định lý Talet ta có

$$\frac{BO}{SI} = \frac{BM}{MS} = \frac{1}{3}.$$

Vì $BO \parallel AI$ nên áp dụng Định lý Talet trong $\triangle JAI$ ta có

$$\frac{JB}{JA} = \frac{BO}{IA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BO}{SI} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{JA}{BJ} = 9.$$

Từ đó có $\dfrac{HB}{HC} = 6 \cdot \dfrac{1}{\dfrac{JA}{BJ} - 1} = 6 \cdot \dfrac{1}{9-1} = \dfrac{3}{4}$.



□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB. Tìm giao điểm của:

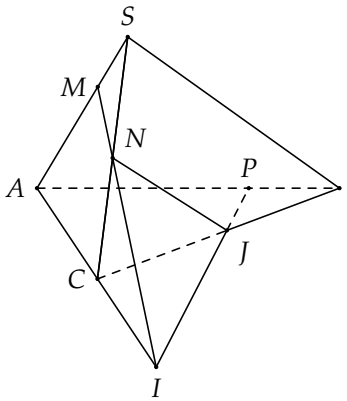
① MN và (ABC).

② BC và (MNP).

ĐS:

① $MN \cap (ABC) = I$.

② $BC \cap (MNP) = J$.



BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Hãy tìm:

① $(SGC) \cap (ABCD) =$ ② $AD \cap (SGC) =$?. ③ $SO \cap (SGB) =$?. ④ $SD \cap (BCG) =$?.
?.

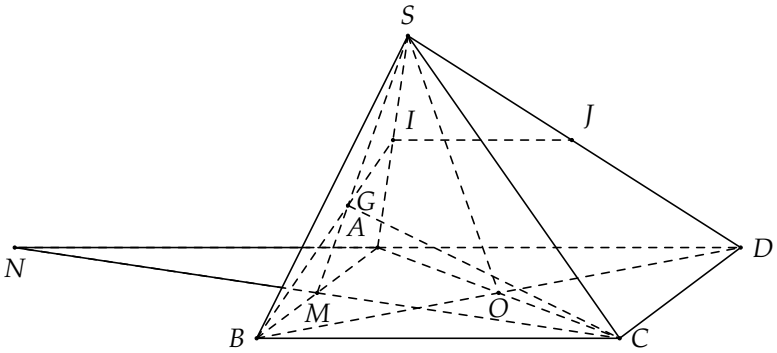
ĐS:

① $(SGC) \cap (ABCD) = MC$.

② $AD \cap (SGC) = N$.

③ $SO \cap (SGB) = S$.

④ $SD \cap (BCG) = J$.



BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA và SB. Lấy điểm M tùy ý trên SD. Tìm giao điểm của

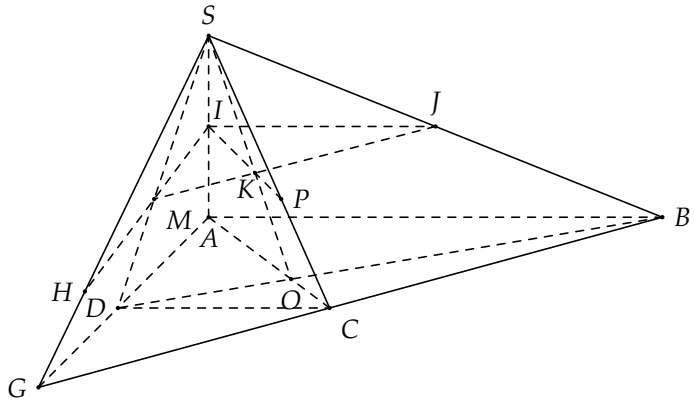
① IM với (SBC). ② JM với (SAC). ③ SC với (IJM).

ĐS:

① $IM \cap (SBC) = H$.

② $JM \cap (SAC) = K$.

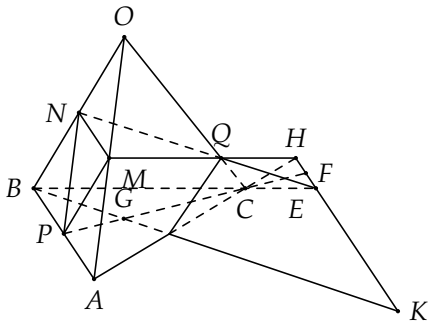
③ $SC \cap (IJM) = P$.



BÀI 14. Cho tứ diện $OABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB và AB. Trên cạnh OC lấy điểm Q sao cho $OQ > QC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao điểm

① $E = BC \cap (MNQ)$. ② $F = CP \cap (MNQ)$. ③ $K = BG \cap (MNQ)$.

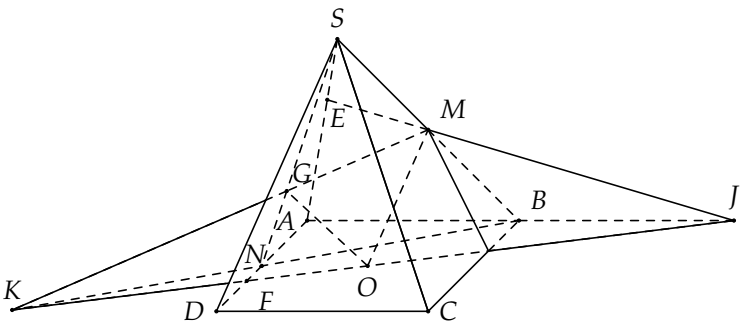
ĐS:



BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD. Tìm giao điểm:

① $K = GM \cap (ABCD)$. ② $F = AD \cap (OMG)$. ③ $E = SA \cap (OMG)$.

ĐS:



BÀI 16. Cho tứ diện $S.ABC$, lấy điểm M là trung điểm SA, lấy điểm N là trọng tâm $\triangle SBC$ và P nằm trong $\triangle ABC$.

① Tìm giao điểm của MN và (ABC).

② $SB \cap (MNP) =$?.

③ $SC \cap (MNP) =$?.

④ $NP \cap (SAB) =$?.

⑤ Tứ giác $ABIC$ là hình gì ?

ĐS:

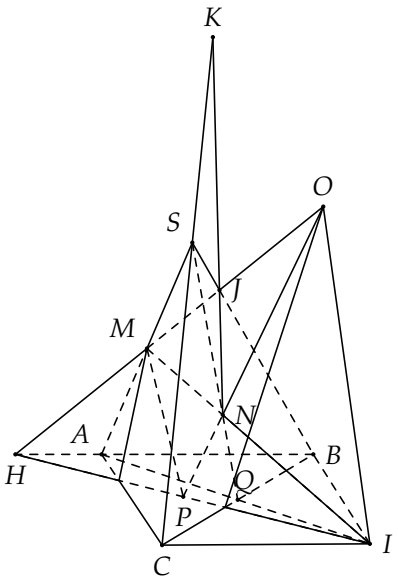
① $MN \cap (ABC) = I$.

② $SB \cap (MNP) = J$.

③ $SC \cap (MNP) = K$.

④ $NP \cap (SAB) = O$.

⑤ Tứ giác $ABIC$ là hình bình hành.

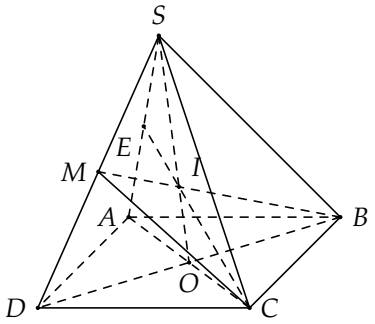


BÀI 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SD.

① Tìm $I = BM \cap (SAC)$. Chứng minh: $BI = 2IM$.

② Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh: E là trung điểm của SA.

ĐS:



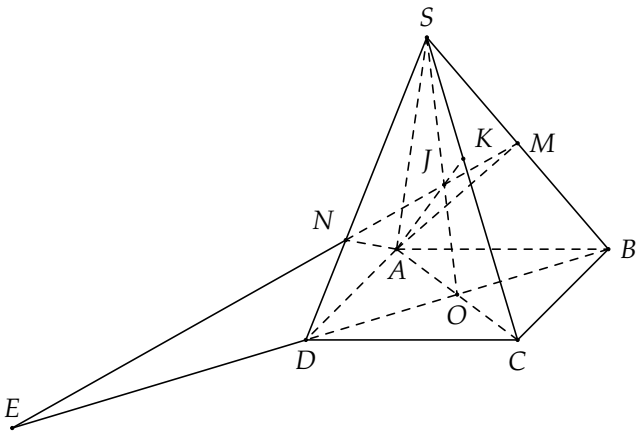
BÀI 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC).

② Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\dfrac{EN}{EM}$.

③ Tìm giao điểm K của đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN). Gọi J giao điểm của AK và SO. Tính tỉ số: $\dfrac{JK}{JA}$.

ĐS:



① $(SBD) \cap (SAC) = SO$.

② $\dfrac{EN}{EM} = \dfrac{2}{3}$.

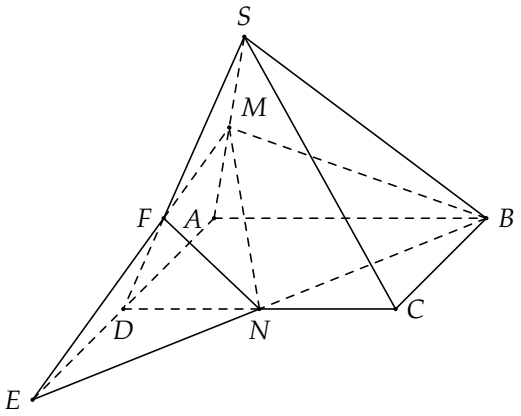
③ $\dfrac{JK}{JA} = \dfrac{2}{5}$.

BÀI 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, lần lượt là trung điểm của SA và CD.

① Tìm giao điểm E của AD với (BMN).

② Tìm giao điểm F của SD và (BMN). Chứng minh rằng: $FS = 2FD$.

ĐS:

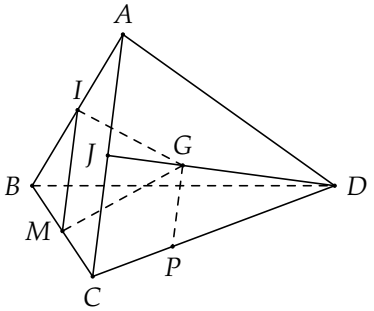


BÀI 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AB và BC, G là trọng tâm tam giác ACD.

① Tìm giao điểm P của CD và (IMG). ② Tính tỉ số: $\dfrac{PC}{PD}$.

ĐS:

- $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{1}{2}$.



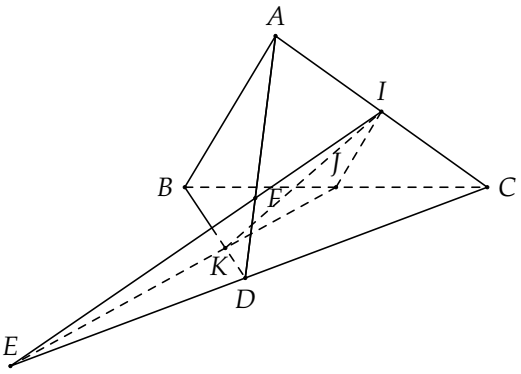
BÀI 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

① Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và (IJK). Chứng minh: $DE = DC$.

② Tìm giao điểm F của đường thẳng AD và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FA}{FD}$.

ĐS:

- $\dfrac{FA}{FD} = 2$.



DẠNG 1.3. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

Phương pháp giải: Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

1 VÍ DỤ

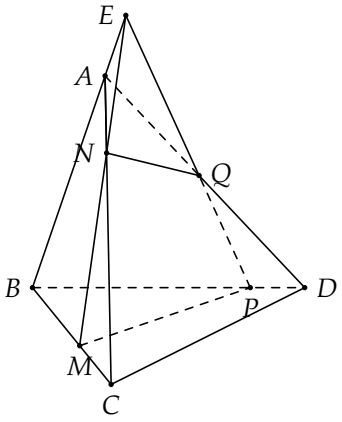
VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$, trên các đoạn CA, CB, BD lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P. Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$?

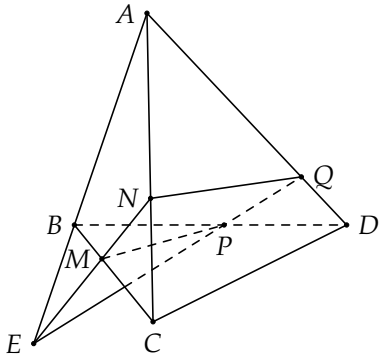
Lời giải

Trong mặt phẳng (ABC), do MN và AB không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó điểm E nằm ngoài đoạn AB.
Trong mặt phẳng (ABD), gọi Q là giao điểm của EP và AD. Ta có

- $(MNP) \cap (ABC) = MN$.
- $(MNP) \cap (BCD) = MP$.
- $(MNP) \cap (ABD) = PQ$.
- $(MNP) \cap (ACD) = QN$.

Vậy thiết diện cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$. Hay hiết diện cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $MNQP$.

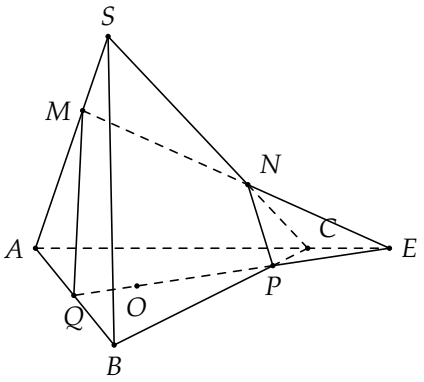




□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ và O là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SC sao cho MN không song song với AC. Xác định thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (MNO)?

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC), do MN và AC không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó điểm E nằm ngoài đoạn AC.
Trong mặt phẳng (ABC), gọi P, Q lần lượt là giao điểm của EO với BC và AB. Ta có

- $(MNO) \cap (SAC) = MN$.
- $(MNO) \cap (SBC) = NP$.
- $(MNO) \cap (ABC) = PQ$.
- $(MNO) \cap (SAB) = QM$.

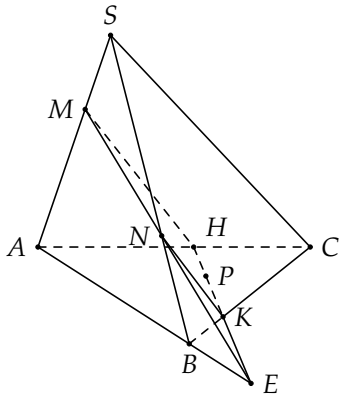
Vậy thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (MNO) là tứ giác $MNPQ$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Xác định giao tuyến của (MNP) và (ABC) từ đó suy ra thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



Trong mặt phẳng (SAB), do MN không song song với AB nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó E nằm ngoài đoạn AB.
Trong mặt phẳng (ABC), gọi K, H lần lượt là giao điểm của EP với các đoạn BC, AC (Vì P thuộc miền trong tam giác (ABC)). Khi đó ta có

- $(MNP) \cap (SAB) = MN$.
- $(MNP) \cap (SBC) = NK$.
- $(MNP) \cap (ABC) = KH$.
- $(MNP) \cap (SAC) = HM$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNKH$.

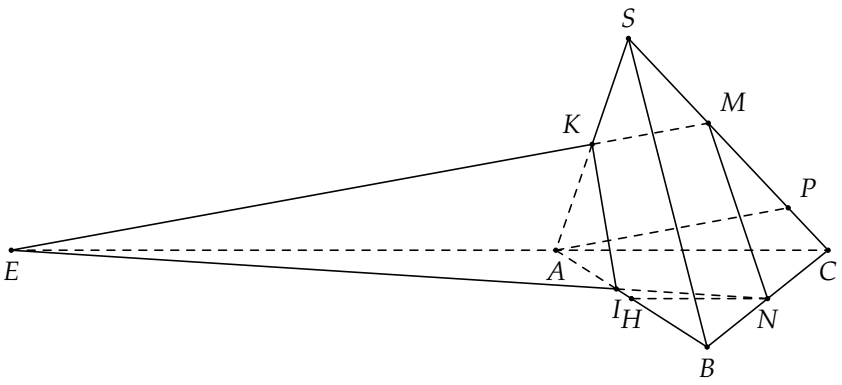
□

BÀI 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

① Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (KMN).

② Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I. Tính tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$. **ĐS:** $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{2}{3}$

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (SAC), vì $\dfrac{SM}{MC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{5} \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{SK}{SA}$ nên KM không song song với AC. Gọi E là giao điểm của KM và AC.
Trong mặt phẳng (ABC), gọi I là giao điểm của EN và AB, khi đó I là giao điểm của AB với (KMN). Ta có

- $(KMN) \cap (SAC) = MK$.
- $(KMN) \cap (SAB) = KI$.
- $(KMN) \cap (ABC) = IN$.
- $(KMN) \cap (SBC) = NM$.

Vậy thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (KMN) là tứ giác $MNIK$.

② Trên SC lấy điểm P sao cho M là trung điểm của SP. Khi đó ta có

- $AP \parallel KM$ theo tính chất đường trung bình của tam giác SAP nên $AP \parallel EM \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{PC}{PM} = \dfrac{1}{2}$.
- Gọi H là trung điểm của AB, khi đó $NH \parallel AC$ (Tính chất đường trung bình).
  Do đó $\dfrac{IH}{IA} = \dfrac{NH}{AE} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AI = \dfrac{4}{5}AH = \dfrac{2}{5}AB \Rightarrow \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{2}{3}$.

□

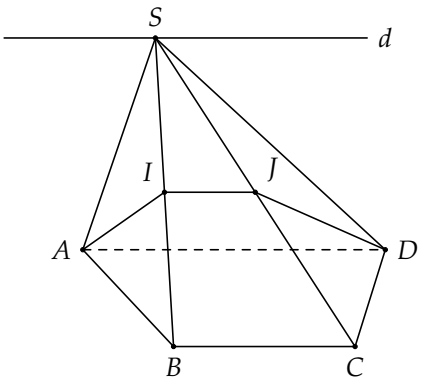
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang thỏa mãn $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SC.

① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

② Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ).

Lời giải.



① Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có S là một điểm chung.
Lại có $AD \parallel BC$ theo giả thiết và $S \notin (ABCD)$ nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với AD, BC.

② Do IJ là đường trung bình của tam giác SBC nên $IJ \parallel BC$ mà $I \notin (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel AD$. Vì vậy A, D, I, J xác định mặt phẳng $(ADJI)$ hay $D \in (AIJ)$.
Mặt khác $D \in SD$ nên D là giao điểm của SD với (AIJ).

③ Từ kết quả trên ta có

- $(AIJ) \cap (ABCD) = AD$.
- $(AIJ) \cap (SCD) = DJ$.
- $(AIJ) \cap (SBC) = JI$.
- $(AIJ) \cap (SAB) = IA$.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là hình thang $ADJI$.

□

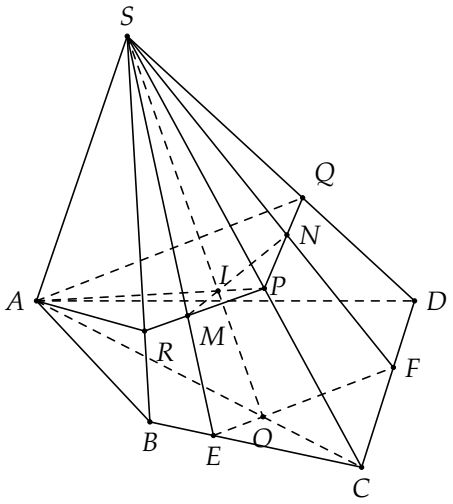
BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC. Lấy điểm N thuộc miền trong tam giác SCD.

① Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng (SAC).

② Tìm giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN).

③ Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và EF. Khi đó $SO = (SAC) \cap (SEF)$.
Trong mặt phẳng (SEF), gọi $\{I\} = MN \cap SO$. Ta có $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$. Mà $I \in MN$ nên $\{I\} = MN \cap (SAC)$.

② Theo chứng minh trên ta suy ra $AI = (AMN) \cap (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi P là giao điểm của AI và SC. Khi đó do $P \in AI \Rightarrow P \in (AMN)$.
Mà $P \in SC$ nên $\{P\} = SC \cap (AMN)$.

③ Do $M, P \in (SBC)$ nên trong mặt phẳng (SBC), gọi R là giao điểm của PM với SB. Ta có $PM \subset (AMN)$ nên $R \in (AMN)$.
Tương tự, trong mặt phẳng (SCD), gọi Q là giao điểm của PN với SD ta có $Q \in (AMN)$. Vì vậy

- $(AMN) \cap (SAB) = AR$.
- $(AMN) \cap (SBC) = RP$.
- $(AMN) \cap (SCD) = PQ$.
- $(AMN) \cap (SAD) = QA$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác $ARPQ$.

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm tam giác SAD.

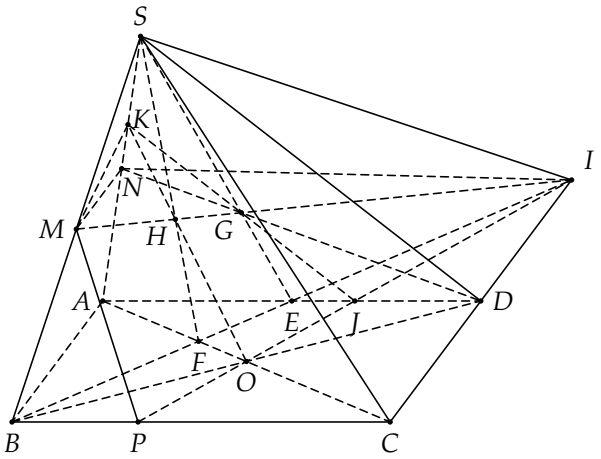
① Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I thuộc đường thẳng CD và $IC = 2ID$.

② Tìm giao điểm J của AD và (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{JA}{JD}$. **ĐS:** $\dfrac{JA}{JD} = 2$

③ Tìm giao điểm K của SA và (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{KA}{KS}$. **ĐS:** $\dfrac{KA}{KS} = 2$

④ Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (OMG).

Lời giải.

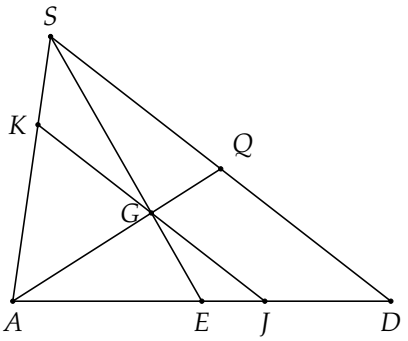


① Gọi E, N lần lượt là trung điểm của AD, SA. Ta có M là trung điểm của SB, G là trọng tâm của tam giác SAD. Trong mặt phẳng (SBE) có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3} = \dfrac{SG}{SE}$ suy ra MG và BE không song song. Do đó MG và BE cắt nhau.
Lại do $BE \subset (ABCD)$, $\{I\} = MG \cap (ABCD)$ nên $I \in BE$.
Vậy giao điểm I của MG và $(ABCD)$ là giao điểm I của MG và BE.
Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$. Suy ra MN, CD xác định mặt phẳng $(MNDC)$.
Lại do G là trọng tâm tam giác SAD nên $G \in ND \Rightarrow G \in (MNDC)$, $I \in MG \Rightarrow I \in (MNDC)$.
Mặt khác $(MNDC) \cap (ABCD) = CD$, $I \in (MNDC)$, $I \in (ABCD)$ nên $I \in CD$.
Mà $AD \parallel BC$ nên $ED \parallel BC \Rightarrow \dfrac{ID}{IC} = \dfrac{ED}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IC = 2ID$.

② Dễ thấy $I \in (OMG)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi J' là giao điểm của AD và OI. Vì $OI \subset (OMG) \Rightarrow J' \in (OMG)$ nên $AD \cap (OMG) = \{J'\}$.
Mà J là giao điểm của AD và (OMG) (gt) nên $J' \equiv J$. Vậy J là giao điểm của IO và AD.
Dễ thấy J là trọng tâm $\triangle IAC$ nên $\dfrac{JA}{JD} = 2$.

③ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi F là giao điểm của BI và AC suy ra $(SBI) \cap (SAC) = SF$.

Trong mặt phẳng (SBI), gọi H là giao điểm của MI và SF.
Ta có $H \in MG \Rightarrow OH \subset (OMG)$ và H thuộc (SAC).
Trong mặt phẳng (SAC), gọi K' là giao điểm của OH và SA.
Khi đó do $K' \in OH \Rightarrow K' \in (OMG) \Rightarrow SA \cap (OMG) = \{K'\}$ hay $K' \equiv K$. Vậy K là giao điểm của OH với SA.
Lại có K, G, J là các điểm chung của hai mặt phẳng (OMG) và (SAD) nên K, G, J thẳng hàng.
Gọi Q là trung điểm của SD, vì J là trọng tâm $\triangle IAC$. Xét $\triangle SAD$ có



$$\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow GJ \parallel SD \Rightarrow KJ \parallel SD \Rightarrow \frac{KA}{KS} = \frac{JA}{JD} = 2.$$

④ Từ chứng minh trên ta suy ra

- $(OMG) \cap (SAB) = KM$.
- $(OMG) \cap (SBC) = MP$.
- $(OMG) \cap (ABCD) = PJ$.
- $(OMG) \cap (SAD) = JK$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (OMG) là tứ giác $KMPJ$.

□

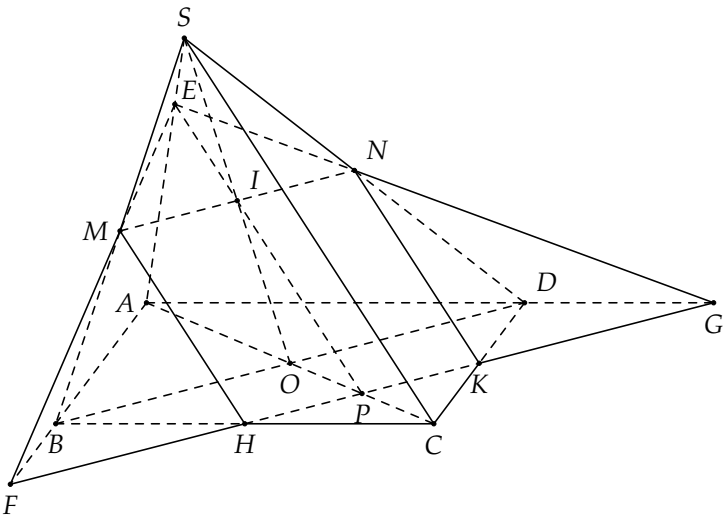
BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$.

② Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà mặt phẳng (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD. **ĐS:** $\frac{ES}{EA} = \frac{1}{3}, \frac{HB}{HC} = \frac{KD}{KC} = 1$

Lời giải.



① Do M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD, suy ra $MN \parallel BD$.
Ta có $(PMN) \cap (SBD) = MN$.
Trong mặt phẳng (SBD), gọi I là giao điểm của MN và SO. Khi đó vì $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$, $P \in AC \Rightarrow P \in (SAC)$ suy ra $(PMN) \cap (SAC) = PI$.
Hai mặt phẳng (PMN) và $(ABCD)$ có P là một điểm chung. Mà $MN \parallel BD$, $P \notin MN$, $P \notin BD$ nên giao tuyến của (PMN) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua P, song song với MN và song song với BD, cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại H và K.

② Trong mặt phẳng (SAC), gọi E là giao điểm của PI và SA. Ta có

- $E \in PI$, $PI \subset (PMN) \Rightarrow E \in (PMN)$.
- Mà $E \in SA$ nên E là giao điểm của SA với (PMN).

③ Ta có (PMN) lần lượt giao với các cạnh SA, SB, BC, CD, SD tại các điểm E, M, H, K, N nên

- $(PMN) \cap (SAB) = EM$.
- $(PMN) \cap (SBC) = MH$.
- $(PMN) \cap (ABCD) = HK$.
- $(PMN) \cap (SCD) = KN$.
- $(PMN) \cap (SAD) = NE$.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (PMN) là ngũ giác $EMHKN$. Vì MN là đường trung bình trong tam giác ABD nên I là trung điểm của SO.
Trong tam giác SOC có IP là đường trung bình nên $IP \parallel SC$.
Do đó trong tam giác SAC có $PE \parallel SC$ suy ra $\dfrac{ES}{EA} = \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{1}{3}$.
Lại có P là trung điểm của OC, HK qua P và $HK \parallel BD$ nên HK là đường trung bình của tam giác BCD.
Do đó $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{KD}{KC} = 1$.

□

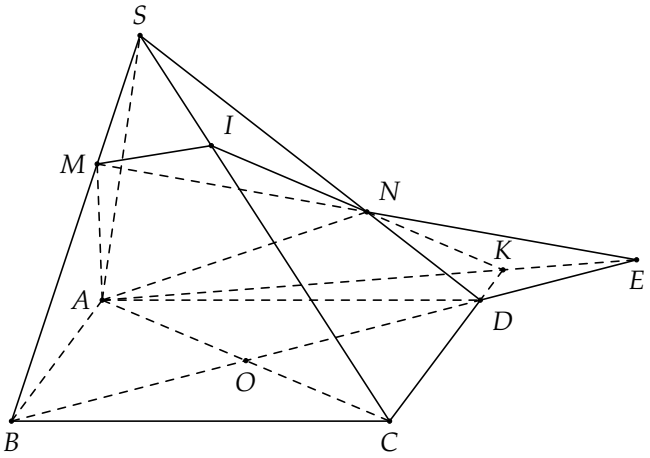
BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

② Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN). Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.

③ Gọi K là giao điểm của IN và CD. Tính tỉ số $\dfrac{KC}{KD}$. **ĐS:** $\dfrac{KC}{KD} = 5$

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (SBD). Theo bài ra ta có $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{3}, \dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \dfrac{SM}{SB}\neq\dfrac{SN}{SD}$. Do đó MN cắt BD giả sử tại E.
Hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$ có hai điểm chung A và E nên $(AMN)\cap(ABCD)=AE$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của AE và CD. Khi đó

- $K\in AE\Rightarrow K\in(AMN)$.
- $K\in CD\Rightarrow K\in(SCD)$. Suy ra K là một điểm chung của (AMN) và (SCD).
- Mặt khác (AMN) và (SCD) có điểm N chung (vì $N\in SD$).

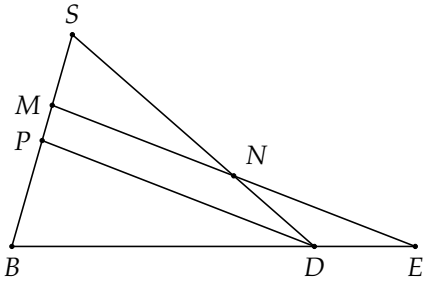
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) là đường thẳng KN.

② Trong mặt phẳng (SCD), gọi I là giao điểm của KN và SC. Khi đó $I\in KN\Rightarrow I\in(AMN)$.
Vậy I là giao điểm của SC và (AMN).
Do (AMN) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A, M, I, N nên

- $(AMN)\cap(SAB)=AM$.
- $(AMN)\cap(SBC)=MI$.
- $(AMN)\cap(SCD)=IN$.
- $(AMN)\cap(SAD)=NA$.

Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMIN$.

③ Ta có $K\in CD$ và K, I, N thẳng hàng.



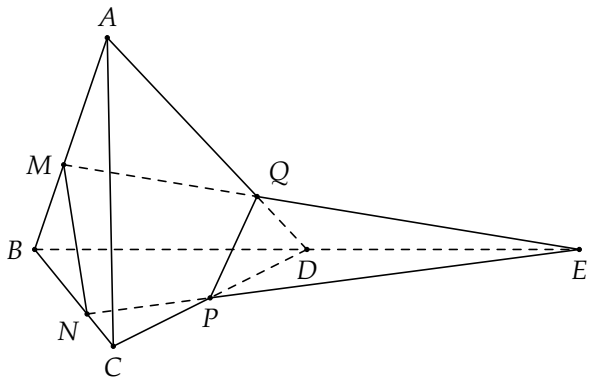
Lấy điểm P trên cạnh SB sao cho $PD\parallel MN$.
Khi đó ta có $\dfrac{SM}{SP}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{MP}{MM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{1}{4}$ vì $BM=2SM$.
Xét tam giác BME, ta cũng có $PD\parallel ME$ nên $\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{1}{4}$.
Xét tam giác ABE, có $KD\parallel AB$ nên $\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{1}{4}$.
Suy ra $\dfrac{KD}{DC}=\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{KD}{KC}=\dfrac{KD}{KD+DC}=\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\dfrac{KC}{KD}=5$.

□

3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

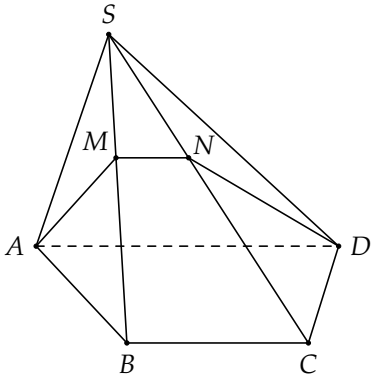
BÀI 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB lấy điểm M. Trên cạnh BC lấy điểm N thỏa mãn $BN = 2NC$. Gọi P là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).
ĐS:

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



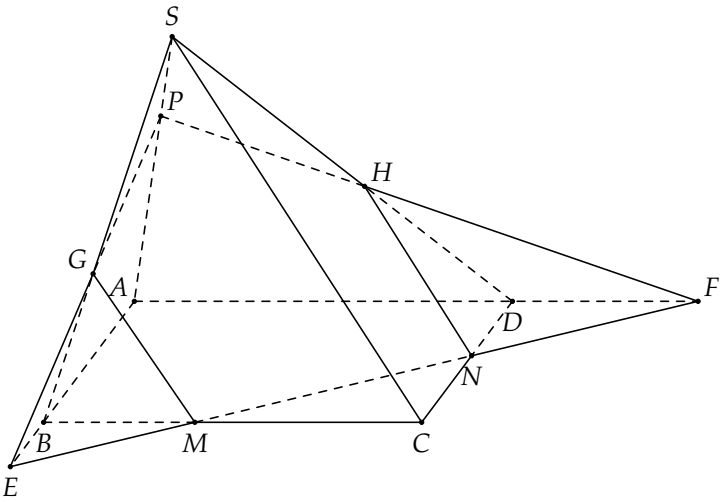
BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Lấy điểm M trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMD).
ĐS:

Thiết diện là hình thang $AMND$.



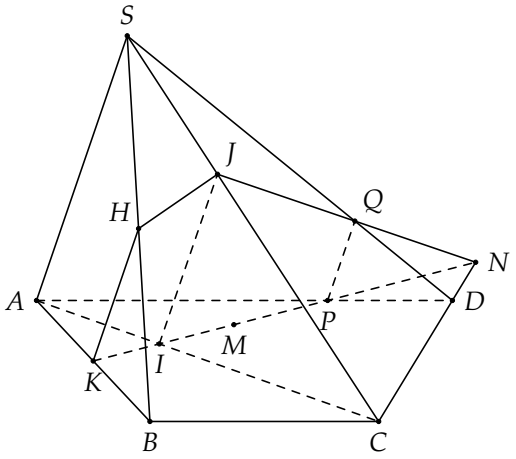
BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP).
ĐS:

Thiết diện là ngũ giác $MNHPG$.

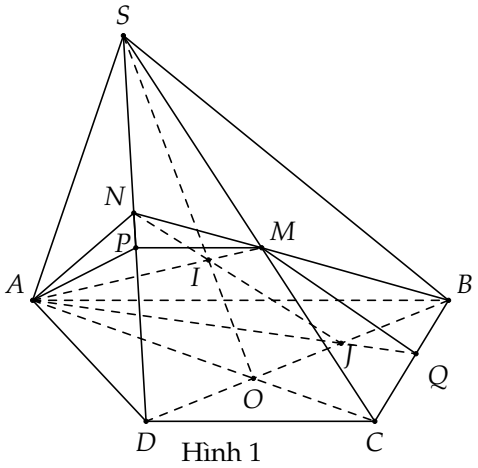


BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB và M là một điểm nằm trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng AD và CD. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (HKM).
ĐS:

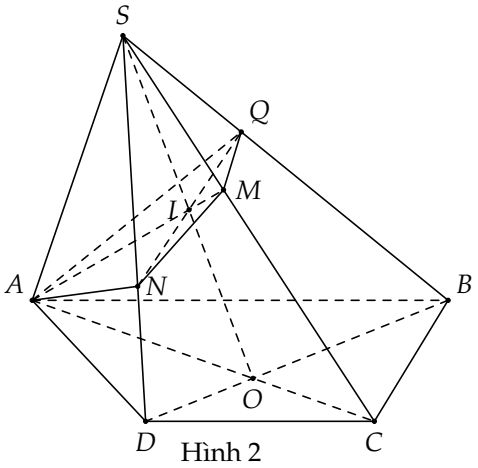
Thiết diện là ngũ giác $HKPQJ$.



BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Lấy các điểm M, N lần lượt trên các cạnh SC và SD. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với các mặt phẳng (ABM) và (AMN). **ĐS:**



Hình 1



Hình 2

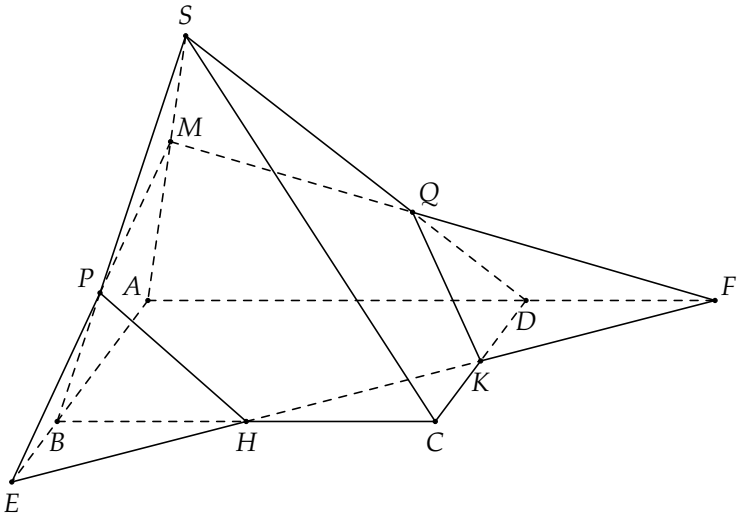
— Thiết diện cắt bởi (ABM) là hình thang $ABMP$.

— Nếu $\dfrac{SM}{SC} > \dfrac{SN}{SD}$ thì thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi (AMN) là tứ giác $ANMQ$ (Hình 1).

— Nếu $\dfrac{SM}{SC} < \dfrac{SN}{SD}$ thì thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi (AMN) là tứ giác $ANMQ$ (Hình 2).

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Lấy điểm M bất kỳ trên cạnh SA. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MHK). **ĐS:**

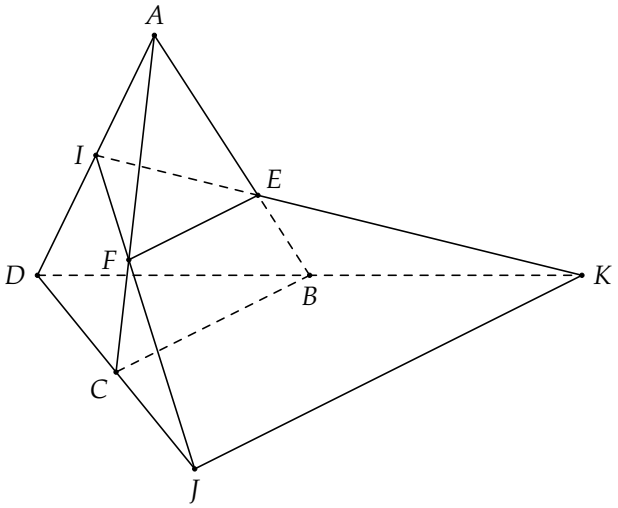
Thiết diện là ngũ giác $PMQKH$.



BÀI 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này. **ĐS:**

— Thiết diện là tam giác IEF cân tại I.

— $S_{\triangle IEF} = \dfrac{a^2}{6}$.



BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD.

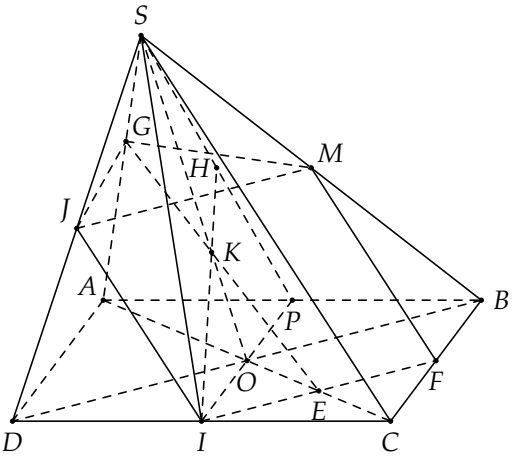
① Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB).

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJK).

ĐS:

① $\{H\} = SP \cap IK$.

② Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJK) là ngũ giác $IJGMF$.



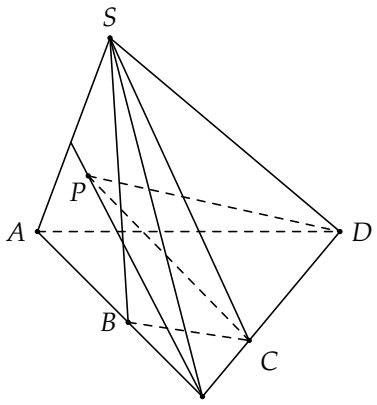
BÀI 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD).

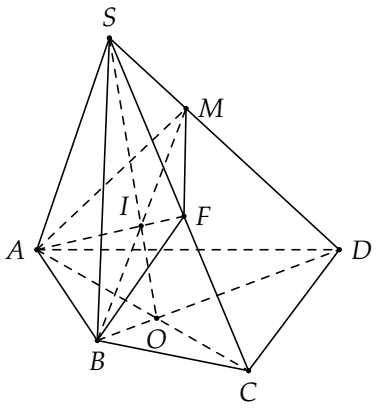
② Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM).

③ Gọi N là trung điểm của AD. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$.

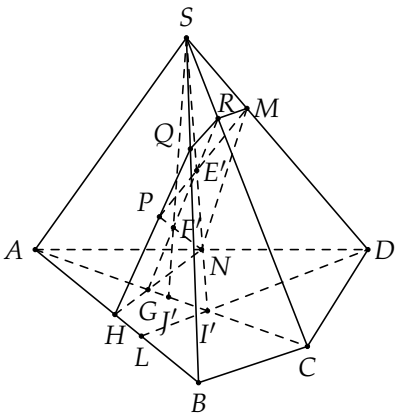
ĐS:



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

① Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) là đường thẳng PE.

② Giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) là điểm F.

③ Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MNHQR$.

DẠNG 1.4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải
Giả sử chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

— *Xét hai mặt phẳng (P) và (Q). Chứng minh ba điểm I, J, K là ba điểm chung của (P) và (Q).*

— *Khi đó I, J, K thuộc giao tuyến của (P) và (Q) hay I, J, K thẳng hàng.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải

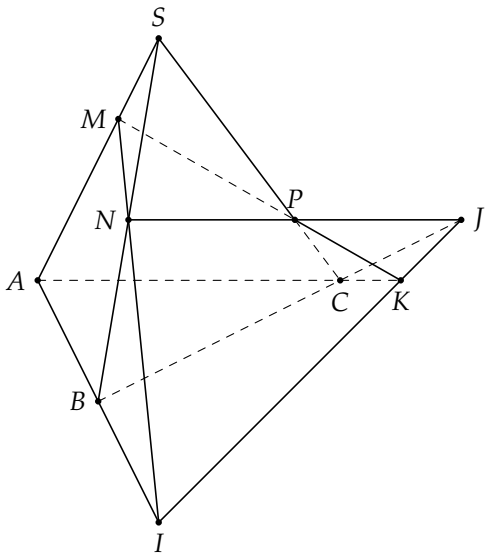
Xét hai mặt phẳng (ABC) và (MNP). Ta có

— $\begin{cases} I \in AB \subset (ABC) \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (MNP).$ (1)

— $\begin{cases} J \in BC \subset (ABC) \\ J \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABC) \cap (MNP).$ (2)

— $\begin{cases} K \in AC \subset (ABC) \\ K \in MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABC) \cap (MNP).$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra I, J, K cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của (ABC) và (MNP).
Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.



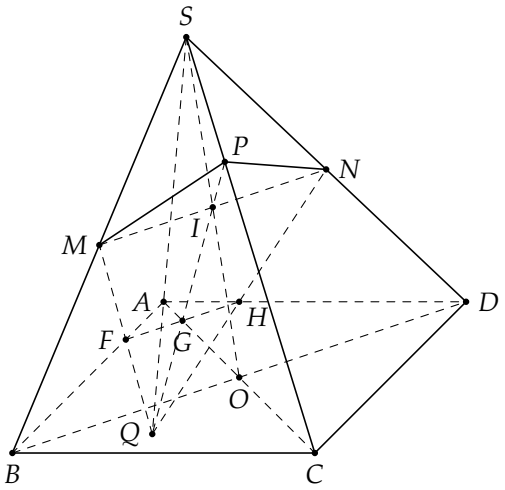
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O hai điểm, M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

① Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP).

② Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP).

③ Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.



① Trong mặt phẳng (SBD), gọi $I = SO \cap MN$.
Ta có $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP)$.

② Trong mặt phẳng (SAC), gọi $Q = SA \cap IP$.
Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in IP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SA \cap (MNP)$.

③ Xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(MNPQ)$. Ta có

— $\begin{cases} F \in AB \subset (ABCD) \\ F \in QM \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow F \in (ABCD) \cap (MNPQ)$. (1)

— $\begin{cases} G \in AC \subset (ABCD) \\ G \in QP \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow G \in (ABCD) \cap (MNPQ)$. (2)

— $\begin{cases} H \in AD \subset (ABCD) \\ H \in QN \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow H \in (ABCD) \cap (MNPQ)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra F, G, H cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của $(ABCD)$ và $(MNPQ)$.
Vậy ba điểm F, G, H thẳng hàng.

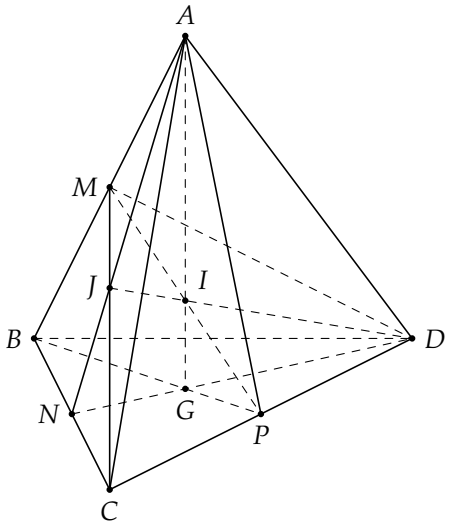
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

① Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).

② Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải.



① Ta có $A \in (ADN) \cap (ABP)$. (1)

Mặt khác $\begin{cases} G \in DN \in (ADN) \\ G \in BP \in (ABP) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(ADN) \cap (ABP) = AG$.

② Xét hai mặt phẳng (CDM) và (ADN). Ta có

$+\ D \in (CDM) \cap (ADN)$. (3)

$+\ \begin{cases} I \in JD \subset (CDM) \\ I \in AG \subset (AND) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (CDM) \cap (ADN)$. (4)

$+\ \begin{cases} J \in CM \subset (CDM) \\ J \in AN \subset (AND) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (CDM) \cap (ADN)$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra D, I, J thẳng hàng.

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB. Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.

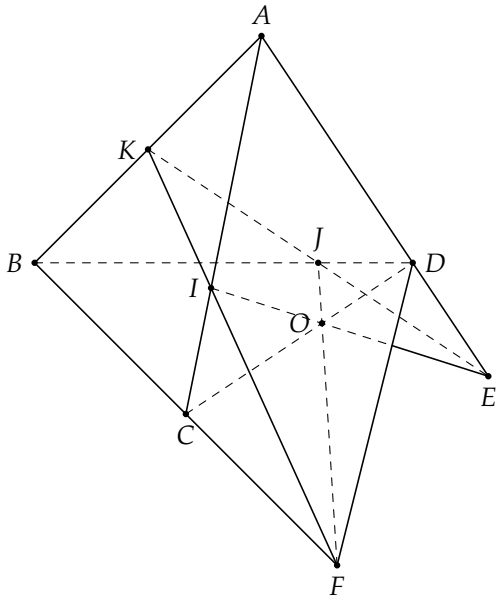
① Tìm giao điểm E của AD và (IJK).

② Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD).

③ Gọi O là giao điểm của d với CD. Chứng minh I, O, E thẳng hàng.

④ Tính các tỉ số $\dfrac{OI}{OE}$ và $\dfrac{OC}{OD}$. **ĐS:** $\dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



① Trong (ABD), gọi $AD \cap KJ = E$. Ta có
$\begin{cases} E \in AD \\ E \in KJ \subset (IJK) \end{cases}$
$\Rightarrow E = AD \cap (IJK)$.

② Trong (ABC), gọi $KI \cap BC = F$. Ta có
+ $\begin{cases} J \in (IJK) \\ J \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (IJK) \cap (BCD)$. (1)
+ $\begin{cases} F \in KI \subset (IJK) \\ F \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (BCD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(IJK) \cap (BCD) = FJ$ hay $d \equiv FJ$.

③ Trong (BCD), $O = FJ \cap CD$.
Xét hai mặt phẳng (IJK) và (ACD). Ta có
+ $\begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (ACD)$. (3)
+ $\begin{cases} O \in FJ \subset (IJK) \\ O \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow O \in (IJK) \cap (ACD)$. (4)
+ $\begin{cases} E \in KJ \subset (IJK) \\ E \in AD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJK) \cap (ACD)$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra I, O, E thẳng hàng.

④ Áp dụng định lí Menelaus trong các tam giác sau.
Tam giác ABC có K, I, F thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{FC}{FB} \cdot \dfrac{KB}{KA} \cdot \dfrac{IA}{IC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{FC}{FB} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \dfrac{FC}{FB} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow C$ là trung điểm của BF.
Tam giác BCD có F, O, J thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{OC}{OD} \cdot \dfrac{JD}{JB} \cdot \dfrac{FB}{FC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OC}{OD} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.
Tam giác ABD có K, J, E thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{ED}{EA} \cdot \dfrac{KA}{KB} \cdot \dfrac{JB}{JD} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{ED}{EA} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{ED}{EA} = \dfrac{1}{3}$.
Tam giác AIE có C, O, D thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{OI}{OE} \cdot \dfrac{DE}{DA} \cdot \dfrac{CA}{CI} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OI}{OE} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $\dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

□

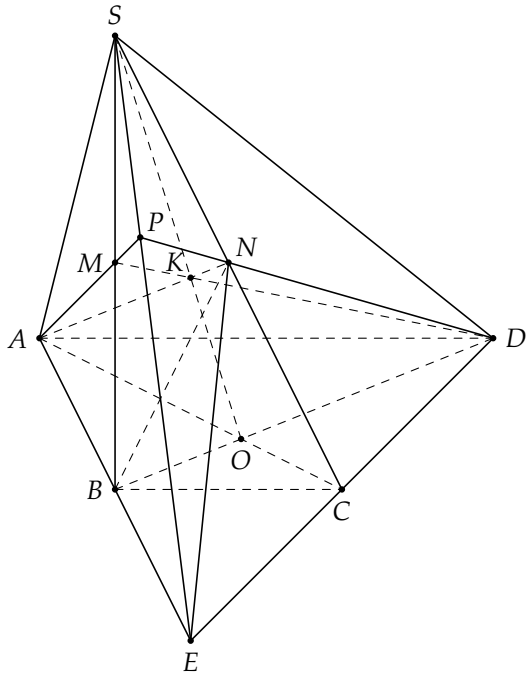
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.

① Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD). **ĐS:** $(ABN) \cap (SCD) = EN$ với $E = AB \cap CD$

② Tìm giao điểm P của DN và (SAB). **ĐS:** $P = DN \cap SE$

③ Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh S, K, O thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KO}$. **ĐS:** $\dfrac{KS}{KO} = \dfrac{3}{2}$

Lời giải.



① Ta có $N \in (ABN) \cap (SCD)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $AB \cap CD = E \Rightarrow E \in (ABN) \cap (SCD)$.
Suy ra $(ABN) \cap (SCD) = EN$.

② Trong (SCD), gọi $DN \cap SE = P$
$\Rightarrow P = DN \cap (SAB)$.

③ Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có
$+ S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)
$+ \begin{cases} K \in AN \subset (SAC) \\ K \in MD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)
$+ \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra S, K, O thẳng hàng.
Vì $AD \parallel BC$ nên $\triangle OAD \sim \triangle OCB$
$\Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng định lí Menenalus vào $\triangle SOC$ có A, K, N thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{KS}{KO} \cdot \dfrac{AO}{AC} \cdot \dfrac{NC}{NS} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KS}{KO} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KS}{KO} = \dfrac{3}{2}$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

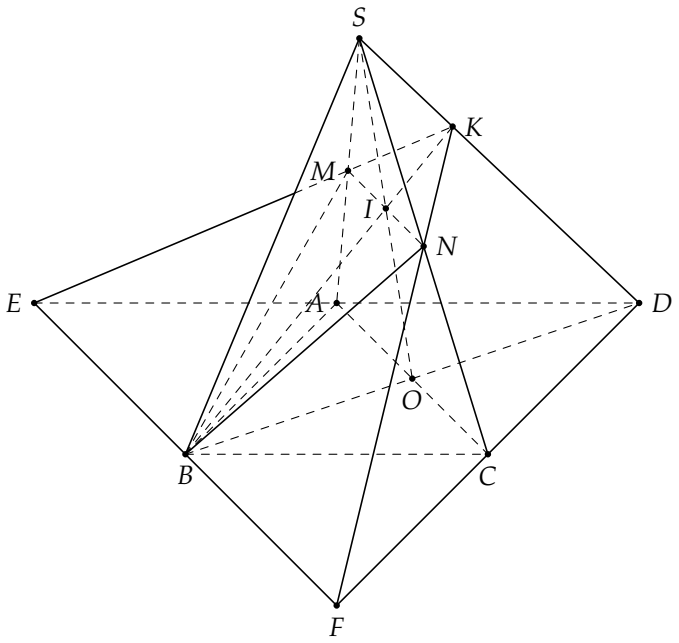
① Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC). **ĐS:** $(BMN) \cap (SAB) = BM$ và $(BMN) \cap (SBC) = BN$

② Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$. **ĐS:** $SO \cap MN = I$ và $SD \cap BI = K$

③ Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$. **ĐS:** $MK \cap AD = E$ và $NK \cap CD = F$

④ Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng. **ĐS:** B, E, F là điểm chung của $(ABCD)$ và (MNP)

Lời giải.



① Ta có $(BMN) \cap (SAB) = BM$ và $(BMN) \cap (SBC) = BN$.

② Trong (SAC), gọi $SO \cap MN = I$ $\Rightarrow I = SO \cap (BMN)$.
Trong (SBD), gọi $SD \cap BI = K$ $\Rightarrow K = SD \cap (BMN)$.

③ Trong (SAD), gọi $MK \cap AD = E$ $\Rightarrow E = AD \cap (BMN)$.
Trong (SCD), gọi $NK \cap CD = F$ $\Rightarrow F = CD \cap (BMN)$.

④ Xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (BMN) có
+ $\begin{cases} B \in (ABCD) \\ B \in (BMN) \end{cases} \Rightarrow B \in (ABCD) \cap (BMN)$. (1)
+ $\begin{cases} E \in AD \subset (ABCD) \\ E \in (BMN) \end{cases}$
$\Rightarrow E \in (ABCD) \cap (BMN)$. (2)
+ $\begin{cases} F \in CD \subset (ABCD) \\ F \in (BMN) \end{cases}$
$\Rightarrow F \in (ABCD) \cap (BMN)$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra B, E, F thẳng hàng.

□

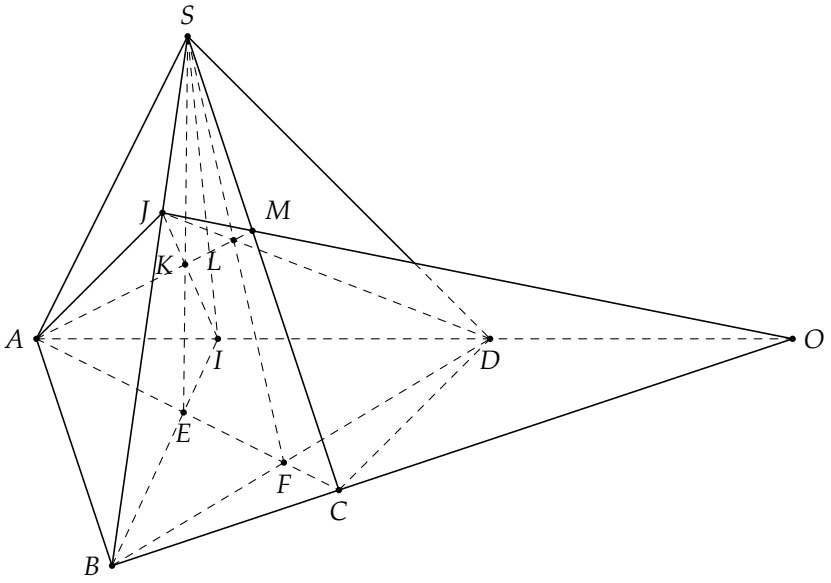
BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB.

① Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC). Tìm giao điểm K của IJ và (SAC).

② Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC). Tìm giao điểm L của DJ và (SAC).

③ Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng A, K, L, M thẳng hàng. **ĐS:** A, K, L, M là điểm chung của (SAC) và (AOJ)

Lời giải.



① Ta có $S \in (SBI) \cap (SAC)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $BI \cap AC = E$
$\Rightarrow E \in (SBI) \cap (SAC)$
Suy ra $(SBI) \cap (SAC) = SE$.
Trong (SBI), gọi $IJ \cap SE = K$
$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

② Ta có $S \in (SBD) \cap (SAC)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $AC \cap BD = F$
$\Rightarrow F \in (SBD) \cap (SAC)$.
Suy ra $(SBD) \cap (SAC) = SF$.
Trong (SBD), gọi $DJ \cap SF = L$
$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

③ Xét (SAC) và (AOJ) có
$+ A \in (SAC) \cap (AOJ)$. (1)
$+ \begin{cases} K \in SE \subset (SAC) \\ K \in IJ \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (AOJ)$. (2)
$+ \begin{cases} L \in SF \subset (SAC) \\ L \in JD \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow L \in (SAC) \cap (AOJ)$. (3)
$+ \begin{cases} M \in SC \subset (SAC) \\ M \in OJ \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow M \in (SAC) \cap (AOJ)$.(4)
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra A, K, L, M thẳng hàng.

□

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy ba điểm E, F, G sao cho $AB = 3AE$, $AC = 2AF$, $DB = 4DG$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD).

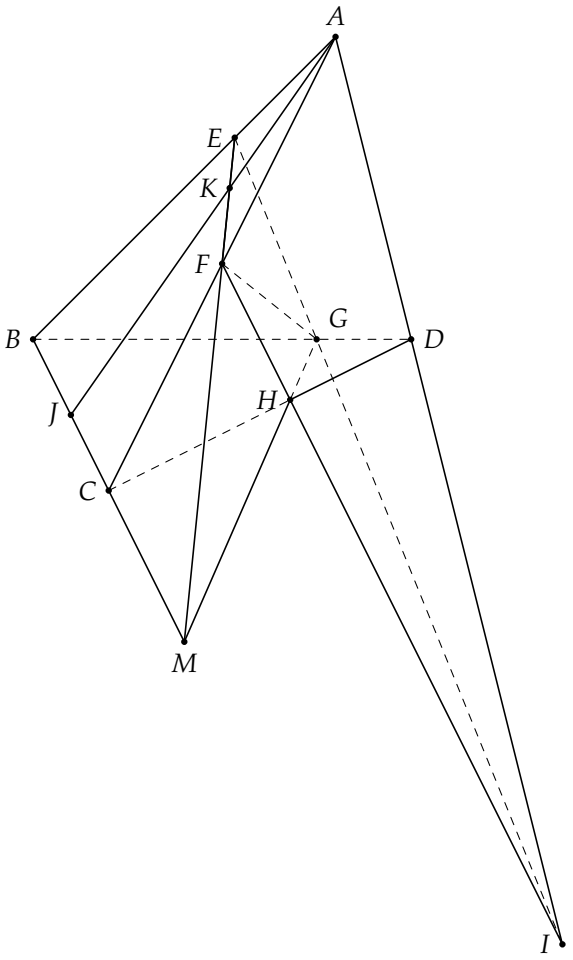
② Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HD}$. **ĐS:** $\dfrac{HC}{HD} = \dfrac{3}{2}$

③ Tìm giao điểm I của đường thẳng AD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{IA}{ID}$. **ĐS:** $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{3}{2}$.

④ Chứng minh ba điểm F, H, I thẳng hàng.

⑤ Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Tính tỉ số $\dfrac{AK}{AJ}$. **ĐS:** $\dfrac{AK}{AJ} = \dfrac{2}{5}$

Lời giải.



① Trong (ABC), gọi $EF \cap BC = M \Rightarrow (EFG) \cap (BCD) = MG$.

② Trong (BCD), gọi $MG \cap CD = H \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$.
Áp dụng định lí Menenalus với các tam giác sau.
Tam giác ABC có E, F, M thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} \cdot \dfrac{EB}{EA} \cdot \dfrac{FA}{FC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{1}{2}$.
Tam giác BCD có M, H, G thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{HC}{HD} \cdot \dfrac{GD}{GB} \cdot \dfrac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{HC}{HD} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{HC}{HD} = \dfrac{3}{2}$.

③ Trong (ABD), goij $AD \cap EG = I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$.
Tam giacs ABD cos E, G, I thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{IA}{ID} \cdot \dfrac{GD}{GB} \cdot \dfrac{EB}{EA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{IA}{ID} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{3}{2}$.

④ Xét hai mặt phẳng (ACD) và (EFG) có
$+ \begin{cases} F \in AC \subset (ACD) \\ F \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow F \in (ACD) \cap (EFG)$. (1)
$+ \begin{cases} H \in CD \subset (ACD) \\ H \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in (ACD) \cap (EFG)$. (2)
$+ \begin{cases} I \in AD \subset (ACD) \\ I \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow I \in (ACD) \cap (EFG)$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra F, H, I thẳng hàng.

⑤ Tam giác AJC có K, F, M thẳng hàng
$\dfrac{KA}{KJ} \cdot \dfrac{MJ}{MC} \cdot \dfrac{FC}{FA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KJ} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KJ} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow \dfrac{AK}{AJ} = \dfrac{2}{5}$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.

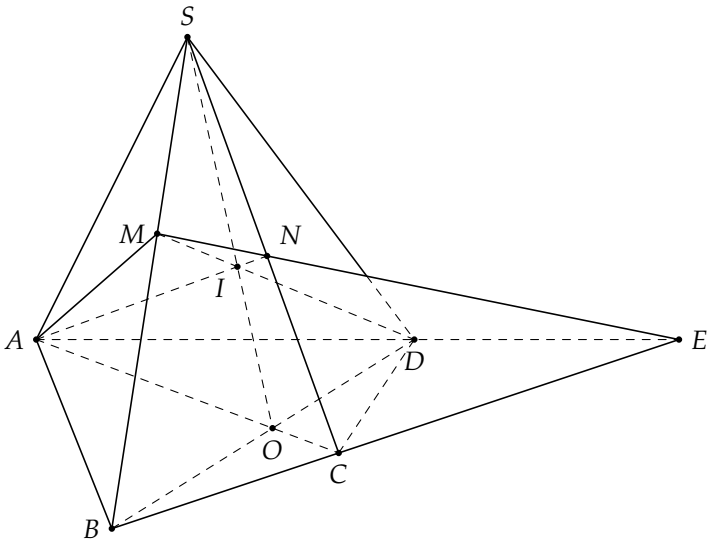
① Tìm giao điểm N của SC với (AMD).

② Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải.

① Trong $(ABCD)$, gọi $AD \cap BC = E$.
Trong (SBC), gọi $SC \cap ME = N$
$\Rightarrow N = SC \cap (AMD)$.

② Xét (SAC) và (SBD) có
+ $S \in (SAC) \cap (SBD)$.
+ $\begin{cases} I \in AN \subset (SAC) \\ I \in DM \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.
+ $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$.
Suy ra S, I, O thẳng hàng.



□

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC.

① Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.

② Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

③ Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh S, M, N thẳng hàng.

④ Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh S, P, Q thẳng hàng.

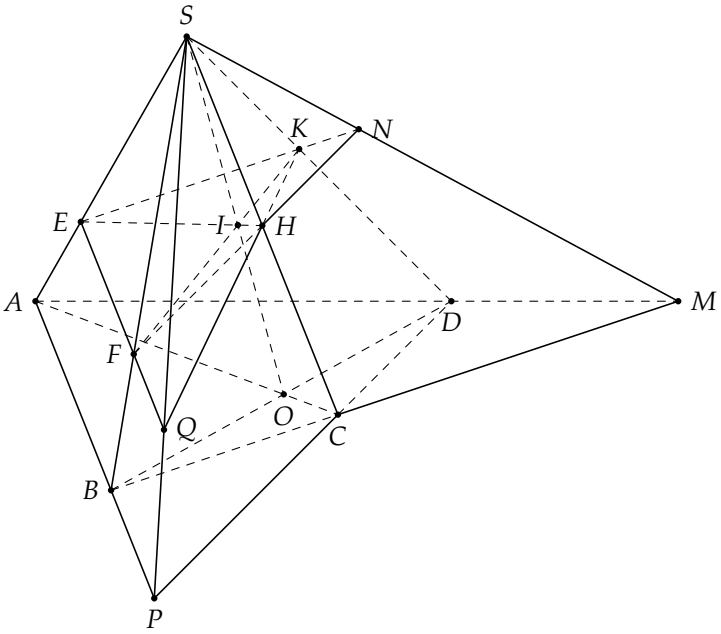
Lời giải.

① Trong (SAC), gọi $I = EH \cap SO$.
Trong (SBD), gọi $FI \cap SD = K$
$\Rightarrow K = SD \cap (EFH)$.

② Hiển nhiên S, I, O thẳng hàng.

③ Chứng minh S, M, N là điểm chung của (SAD) và (SBC).

④ Chứng minh S, P, Q là điểm chung của (SAB) và (SCD).

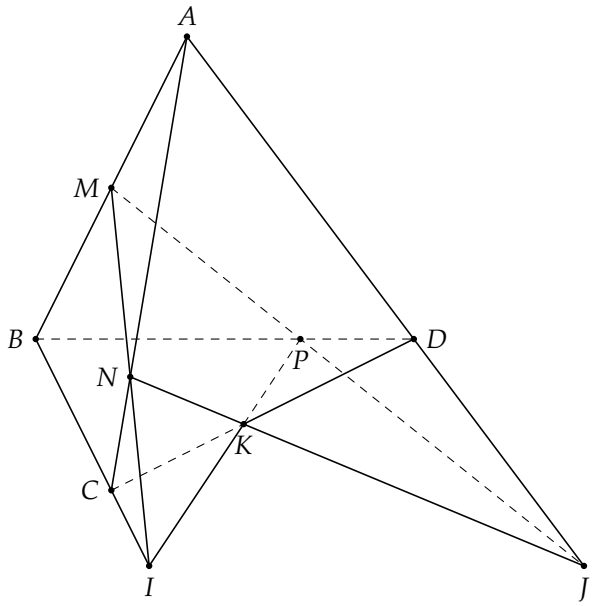


□

BÀI 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I$, $MP \cap AD = J$, $NJ \cap IP = K$. Chứng minh C, D, K thẳng hàng.

Lời giải.

Chứng minh C, D, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).



□

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD, lấy điểm J thuộc cạnh SB.

① Tìm $K = IJ \cap (SAC)$.

② Tìm $L = DJ \cap (SAC)$.

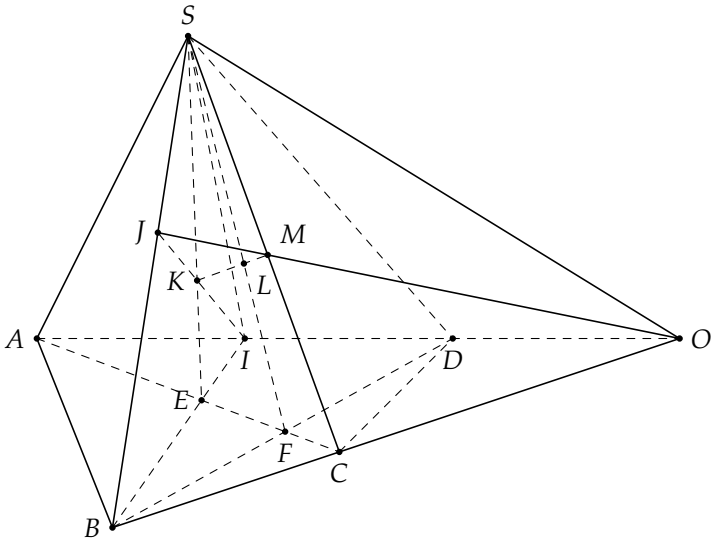
③ Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng K, L, M thẳng hàng.

Lời giải.

① Gọi $AC \cap BI = E$; $IJ \cap SE = K$
$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

② Gọi $AC \cap BD = F$; $DJ \cap SF = L$
$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

③ Chứng minh K, L, M là điểm chung của (SAC) và (AOJ).



□

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD.

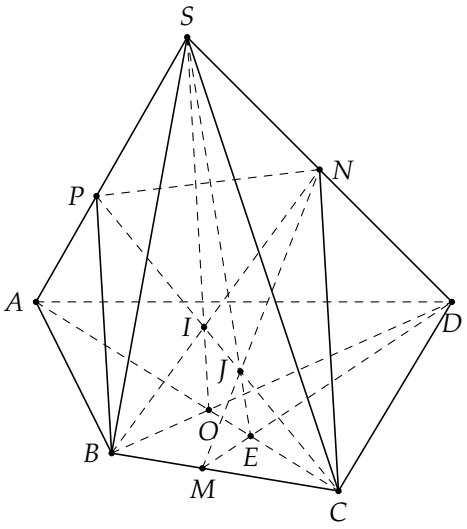
① Tìm giao điểm I của BN và (SAC).

② Tìm giao điểm J của MN và (SAC).

③ Chứng minh I, J, C thẳng hàng.

④ Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

Lời giải.



① Gọi $AC \cap BD = O$; $BN \cap SO = I$
$\Rightarrow I = BN \cap (SAC)$.

② Gọi $AC \cap MD = E$; $MN \cap SE = J$
$\Rightarrow J = MN \cap (SAC)$.

③ Chứng minh I, J, C là điểm chung của (SAC) và (BCN).

④ Gọi $CI \cap SA = P$.
Thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp là tứ giác $BCNP$.

□

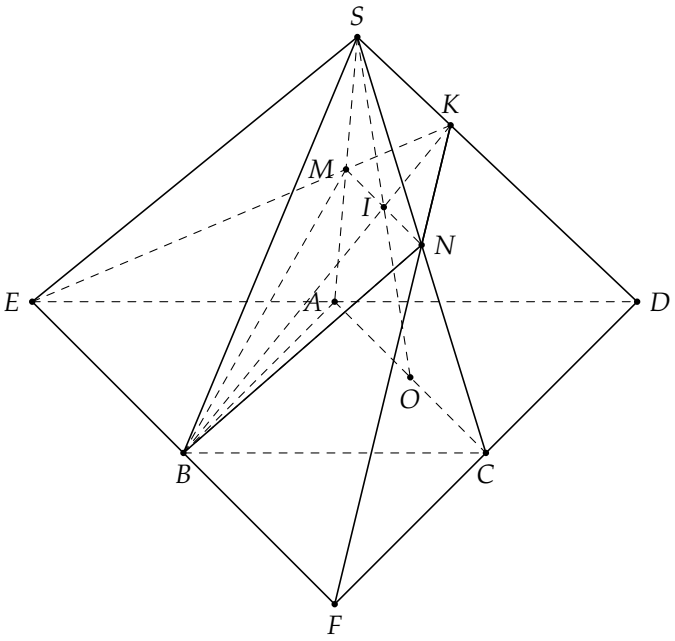
BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B.

① Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAD), (SDC).

② Tìm $I = SO \cap (P)$, $K = SD \cap (P)$, $E = DA \cap (P)$, $F = DC \cap (P)$.

③ Chứng minh rằng ba điểm E, B, F thẳng hàng. **ĐS:** E, B, F là điểm chung của (P) và $(ABCD)$

Lời giải.



① Ta có $(P) \cap (SAB) = BM$; $(P) \cap (SBC) = BN$;
$(P) \cap (SAD) = MK$; $(P) \cap (SCD) = NK$.

② $I = SO \cap MN$; $K = BI \cap SD$; $E = DA \cap MK$; $F = DC \cap NK$.

③ Chứng minh E, B, F là điểm chung của (P) và $(ABCD)$.

□

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi M, E là trung điểm SA, AC và $F \in CD$ sao cho $CD = 3CF$.

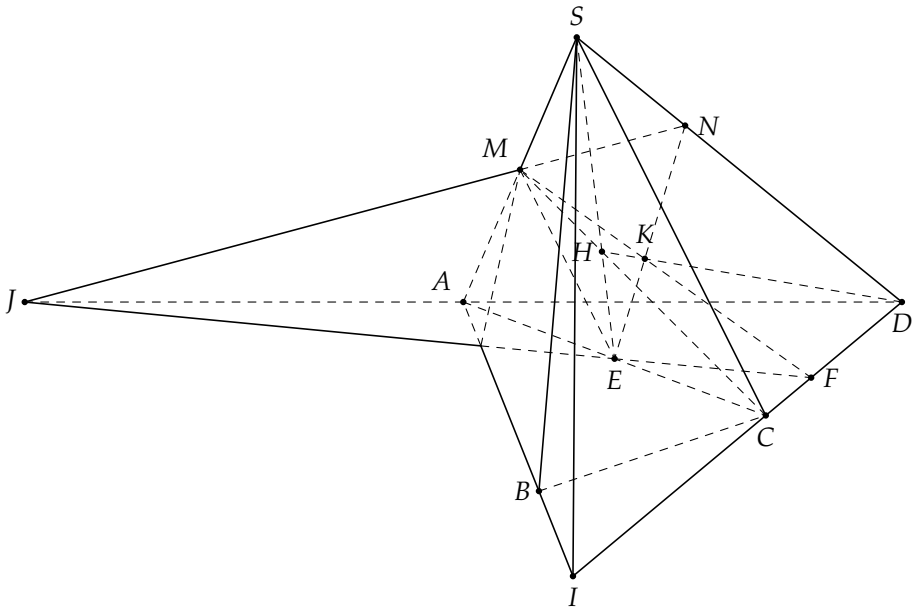
① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

② Tìm giao điểm N của SD và (MEF). Tính tỉ số $\dfrac{NS}{ND}$. **ĐS:** $\dfrac{NS}{ND} = \dfrac{1}{2}$

③ Gọi $H = SE \cap CM$ và $K = MF \cap NE$. Chứng minh D, H, K thẳng hàng.

④ Tính các tỉ số sau $\frac{HM}{HC}; \frac{HS}{HE}; \frac{KM}{KF}; \frac{KN}{KE}; \frac{KH}{KD}$. **ĐS:** $\frac{HM}{HC} = \frac{1}{2}; \frac{HS}{HE} = 2; \frac{KM}{KF} = \frac{1}{2}; \frac{KN}{KE} = 1; \frac{KH}{KD} = \frac{1}{4}$

Lời giải.



① Gọi $AB \cap CD = I$ $\Rightarrow$ $(SAB) \cap (SCD) = SI$.

② Gọi $AD \cap EF = J$, $SD \cap JM = N$ $\Rightarrow$ $N = SD \cap (MEF)$. $\frac{NS}{ND} = \frac{1}{2}$

③ Chứng minh D, H, K là điểm chung của (MCD) và (SED).

④ Ta có $\frac{HM}{HC} = \frac{1}{2}; \frac{HS}{HE} = 2;$ $\frac{KM}{KF} = \frac{1}{2}; \frac{KN}{KE} = 1;$ $\frac{KH}{KD} = \frac{1}{4}$.

□

DẠNG 1.5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Tìm giao của hai đường thẳng, sau đó chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh PI, NJ, CD đồng quy.

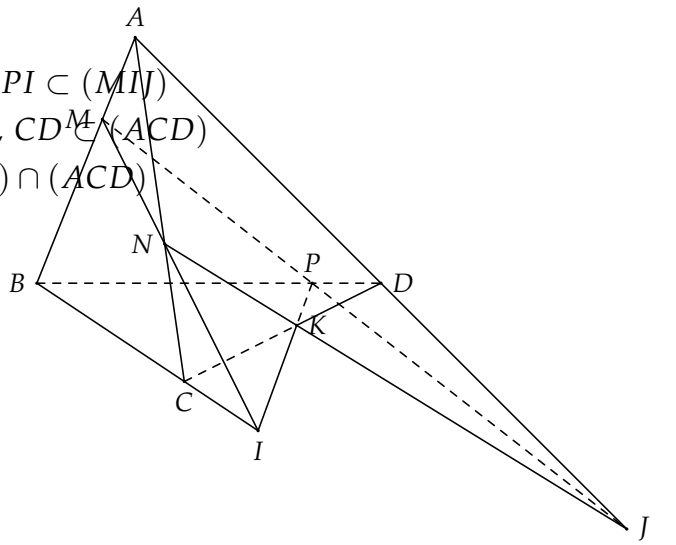
Lời giải

Trong (BCD) : Gọi $K = PI \cap CD$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} K \in PI,\ PI \subset (MIJ) \\ K \in CD,\ CD \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $K \in (MIJ) \cap (ACD)$

$\Rightarrow$ $K \in NJ$.

Vậy PI, NJ, CD đồng quy tại K.



□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm của AC và BD.

① Tìm giao điểm N của SD và (MAB).

② Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

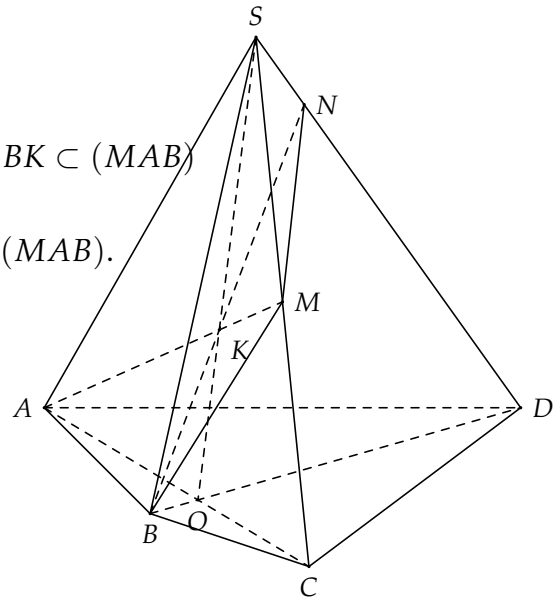
Lời giải.

① Trong (SAC): Gọi $K = AM \cap SO$.

Trong (SBD) : Gọi $N = BK \cap SD$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} N \in BK,\ BK \subset (MAB) \\ N \in SD \end{cases}$

$\Rightarrow$ $N = SD \cap (MAB)$.

② Ta có $K = AM \cap SO \Rightarrow SO$, AM đi qua K.
Mà $N = BK \cap SD \Rightarrow BN$ cũng đi qua K.
Vậy ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy tại K.



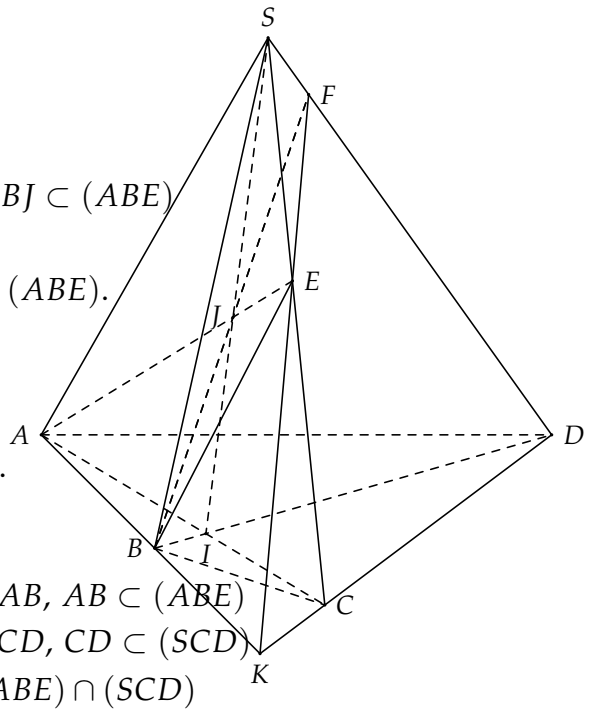
□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với S và C.

① Tìm giao điểm F của đường thẳng SD và (ABE).

② Giả sử AB không song song CD. Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

Lời giải.



① Trong $(ABCD)$: Gọi $I = AC \cap BD$.
Trong (SAC): Gọi $J = AE \cap SI$.

$$\text{Trong } (SBD):\ \text{Gọi } F = BJ \cap SD \Rightarrow \begin{cases} F \in BJ,\ BJ \subset (ABE) \\ F \in SD \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABE).$$

② Ta có

$$\begin{cases} E \in (ABE) \cap (SCD) \\ F \in (ABE) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABE) \cap (SCD) = EF.$$

$$\text{Trong } (ABCD):\ \text{Gọi } K = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} K \in AB,\ AB \subset (ABE) \\ K \in CD,\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABE) \cap (SCD) \Rightarrow K \in EF.$$

Vậy AB, CD, EF đồng quy tại K.

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy điểm M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh SO, AM, DN đồng quy.

Lời giải.

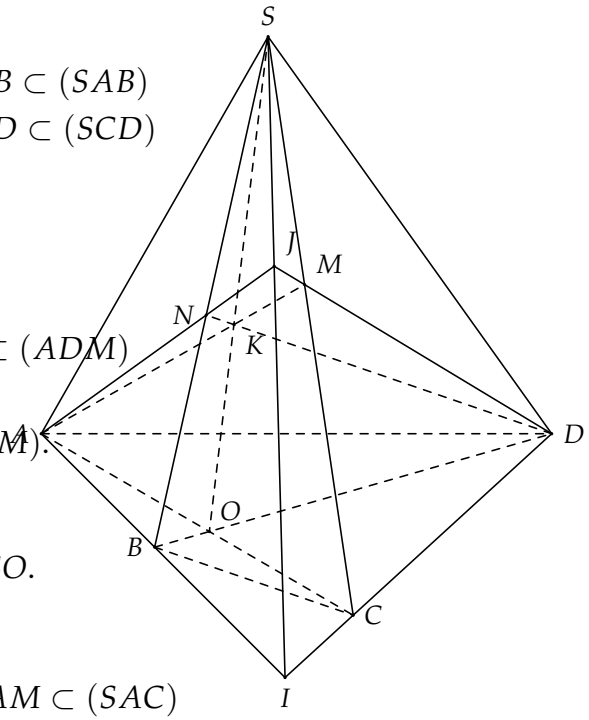
Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$. (1)

$$\text{Trong } (ABCD):\ \text{Gọi } I = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} I \in AB,\ AB \subset (SAB) \\ I \in CD,\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI$.

Trong (SID): Gọi $J = DM \cap SI$.



$$\text{Trong } (SAI):\ \text{Gọi } N = AJ \cap SB \Rightarrow \begin{cases} N \in AJ,\ AJ \subset (ADM) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ADM).$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ O \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO.$$

$$\text{Trong } (AJD):\ \text{Gọi } K = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} K \in AM,\ AM \subset (SAC) \\ K \in DN,\ DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow K \in SO.$$

Vậy SO, AM, DN đồng quy tại K.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

① Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

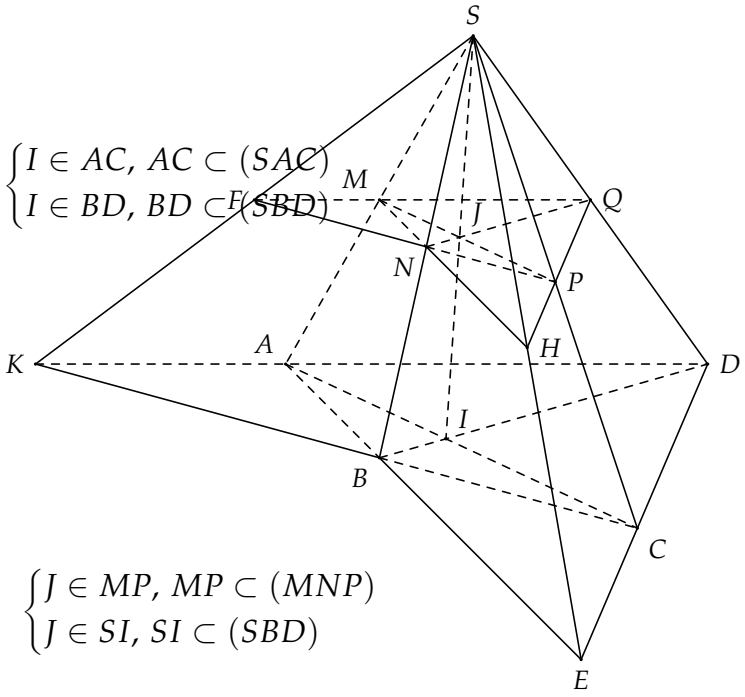
② Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD).

③ Tìm giao điểm Q của SD và (MNP).

④ Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh S, H, E thẳng hàng.

⑤ Chứng minh SK, QM, NP đồng quy.

Lời giải.



① Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)

Trong $(ABCD)$: $I = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} I \in AC,\ AC \subset (SAC) \\ I \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $(SAB) \cap (SCD) = SI$.

② Ta có $N \in (MNP) \cap (SBD)$. (3)

Trong (SAC) : Gọi $J = MP \cap SI \Rightarrow \begin{cases} J \in MP,\ MP \subset (MNP) \\ J \in SI,\ SI \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SBD)$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $(MNP) \cap (SBD) = NJ$.

③

Trong (SBD) : Gọi $Q = NJ \cap SD \Rightarrow \begin{cases} Q \in NJ,\ NJ \subset (MNP) \\ Q \in SD \end{cases}$

$\Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$.

④

Trong $(MNPQ)$: $H = MN \cap PQ \Rightarrow \begin{cases} H \in MN,\ MN \subset (SAB) \\ H \in PQ,\ PQ \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow H \in SE$.

Suy ra S, H, E thẳng hàng.

⑤ Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$. (5)

Trong $(ABCD)$: $K = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} K \in AD,\ AD \subset (SAD) \\ K \in BC,\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC)$. (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ $(SAD) \cap (SBC) = SK$.

Trong $(MNPQ)$: Gọi $F = QM \cap PN \Rightarrow \begin{cases} F \in QM,\ QM \subset (SAD) \\ F \in PN,\ PN \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$

$\Rightarrow F \in SK$.

Suy ra SK, QM, NP đồng quy tại F.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Cho tứ diện $S.ABC$ với I là trung điểm của SA, J là trung điểm của BC. Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC.

① Xác định giao điểm P của MC và (SAB).

② Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC).

③ Tìm giao điểm E của MN và (ABC).

④ Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

① Tìm giao điểm F của IJ và (BCD).

② Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính tỉ số $\dfrac{EB}{EC}$. **ĐS:** $\dfrac{EB}{EC} = 2$

③ Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H. Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HA}$. **ĐS:** $\dfrac{HC}{HA} = 2$

④ Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF.

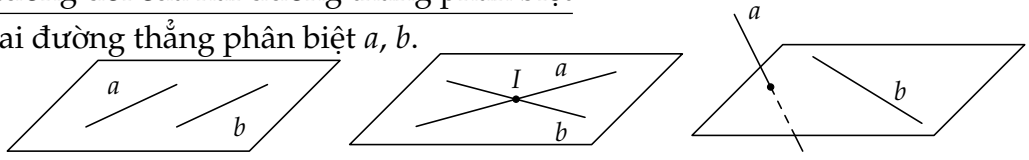
⑤ Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{OA}{OG}$. **ĐS:** $\dfrac{OA}{OG} = 3$

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a, b.



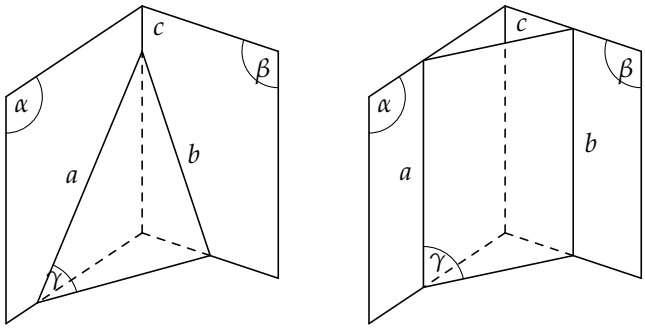
Định nghĩa 1.

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

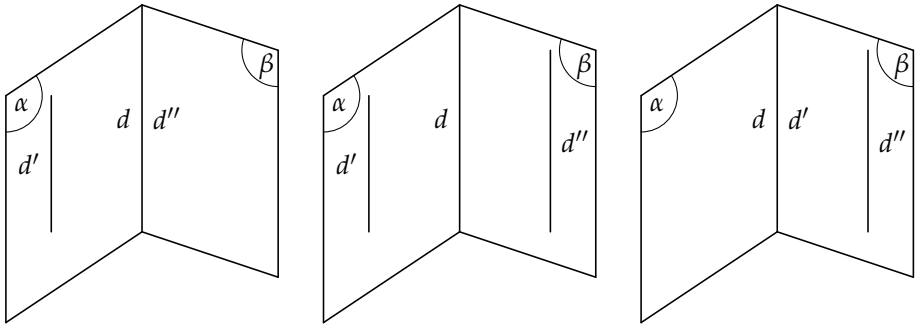
② Tính chất hai đường thẳng song song

Định lí 1. *Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

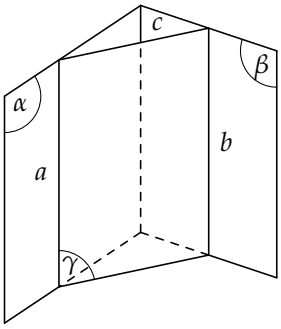
Định lí 2 (Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng). *Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.*



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lí 3. *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*



B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Chứng minh hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

Cách 1. *Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng, rồi dùng các định lí trong hình học phẳng, chẳng hạn định lí đường trung bình, định lí đảo Thales, . . . để chứng minh* $a \parallel b$.

Cách 2. *Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Chẳng hạn, chứng minh*

$$\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Cách 3. Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng hạn, chứng minh

$$\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha),\ c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c. \end{array}\right.$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

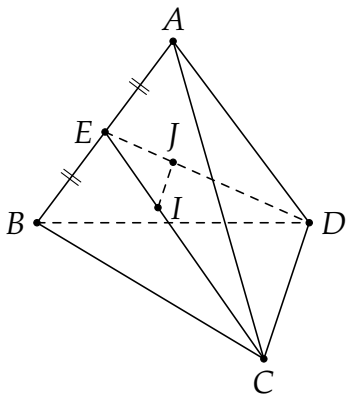
Lời giải

Gọi E là trung điểm AB. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow IJ$ và CD đồng phẳng.

Vì I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD nên

$$\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Theo định lí đảo Thales suy ra $IJ \parallel CD$ (đpcm).



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lời giải

Vì MP là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} MP \parallel AC \\ MP = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (1)

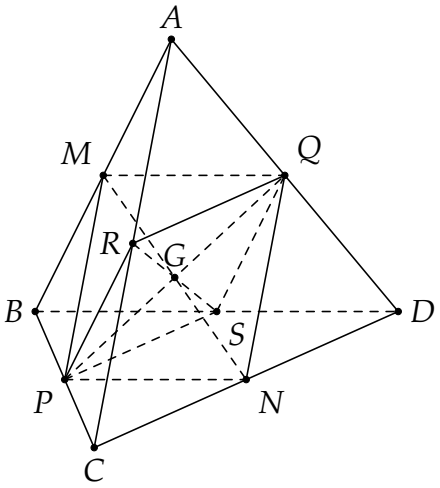
Vì NQ là đường trung bình của $\triangle ACD$ nên $\begin{cases} NQ \parallel AC \\ NQ = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MP \parallel NQ \\ MP = NQ. \end{cases}$

Do đó, $MPNQ$ là hình bình hành. Suy ra MN, PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự ta được $PSQR$ là hình bình hành nên PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Vậy MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.



□

Nhận xét. *Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.*
Trọng tâm của tứ diện là điểm đồng qui của các đoạn nối trung điểm của các cạnh đối, nó cũng là trung điểm của các cạnh này.

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh

① $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$; ② $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

Lời giải.

① Xét tam giác SAD có

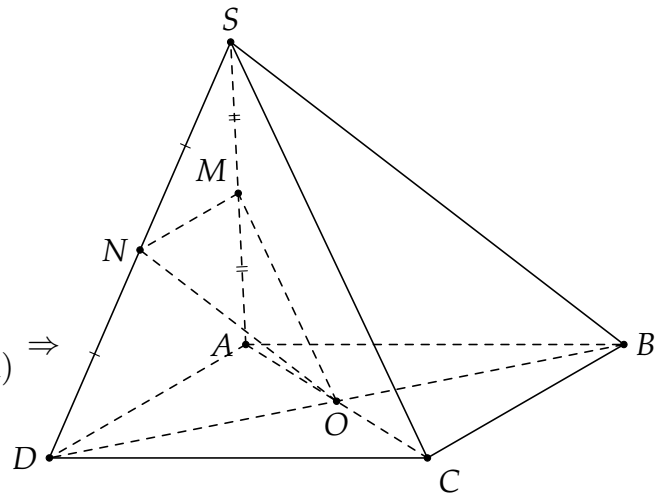
— M là trung điểm của SA (giả thiết);

— N là trung điểm của SD (giả thiết).

Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle SAD$. Do đó $MN \parallel AD$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD \text{ (chứng minh trên)} \\ BC \parallel AD \text{ } (ABCD \text{ là hình bình hành}) \end{cases} \Rightarrow$

$MN \parallel BC$.



② Xét tam giác ASC có

— M là trung điểm của SA (giả thiết);

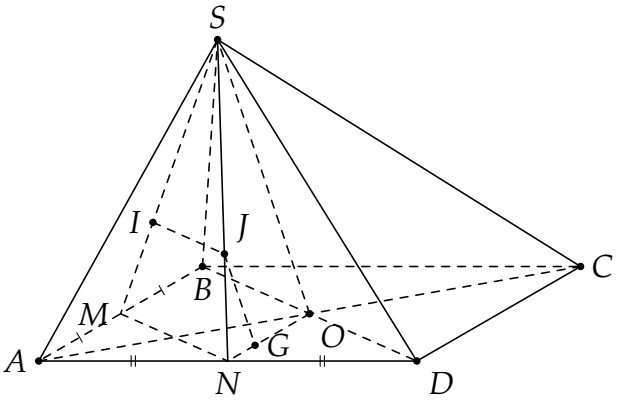
— O là trung điểm của AC (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).

Suy ra OM là đường trung bình của $\triangle SAC$. Do đó $MO \parallel SC$.
Tương tự, NO là đường trung bình của $\triangle SDB$ nên $NO \parallel SB$. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD. Chứng minh

① $IJ \parallel MN$; ② $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

Lời giải.



① Xét tam giác SMN có

— $SI = \dfrac{2}{3}SM$ (I là trọng tâm của $\triangle SAB$);

— $SJ = \dfrac{2}{3}SN$ (J là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $IJ \parallel MN$ (định lý Ta-lét đảo).

② Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên $MN \parallel BD$.
Mà $IJ \parallel MN$ (chứng minh trên) nên $IJ \parallel BD$.
Xét tam giác SON có

— $NG = \dfrac{1}{3}NO$ (G là trọng tâm của $\triangle AOD$);

— $NJ = \dfrac{1}{3}SN$ (J là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $GJ \parallel SO$ (định lý Ta-lét đảo).

□

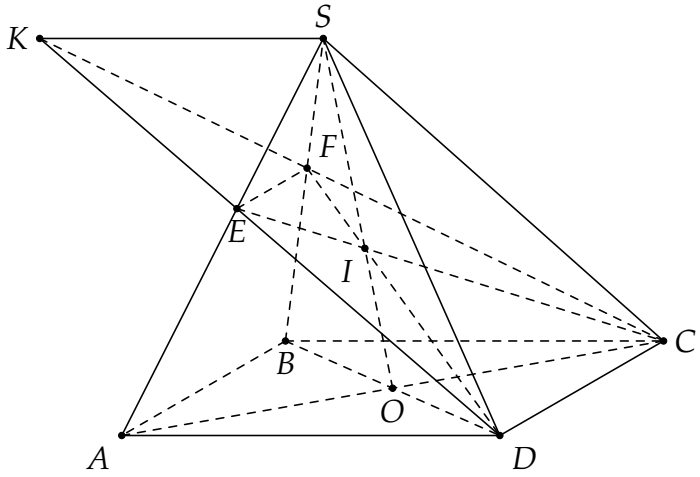
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và I là một điểm trên cạnh SO.

① Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA, SB. Chứng minh $EF \parallel AB$;

② Gọi K là giao điểm của DE và CF. Chứng minh $SK \parallel BC$.

Lời giải.



① Vì $I \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ nên $I \in (SBD)$. Do đó $F = DI \cap SB$ và $E = CI \cap SA$.
Ta có

— $(CDI) \cap (ABCD) = CD$;

— $(SAB) \cap (ABCD) = AB$;

— $(CDI) \cap (SAB) = EF$.

Mà $AB \parallel CD$ ($ABCD$ là hình bình hành) nên $EF \parallel AB \parallel CD$ (tính chất giao tuyến của ba mặt phẳng).

② *Cách 1.* Ta có

— $\begin{cases} K \in ED \subset (SAD) \\ K \in FE \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K$ là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

— $\begin{cases} S \in (SAD) \\ S \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow S$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
Suy ra SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (SBC) = SK \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow SK \parallel BC \parallel AD.$
Vậy $SK \parallel BC$.
Cách 2. Trong $\triangle SCD$ có $EF \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{KF}{KC} = \frac{EF}{CD}. \tag{1}$$

Tương tự, trong $\triangle SAB$ có $EF \parallel AB$ nên

$$\frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB} = \frac{EF}{CD} \ (AB = CD). \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{KF}{KC} = \frac{SF}{SB} \Leftrightarrow \frac{KF}{FC} = \frac{SF}{FB}.$$

Xét $\triangle FSK$ và $\triangle FBC$ có

— $\dfrac{KF}{FC} = \dfrac{SF}{FB}$ (chứng minh trên);
— $\widehat{SFK} = \widehat{BFC}$ (đối đỉnh).

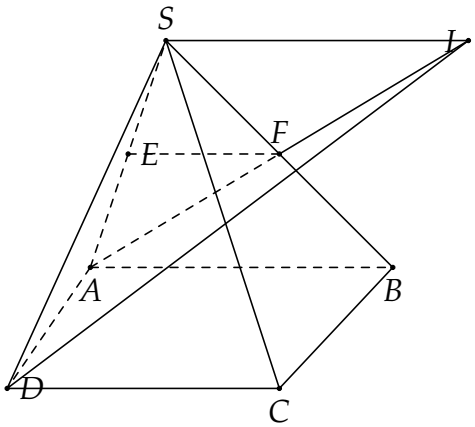
Do đó $\triangle FSK \backsim \triangle FBC$ (cạnh - góc - cạnh) suy ra $SK \parallel BC$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB.

① Chứng minh $EF \parallel CD$. ② Tìm $I = AF \cap (SCD)$. ③ Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

Lời giải.



① Ta có EF là đường trung bình của tam giác SAB nên $EF \parallel AB$
mà $AB \parallel CD$ (hai đáy của hình thang)
nên $EF \parallel CD$.

② Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có $AB \parallel CD$ nên giao tuyến là đường thẳng $Sx \parallel AB \parallel CD$.
Kéo dài AF cắt Sx tại I.
Ta thấy I là điểm chung của AF và (SCD).

③ Theo ý ②.

□

DẠNG 2.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha),\ b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b. \\ a \parallel b \end{cases}$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA. Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

① Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.

② Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.

③ Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.

④ Tìm $AD \cap (MEF)$.

⑤ Tìm $SD \cap (MEF)$.

⑥ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF).

Lời giải

① $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$
$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$.

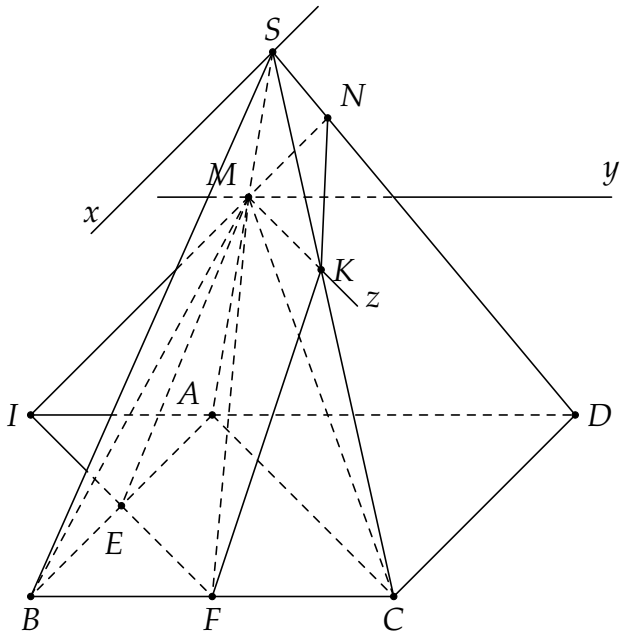
② $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC),\ AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$
$\Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My$ với $My \parallel BC \parallel AD$.

③ $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF),\ AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \end{cases}$
$\Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mz$ với $Mz \parallel EF \parallel AC$.

④ Trong $(ABCD)$, gọi $I = EF \cap AD$.
Mà $EF \subset (MEF)$ nên $AD \cap (MEF) = I$.

⑤ Trong (SAD), gọi $N = SD \cap IM$.
Mà $IM \subset (MEF)$ nên $SD \cap (MEF) = N$.

⑥ Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF) là ngũ giác $MNKFE$.



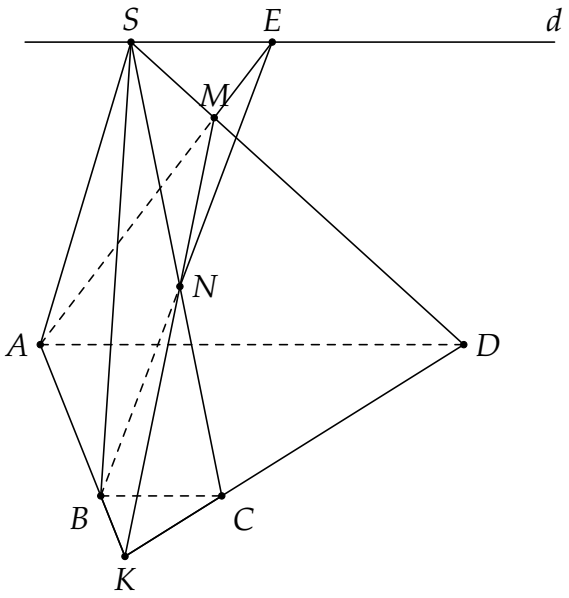
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD, AB cắt CD tại điểm K. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD.

① Tìm $d = (SAD) \cap (SBC)$ và $N = KM \cap (SBC)$.

② Chứng minh rằng AM, BN và d đồng qui.

Lời giải



① • $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD),\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d$ với $S \in d$, $d \parallel AD \parallel BC$.
• Trong (SCD), gọi $N = KM \cap SC$.
Mà $SC \subset (SBC)$ nên $N = KM \cap (SBC)$.

② $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (MAB) = BN \\ (MAB) \cap (SAD) = AM \end{cases}$
Theo định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng, suy ra AM, BN và d hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.
Mà AM, d cắt nhau nên AM, BN và d phải đồng qui.

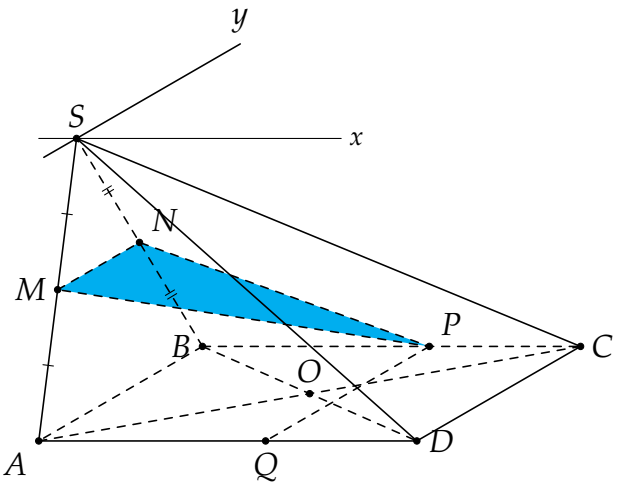
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của

① (SBC) và (SAD); ② (SAB) và (SCD); ③ (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải.



① Ta có

— $(SBC) \cap (ABCD) = BC$;
— $(SAD) \cap (ABCD) = AD$;
— $AD \parallel BC$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Mà S là điểm chung của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD) nên giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng $Sx \parallel BC \parallel AD$.

② Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng $Sy \parallel AB \parallel CD$.

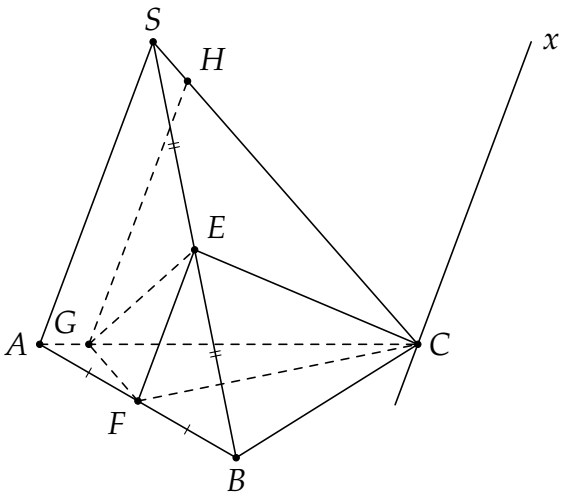
③ Vì $MN \parallel AB$ (MN là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua P kẻ $PQ \parallel AB$ ($Q \in AD$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là đường thẳng PQ.

□

BÀI 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAC) và (EFC); ② (SAC) và (EFG).

Lời giải.



① Ta có

— $(SAC) \cap (SAB) = SA$;

— $(EFC) \cap (SAB) = EF$;

— $SA \parallel EF$ (EF là đường trung bình của $\triangle SAB$).

Do đó giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAC) và (EFC) sẽ song song với SA và EF.
Mà C là điểm chung của 2 mặt phẳng (SAC) và (EFC) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng $Cx \parallel SA \parallel EF$.

② Vì $EF \parallel SA$ (EF là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua G kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SC$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (EFG) là đường thẳng GH.

□

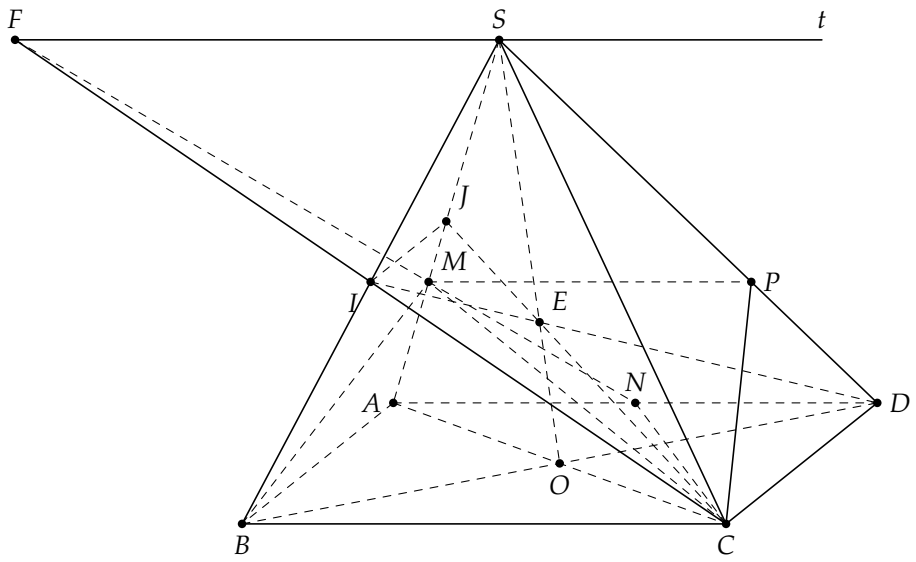
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC).

② Tìm giao điểm I của SB và (CMN), giao điểm J của SA và (ICD).

③ Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO đồng quy tại E. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC) \text{ và } AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (MBC) = MP \parallel BC \parallel AD$ (với $P \in SD$).

② Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.
Gọi $F = MN \cap St$; $I = CF \cap SB$.
Vì $\begin{cases} I \in SB \\ I \in CF \subset (CMN) \end{cases}$ nên $I = SB \cap (CMN)$.
Qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA tại J.
Vì $\begin{cases} J \in SA \\ J \in JI \subset (ICD) (\text{vì } IJ \parallel CD \Rightarrow (IJCD) \equiv (ICD)) \end{cases}$ nên $J = SA \cap (ICD)$.

③ Xét 3 mặt phẳng (SAC), (SBD) và $(CDJI)$, ta có

$$\begin{cases} SO = (SAC) \cap (SBD) \\ ID = (SBD) \cap (CDJI) \\ JC = (SAC) \cap (CDJI). \end{cases}$$

Do đó ba đường thẳng ID, JC, SO đồng quy. Gọi điểm đồng quy là E.
Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $AN \parallel SF$) ta có

$$\frac{MA}{MS} = \frac{AN}{SF} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $SF = AD = BC$ và $SFBC$ là hình bình hành.
$I = SB \cap CF$ nên I là trung điểm của SB.
$\triangle SBD$ có DI và SO là trung tuyến nên E là trọng tâm của $\triangle SBD$.
Vậy $\dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

□

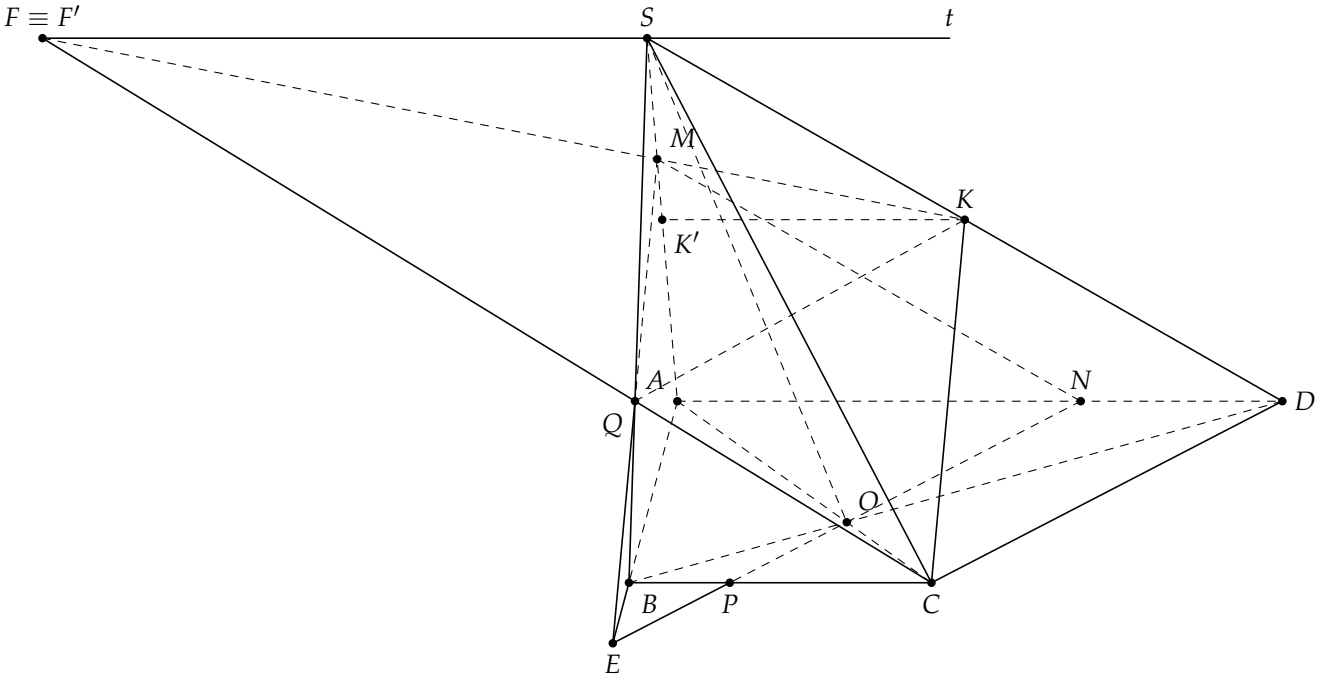
BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC), (SAC) và (SBD).

② Xác định giao điểm Q của SB với (MNP).

③ Gọi K là trung điểm của SD. Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

② Gọi $E = NP \cap AB$ và $Q = EM \cap SB$. Vì $\begin{cases} Q \in SB \\ Q \in ME \subset (MNP) \end{cases}$ nên $Q = SB \cap (MNP)$.

③ Gọi $F = MK \cap St$ và $F' = QC \cap St$. Dựa vào các vị trí các điểm Q, C, M và K của giả thiết cho, dễ thấy F và F' cùng nằm về một phía so với mặt phẳng (SAB).
Trong mặt phẳng $(SF'BC)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF' \parallel BC$) ta có

$$\frac{QS}{QB} = \frac{BC}{SF'} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Gọi K' là trung điểm của SA. suy ra $\dfrac{MK'}{MS} = \dfrac{1}{2}$.
Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF \parallel KK'$) ta có

$$\frac{MK'}{MS} = \frac{KK'}{SF} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Từ (1), (2) và $AD = 2BC$ suy ra $SF = SF'$. Do đó $F \equiv F'$, suy ra bốn điểm Q, C, M và K đồng phẳng.
Vậy $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

□

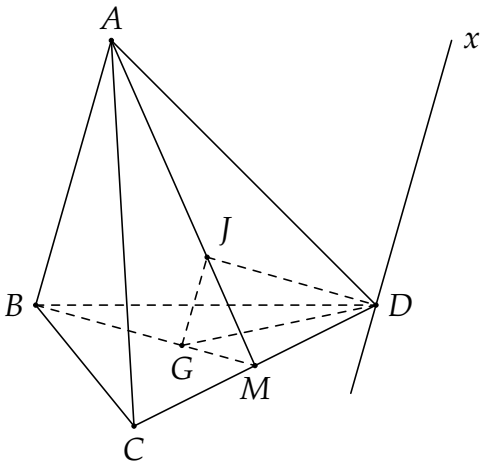
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, J lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD.

① Chứng minh $GJ \parallel AB$.

② Tìm $(ABD) \cap (GJD)$.

Lời giải.



① Gọi M là trung điểm CD.
Xét tam giác ABM có $\dfrac{MG}{MB} = \dfrac{MJ}{MA} = \dfrac{1}{3}$
Suy ra $GJ \parallel AB$.

② Hai mặt phẳng (ABD) và (GJD) có điểm D chung và $GJ \parallel AB$ nên giao tuyến là đường thẳng $Dx \parallel GJ \parallel AB$.

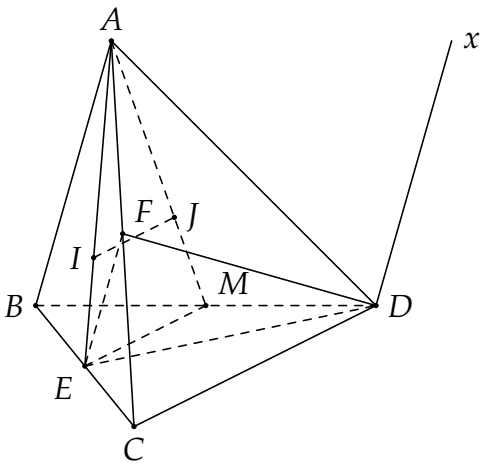
□

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ và E, F lần lượt là trung điểm BC, AC.

① Chứng minh $IJ \parallel CD$.

② Tìm $(DEF) \cap (ABD)$.

Lời giải.



① Gọi M là trung điểm BD.
Tam giác AEM có $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AJ}{AM} = \dfrac{1}{3}$ nên $IJ \parallel ME$.
Mà $ME \parallel CD$ (đường trung bình)
Suy ra $IJ \parallel CD$.

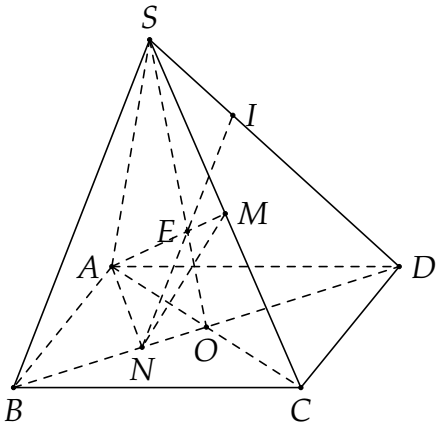
② Hai mặt phẳng (DEF) và (ABD) có điểm chung D và $EF \parallel AB$ nên giao tuyến là đường thẳng $Dx \parallel AB \parallel EF$.

□

BÀI 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC.

① Tìm $I = SD \cap (AMN)$. ② Chứng minh $NI \parallel SB$. ③ Tìm $(AMN) \cap (SAD)$.

Lời giải.



① Gọi O là giao điểm AC và BD, E là giao điểm SO và AM.
Khi đó NE và SD cắt nhau tại I.
Ta thấy $I \in SD$ và $I \in NE \subset (AMN)$ nên $I = SD \cap (AMN)$.

② Tam giác SOB có $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$ nên $NE \parallel SB$.
Suy ra $NI \parallel SB$.

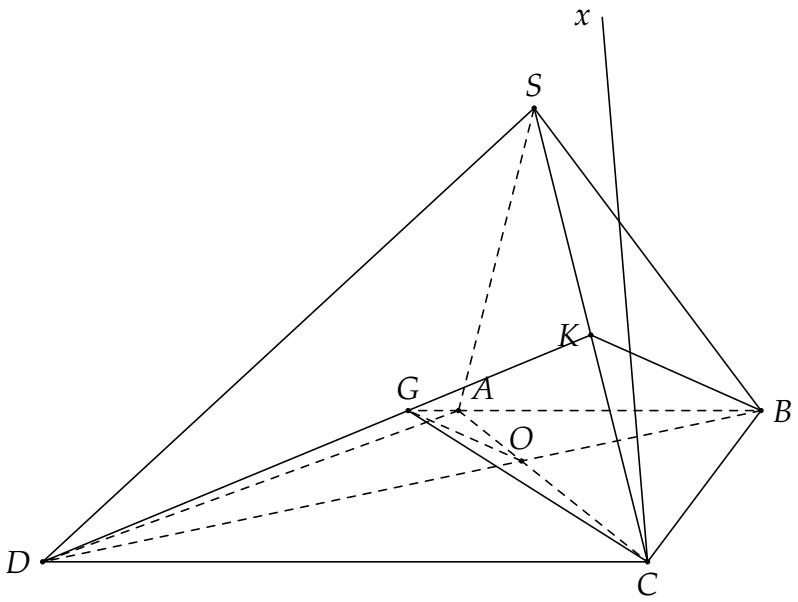
③ Hai mặt phẳng (AMN) và (SAD) có hai điểm chung A, I nên $(AMN) \cap (SAD) = AI$.

□

BÀI 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) với $CD = 2AB$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là trung điểm SC, G là trọng tâm tam giác SCD.

① Chứng minh $OG \parallel BK$. ② Tìm $(ACG) \cap (SBC)$.

Lời giải.



① Ta có $\triangle OCD \backsim \triangle OAB$ do $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$ và $\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$.
Suy ra $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CD}{AB} = 2$.
Suy ra $OD = \dfrac{2}{3}DB$.
Tam giác DBK có $\dfrac{DG}{DK} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$ nên $OG \parallel BK$.

② Hai mặt phẳng (SBC) và (ACG) có điểm C chung và $OG \parallel BK$ nên giao tuyến là đường thẳng $Cx \parallel OG \parallel BK$.

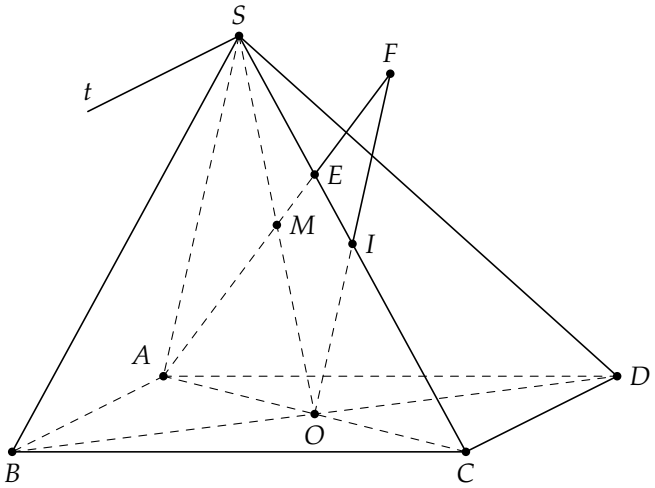
□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Lấy điểm E trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

② Tìm giao điểm M của đường thẳng AE và mặt phẳng (SBD). Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SO.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \text{ và } CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$
nên $(SAB) \cap (SCD) = St \parallel AB \parallel CD$.

② Gọi $M = AE \cap SO$.
Vì $\begin{cases} M \in AE \\ M \in SO \cap (SBD) \end{cases}$ nên $M = AE \cap (SBD)$.
Gọi I là trung điểm SC, suy ra $\dfrac{EI}{ES} = \dfrac{1}{2}$.
Gọi $F = OI \cap AE$. Trong mặt phẳng (SAC), áp dụng định lý Thales (để ý rằng $OI \parallel SA$)

$$\frac{FI}{SA} = \frac{EI}{ES} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $FI = OI = \dfrac{SA}{2}$, từ đó dẫn đến $SFOA$ là hình bình hành. Vậy M là trung điểm của SO.

□

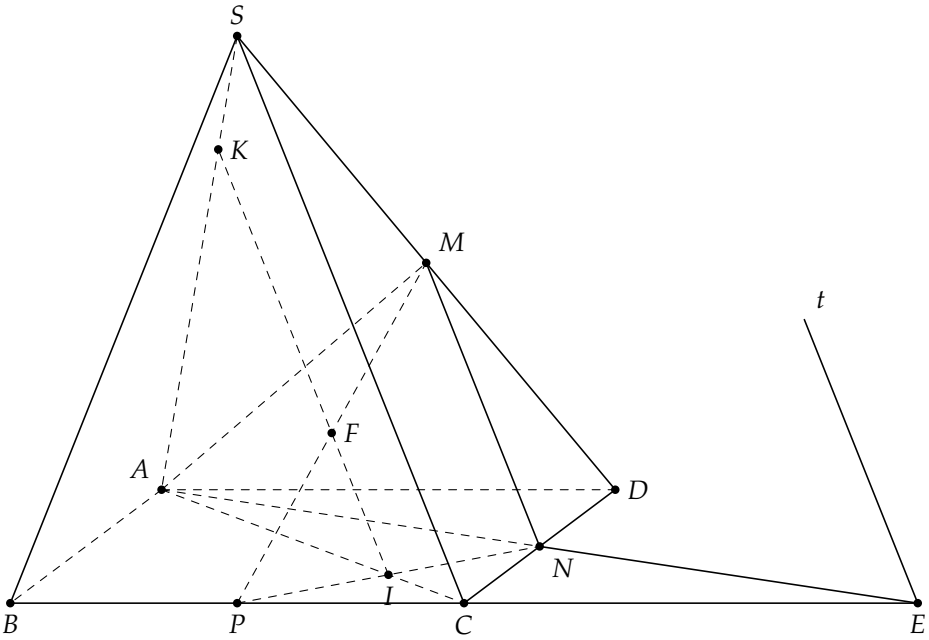
BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SD, CD, BC.

① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAC) và (SBC), (AMN) và (SBC).

② Tìm giao điểm I của (PMN) và AC, K của (PMN) và SA.

③ Gọi F là trung điểm của PM, chứng minh ba điểm K, F, I thẳng hàng.

Lời giải.



① Dễ thấy $SC = (SAC) \cap (SBC)$.
Gọi $E = BC \cap AN$
Ta có $\begin{cases} E \in (SBC) \cap (AMN) \\ SC \subset (SBC) \text{ và } MN \subset (AMN) \\ SC \parallel MN \end{cases}$
suy ra $(SBC) \cap (AMN) = Et \parallel SC \parallel MN$.

② Gọi $I = AC \cap PN \Rightarrow \begin{cases} I \in AC \\ I \in PN \subset (PMN) \end{cases} \Rightarrow I = AC \cap (PMN)$.
Gọi K là giao điểm của SA với đường thẳng đi qua I và song song với SC.
Vì $\begin{cases} K \in SA \\ K \in IK \subset (PMN) \text{ (vì } MN \parallel SC) \end{cases}$ nên $K = SA \cap (PMN)$.

③ Theo cách dựng ta có $IK \parallel MN$. (1)
$ABCD$ là hình bình hành nên AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Mà PN là đường trung bình của $\triangle CBD$ nên AC cũng cắt PN tại I là trung điểm của PN.
Suy ra IF là đường trung bình của $\triangle PMN \Rightarrow IF \parallel MN$. (2)
(1) và (2) suy ra K, F, I thẳng hàng.

□

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 **Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt** Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Có ba trường hợp xảy ra:

— Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$.

— Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$.

— Đường thẳng d và (P) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (P)$.

Định nghĩa 1. Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2 **Các định lý**

Định lí 1. *Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).*

Định lí 2. *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với (α).*

Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đương thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Định lí 3. *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Chứng minh dường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

Phương pháp: *Chứng minh* $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \notin (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P).$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M vàN lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

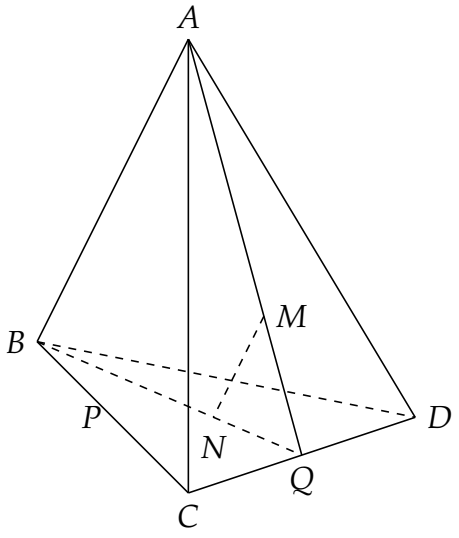
Lời giải

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Khi đó, ta có $\dfrac{QM}{MA} = \dfrac{QN}{NB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel AB$.

Vì $\begin{cases} MN \notin (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \notin (ABD) \\ AB \subset (ABD) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABD)$.



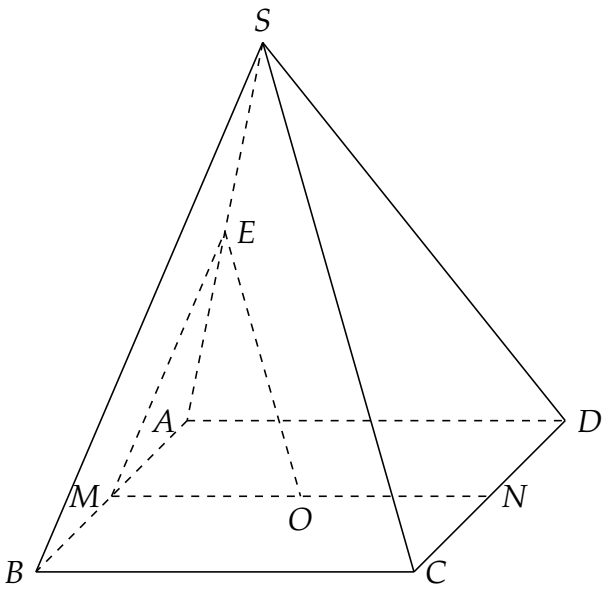
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

① Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

② Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE).

Lời giải



① Từ giả thiết, ta suy ra $MN \parallel BC$ và $MN \parallel AD$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \end{cases}$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ AD \subset (SAD) \\ MN \parallel AD \end{cases}$ nên $MN \parallel (SAD)$.

② Từ giả thiết, ta có $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ME \parallel SB$.

Vì $\begin{cases} SB \not\subset (MNE) \\ ME \subset (MNE) \\ ME \parallel SB \end{cases}$ nên $SB \parallel (MNE)$.

Tương tự, gọi O là tâm của hình bình hành.

Khi đó $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AE}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow EO \parallel SC$.

Vì $\begin{cases} SC \not\subset (MNE) \\ EO \subset (MNE) \\ EO \parallel SC \end{cases}$ nên $SC \parallel (MNE)$.

□

DẠNG 3.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: *Áp dụng một trong hai cách sau*

① ***Cách 1***: $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$

② ***Cách 2***: $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

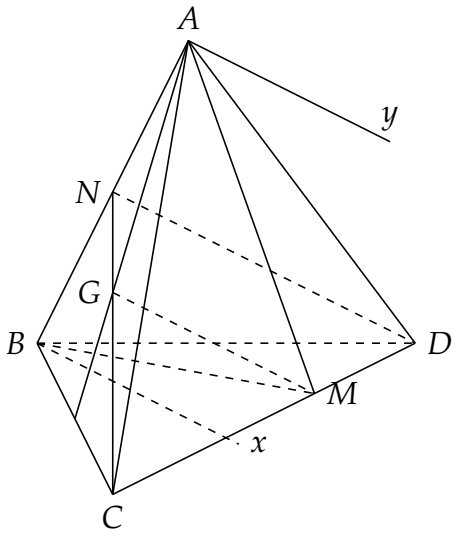
① Chứng minh $MG \parallel (ABD)$. ② Tìm $(ABD) \cap (BGM)$. ③ Tìm $(ABD) \cap (AGM)$.

Lời giải

① Gọi N là trung điểm của AB. Trong tam giác CDN, ta có $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CG}{CN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel ND$. Vì $ND \subset (ABD)$, $GM \not\subset (ABD)$ nên $GM \parallel (ABD)$.

② Vì $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ B \in (ABD) \cap (BGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Bx \parallel GM \parallel ND$.

③ Vì $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ A \in (ABD) \cap (AGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Ay \parallel GM \parallel ND$.



□

DẠNG 3.3. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp: *Để tìm thiết diện của mặt phẳng song song với mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng sử dụng tích chất sau:* $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a \parallel d, (\text{với} M \in a)$.

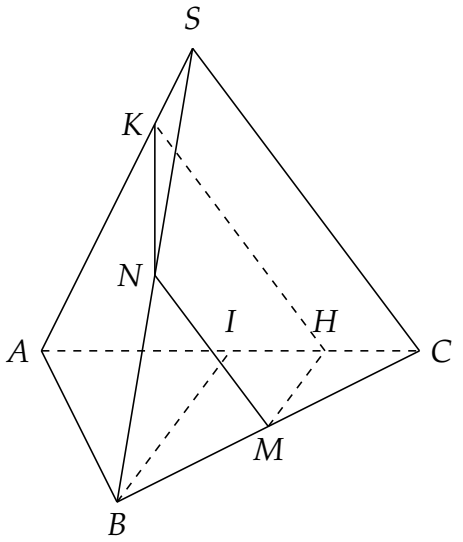
VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với BI và SC. Xác định trên hình vẽ các giao điểm của (P) với các cạnh AC, SA, SB. Từ đó suy ra thiết diện của (P) cắt hình chóp.

Lời giải

Vì $\begin{cases}(P) \parallel SC \\ M \in (P) \cap (SBC)\end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = MN \parallel SC, N \in SB$ (1)

Tương tự, $\begin{cases}(P) \parallel BI \\ M \in (P) \cap (ABC)\end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MH \parallel BI, H \in AC$ (2)

Mặt khác, $\begin{cases}(P) \parallel (SC) \\ N \in (P) cap (SAC)\end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = HK \parallel SC, K \in SA$ (3) Từ (1), (2) và (3) ta có thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ là tứ giác $MNKH$.



□

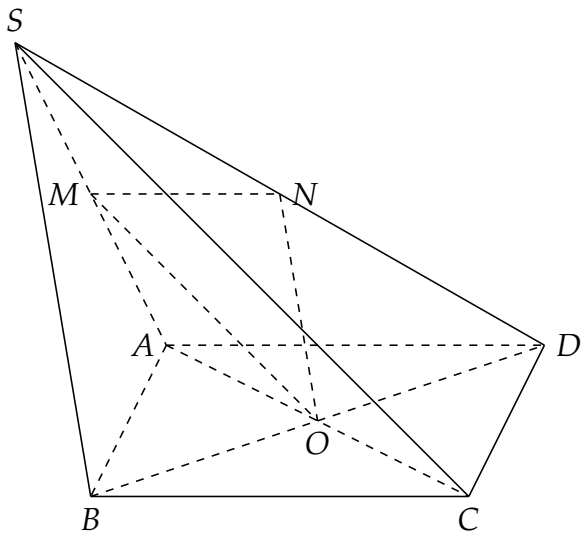
1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 550. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Chứng minh rằng:

① $BC \parallel (SAD)$. ② $AD \parallel (SBC)$. ③ $MN \parallel (ABCD)$.

④ $MN \parallel (SBC)$. ⑤ $MO \parallel (SCD)$. ⑥ $NO \parallel (SBC)$.

Lời giải.



① $BC \parallel (SAD)$

Ta có $\begin{cases}BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \not\subset (SAD)\end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD).$

② Ta có $\begin{cases}AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \\ AD \not\subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow AD \parallel (SBC).$

③ Ta có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN\parallel AD$. Khi đó $\begin{cases}MN\parallel AD\\AD\subset(ABCD)\\MN\notin(ABCD)\end{cases}\Rightarrow MN\parallel(ABCD)$.

④ Ta có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}\Rightarrow MN\parallel AD$, vì $AD\parallel BC$ nên $MN\parallel BC$ Khi đó $\begin{cases}MN\parallel BC\\BC\subset(SBC)\\MN\notin(SBC)\end{cases}\Rightarrow$ $MN\parallel(SBC)$.

⑤ Ta có $\dfrac{AM}{AS}=\dfrac{AO}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MO\parallel SC$. Vì $\begin{cases}MO\parallel SC\\SC\subset(SCD)\\MO\notin(SCD)\end{cases}\Rightarrow MO\parallel(SCD)$.

⑥ Ta có $\dfrac{DN}{DS}=\dfrac{DO}{DC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow NO\parallel SB$. Vì $\begin{cases}NO\parallel SB\\SB\subset(SBC)\\NO\notin(SBC)\end{cases}\Rightarrow NO\parallel(SBC)$.

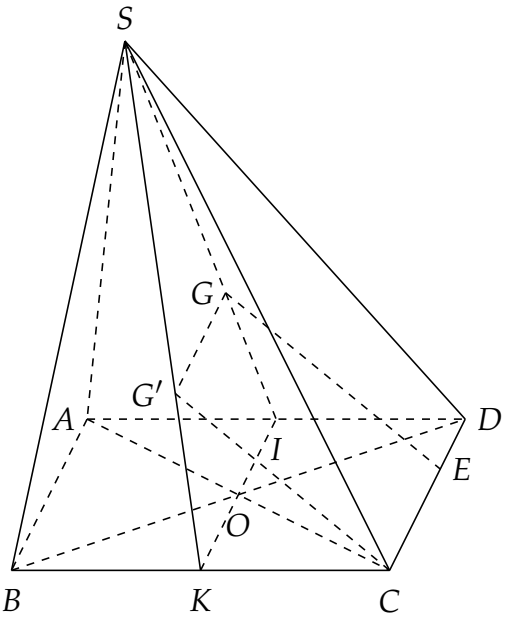
□

BÀI 551. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC=3DE$, I là trung điểm AD.

① Chứng minh $OI\parallel(SAB)$ và $OI\parallel(SCD)$.

② Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh $GE\parallel(SBC)$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases}OI\parallel AB\\AB\subset(SAB)\\OI\notin(SAB)\end{cases}\Rightarrow OI\parallel(SAB)$.

Tương tự, $\begin{cases}OI\parallel CD\\CD\subset(SCD)\\OI\notin(SCD)\end{cases}\Rightarrow OI\parallel(SCD)$.

② Vì $\dfrac{DI}{DA}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{3}=\dfrac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC. Trong hình chữ nhật $ABCD$, gọi $P=IE\cap BC\Rightarrow P=IE\cap(SBC)$.

Gọi K là trung điểm của BC, G' là trọng tâm tam giác SBC.

Khi đó $\dfrac{SG'}{SK}=\dfrac{SG}{SI}=\dfrac{G'G}{KI}=\dfrac{2}{3}$,suy ra $G'G\parallel KI\parallel CE$ và $\Rightarrow G'G=\dfrac{2}{3}KI=\dfrac{2}{3}CD=CE$. Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành, suy ra $CG'\parallel CE\Rightarrow CG\parallel(SBC)$.

□

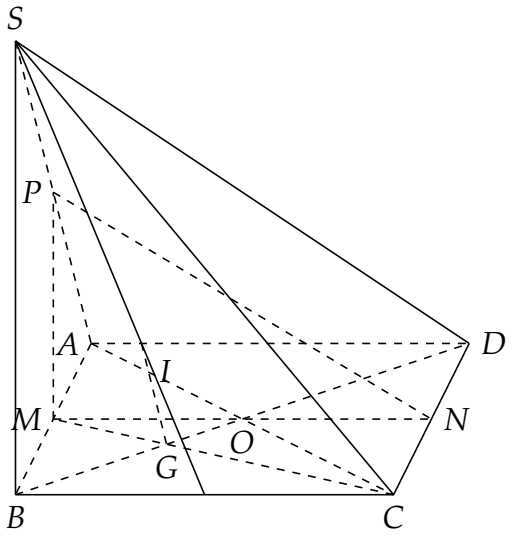
BÀI 552. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

① Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

② Gọi P là trung điểm cạnh SA. Chứng minh $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.

③ Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $GI \parallel (MNP)$.

Lời giải.



① Từ giả thiết, ta có $MN \parallel AD \parallel BC$. Vì $MN \not\subset (SBC)$, $MN \not\subset (SAD)$ nên $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

② Ta có $\dfrac{AP}{AS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SB \parallel PM \Rightarrow SB \parallel (MNP)$.
Tương tự, $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AP}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow PO \parallel SC$ vì $OP \subset (MNP)$ nên $SC \parallel (MNP)$.

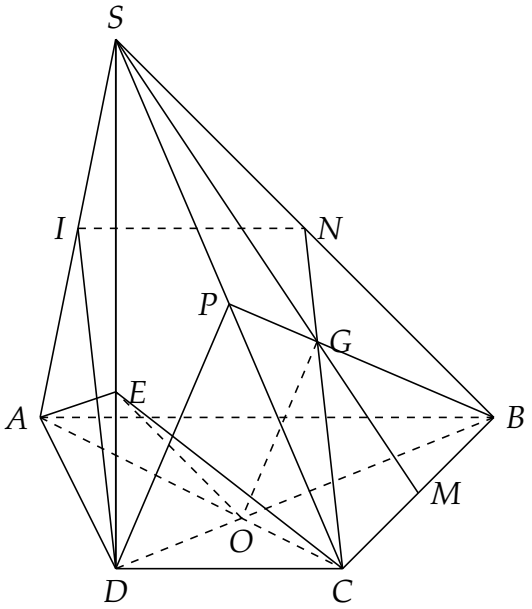
③

□

BÀI 553. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

① $DI \parallel (SBC)$. ② $GO \parallel (SCD)$. ③ $SB \parallel (ACE)$.

Lời giải.



① Gọi N là trung điểm SB, khi đó $IN \parallel AB$ và $IN = \dfrac{1}{2}AB$. Suy ra $IN \parallel CD$, $IN = DC$ suy ra tứ giác $INCD$ là hình bình hành, do đó $ID \parallel NC$. Vậy $ID \parallel (SBC)$.

② $GO \parallel (SCD)$
Gọi P là trung điểm của SC, khi đó $GO \parallel PD$, suy ra $GO \parallel (SCD)$.

③ Ta có $EO \parallel SB$, suy ra $SB \parallel (ACE)$.

□

BÀI 554. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AB, AD. Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\dfrac{SI}{SM} = \dfrac{SJ}{SN} = \dfrac{2}{3}$. Chứng minh

① $MN \parallel (SBD)$. ② $IJ \parallel (SBD)$. ③ $SC \parallel (IJO)$.

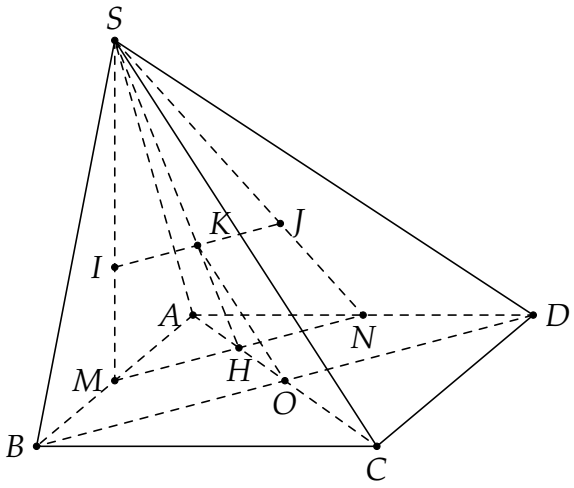
Lời giải.

①

Ta có M, N là trung điểm của các cạnh AB, AD.
Suy ra $MN \parallel BD$, mà $BD \subset (SBD)$.
Nên $MN \parallel (SBD)$.

② Ta có $\dfrac{SI}{SM} = \dfrac{SJ}{SN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$. Hay $IJ \parallel BD$.
Mà $BD \subset (SBD)$. Nên $IJ \parallel (SBD)$.

③ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của MN và AC.
Trong mặt phẳng (SMN) gọi K là giao điểm của IJ và SH.
Dễ thấy H là trung điểm của AO, suy ra $\dfrac{HO}{HC} = \dfrac{1}{3}$.
Lại có $IJ \parallel MN \Rightarrow IK \parallel MH \Rightarrow \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{MI}{SM} = \dfrac{1}{3}$.
Do đó $\dfrac{HK}{HS} = \dfrac{HO}{HC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KO \parallel SC$.
Mà $KO \subset (IJO) \Rightarrow SC \parallel (IJO)$.

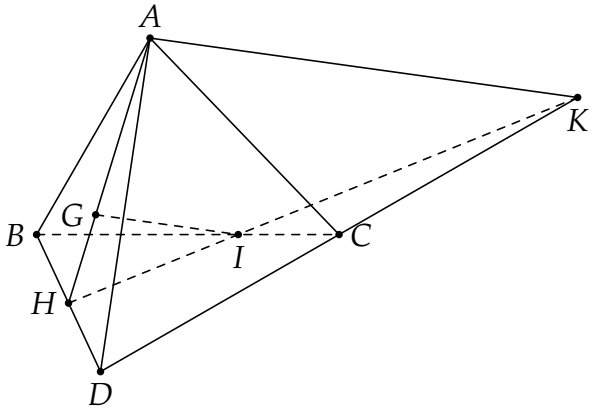


□

BÀI 555. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh $IG \parallel (ACD)$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BD. Trong mặt phẳng (BCD), gọi K là giao điểm của HI và CD.
Theo định lý Menelaus có $\dfrac{BH}{HD} \cdot \dfrac{IC}{BI} \cdot \dfrac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KD}{KC} = 2$.
Suy ra C là trung điểm của KD, suy ra BC là trung tuyến của $\triangle BDK$.
Mà $BI = 2IC$, suy ra I là trọng tâm của $\triangle BDK$.
Suy ra $\dfrac{HI}{HK} = \dfrac{1}{3}$. Lại có G là trọng tâm của $\triangle ABD \Rightarrow \dfrac{HG}{HK} = \dfrac{1}{3}$.
Do đó, $GI \parallel AK$, mà $AK \subset (ACD) \Rightarrow IG \parallel (ACD)$.

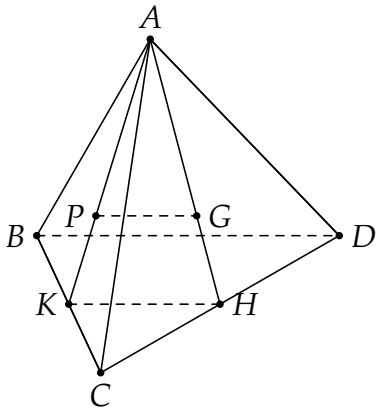


□

BÀI 556. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và P lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và ABC. Chứng minh rằng $GP \parallel (BCD)$, $GP \parallel (ABD)$.

Lời giải.

Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và CD. Suy ra $KH \parallel BD \quad (1)$.
Ta có G, P lần lượt là trọng tâm của $\triangle ACD, \triangle ABC$.
Suy ra $\dfrac{AP}{AK} = \dfrac{2}{3}, \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PG \parallel HK \quad (2)$.
Từ (1) và (2), suy ra $GP \parallel BD$.
Mà $BD \subset (BCD), BD \subset (ABD)$, suy ra $GP \parallel (BCD), GP \parallel (ABD)$.



□

BÀI 557. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA.

① Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

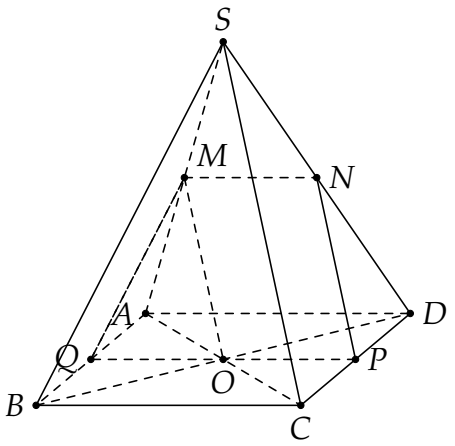
② Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

①

Ta có M, O là trung điểm của SA và AC, suy ra $MO \parallel SC$.
Mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD)$.

② Vì $MO \parallel SC \Rightarrow O \in (\alpha)$.
Ta có $\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ$.
Với $PQ \parallel AD, O \in PQ, Q \in AB, P \in CD$.
Lại có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SCD) \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PN$, với $PN \parallel SC$.
Có $(\alpha) \cap (SAD) = MN, (\alpha) \cap (SAB) = MQ$.
Nhận thấy P, Q là trung điểm của CD và AB. Suy ra N là trung điểm của SD.
Suy ra $MN \parallel PQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

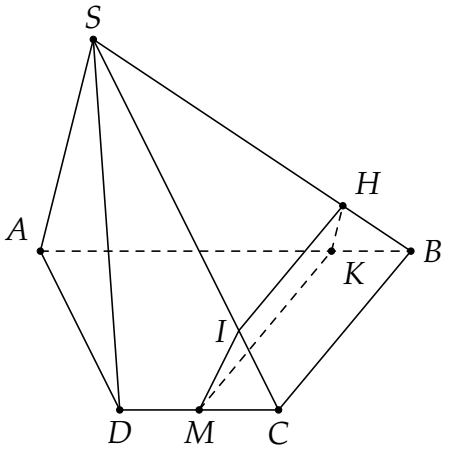


□

BÀI 558. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD, (α) là mặt phẳng qua M, đồng thời song song với SA và BC. Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MK,$
với $MK \parallel BC, K \in AB$.
Có $\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = KH$, với $KH \parallel SA$.
Lại có $\begin{cases} H \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = HI$, với $HI \parallel BC$.
Do đó, $\alpha \cap (SCD) = IM$, mà MK, HI đều song song với BC.
Vậy thiết diện của hình chóp là hình thang $MKHI$.



□

BÀI 559. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

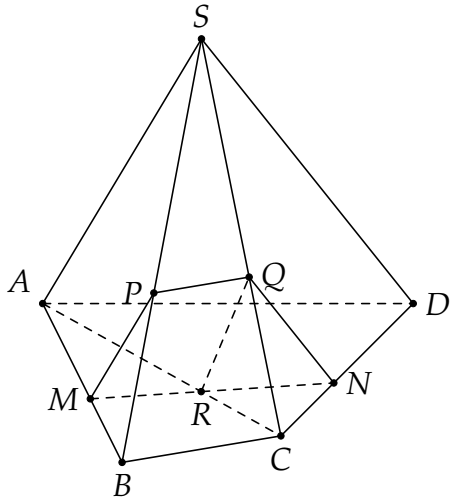
① Tìm thiết diện của (α) với hình chóp.

② Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Lời giải.

①

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$, với $MP \parallel SA$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $R = MN \cap AC$.
Ta có $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$, với $RQ \parallel SA$.
Ta có $(\alpha) \cap (SCD) = QN$. Vậy thiết diện là tứ giác $MNQP$.



② Ta có $MNQP$ là hình thang $\Rightarrow \begin{bmatrix} MP \parallel QN & (1) \\ MN \parallel PQ & (2) \end{bmatrix}$.

Xét (1) ta có $\begin{cases} SA \parallel MP \\ MP \parallel QN \end{cases} \Rightarrow SA \parallel QN$.

Do đó $\begin{cases} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (SCD)$ (vô lý).

Xét (2) ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Ngược lại, nếu $MN \parallel BC$ thì $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN \parallel PQ$.

□

BÀI 560. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

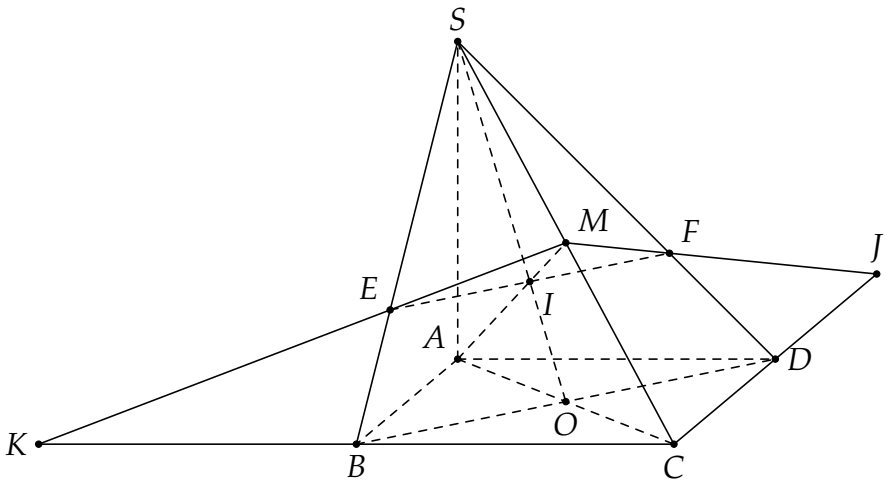
② Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SD. Tìm tỉ số diện tích của $\triangle SME$ với $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SMF$ với $\triangle SCD$.

③ Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao của MF và CD. Chứng minh K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.

①

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $AC \cap BD = O$,
trong mặt phẳng (SAC), gọi $AM \cap SO = I$.
Ta có $\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF$, với $I \in EF, E \in SB, F \in SD$.
Ta có $(P) \cap (SAB) = AE, (P) \cap (SBC) = EM, (P) \cap (SCD) = MF$.
Vậy thiết diện là tứ giác $AEMF$.



② Trong $\triangle SAC$, có I là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{2}{3}$ (1).
Do đó $\dfrac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

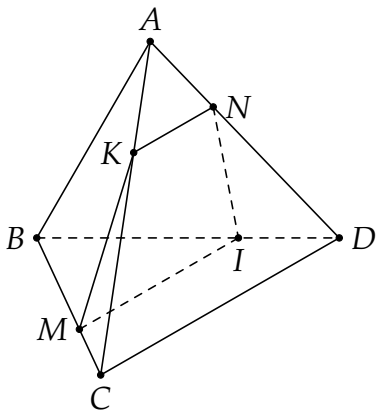
③ Ta có $\begin{cases} (MEF) \cap (ABCD) = AK \\ (MEF) \cap (ABCD) = AJ \end{cases} \Rightarrow K, A, J$ thẳng hàng.
Theo định lý Menelaus, xét $\triangle SBC$ ta có $\dfrac{MS}{MC} \cdot \dfrac{EB}{ES} \cdot \dfrac{KC}{KB} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{KC}{KB} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KC}{KB} = 2$.
Hay B là trung điểm của KC. Tương tự, ta có D là trung điểm của CJ.
Do đó, BD là đường trung bình của $\triangle KCJ \Rightarrow \begin{cases} BD \parallel KJ \\ BD = \dfrac{1}{2} \cdot KJ \quad (2) \end{cases}$.
Mà $BD \parallel EF$. Vậy A, K, J nằm trên đường song song với EF.
Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{EF}{KJ} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

□

BÀI 561. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh BC và AD. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD. Xác định vị trí của hai điểm M, N để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M = (\alpha) \cap (BCD) \\ CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = MI$, với $MI \parallel CD$.



$\begin{cases} N = (\alpha) \cap (ACD) \\ CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = NK$, với $NK \parallel CD$.

Ta có $(\alpha) \cap (ABD) = NI, (\alpha) \cap (ABC) = MK$.

Vậy thiết diện là hình thang $MINK$, (vì $MI \parallel NK$).

Lại có $\begin{cases} MI \parallel CD \\ KN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{MI}{CD} = \dfrac{BM}{CB} \\ \dfrac{KN}{CD} = \dfrac{AN}{AD} \end{cases}$.

Để thiết diện $MINK$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MI = NK \Leftrightarrow \dfrac{BM}{CD} = \dfrac{AN}{AD}$.

Vậy M, N lần lượt là hai điểm nằm trên BC và AD và $\dfrac{BM}{CD} = \dfrac{AN}{AD}$.

□

BÀI 562. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

② Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

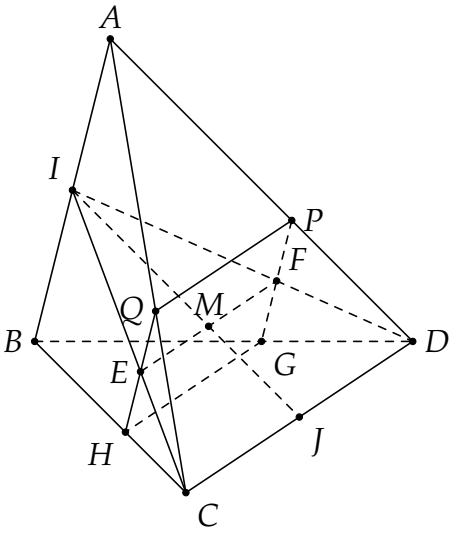
① Gọi $\Delta_1 = (P) \cap (ICD)$, ta có

$\begin{cases} M \in (P) \\ M \in IJ,\ IJ \subset (ICD) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta_1$.

$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \\ (P) \cap (ICD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel CD$.

Vậy Δ_1 là đường thẳng qua M và song song với CD.

Gọi $E = \Delta_1 \cap IC, F = \Delta_1 \cap TD$, ta được $(P) \cap (ICD) = EF$.



② Gọi $\Delta_2 = (P) \cap (ABD)$, ta có

$\begin{cases} F \in (P) \\ F \in ID,\ ID \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow F \in \Delta_2$.

$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ (P) \cap (ABD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel AB$.

Vậy Δ_2 là đường thẳng qua F và song song với AB.

Gọi $G = \Delta_2 \cap BD, P = \Delta_2 \cap AD$, ta được $(P) \cap (ICD) = GP$.

Gọi $\Delta_3 = (P) \cap (ABC)$, ta có

$$\begin{cases} E \in (P) \\ E \in IC,\ IC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta_3.$$

Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \Delta_3 \parallel AB.$$

Vậy Δ_3 là đường thẳng qua E và song song với AB.
Gọi $H = \Delta_3 \cap BC, Q = \Delta_3 \cap AC$, ta được $(P) \cap (ABC) = HQ$.
Giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (BCD), (ABD), (ACD), (ABC) lần lượt là GH, GP, PQ, QH.
Do đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) là tứ giác $HGPQ$.
Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

và

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ (P) \cap (BCD) = HG \end{cases} \Rightarrow HG \parallel CD.$$

Ta có $\begin{cases} HG \parallel PQ \text{ (cùng song song với } CD) \\ HQ \parallel PG \text{ (cùng song song với } AB) \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $HGPQ$ là hình bình hành.

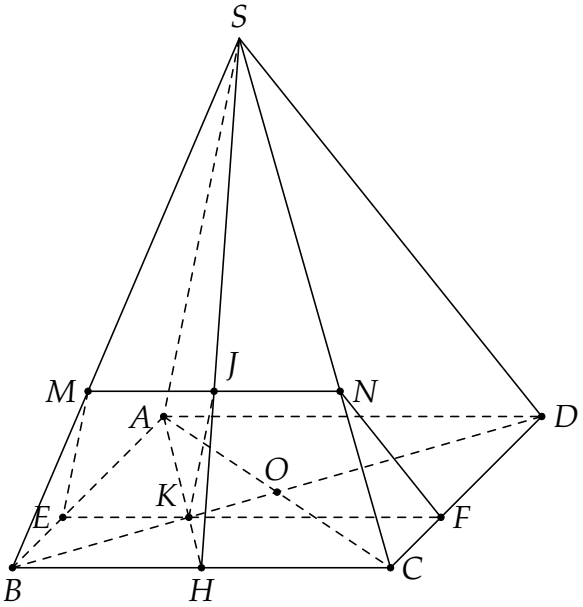
□

BÀI 563. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

① Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

② Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

Lời giải.



① Gọi H là trung điểm BC, theo tính chất trọng tâm ta có $\dfrac{HK}{HA} = \dfrac{HJ}{HS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KJ \parallel SA$ (Định lý Ta-lét đảo). Ta có $\begin{cases} KJ \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \\ KJ \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow KJ \parallel (SAB)$.

② Gọi $\Delta_1 = (P) \cap (ABCD)$, ta có
$\begin{cases} K \in KJ,\ KJ \subset (P) \\ K \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_1.$
$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel AD.$
Vậy Δ_1 là đường thẳng qua K và song song với AD.
Gọi $E = \Delta_1 \cap AB, F = \Delta_1 \cap CD$, ta được $(P) \cap (ABCD) = EF$.

Gọi $\Delta_2 = (P) \cap (SBC)$, ta có

$$\begin{cases} J \in KJ,\ KJ \subset (P) \\ J \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_2.$$

Và

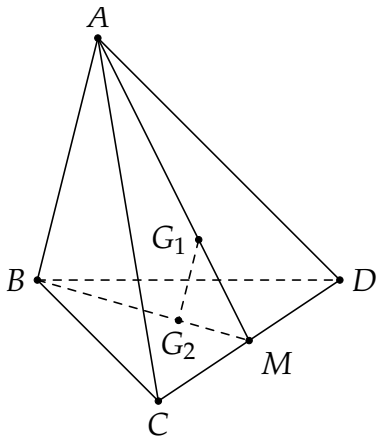
$$\begin{cases} (P) \parallel AD \parallel BC \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel BC.$$

Vậy Δ_2 là đường thẳng qua J và song song với BC.
Gọi $M = \Delta_2 \cap SB, N = \Delta_1 \cap SD$, ta được $(P) \cap (SBC) = MN$.
Ta có giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SCD), (SBC), (SAB) lần lượt là EF, FN, NM, NE, do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNFE$.

□

BÀI 564. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng $G_1G_2 \parallel (ABC)$ và $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

Lời giải.



Xét tam giác ABM ta có

— $\dfrac{MG_2}{MB} = \dfrac{1}{3}$ (G_2 là trọng tâm $\triangle BCD$).

— $\dfrac{MG_1}{MA} = \dfrac{1}{3}$ (G_1 là trọng tâm $\triangle ACD$).

Suy ra $\dfrac{MG_2}{MB} = \dfrac{MG_1}{MA} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ (Định lý Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ G_1G_2 \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC).$

Ta có $\begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ G_1G_2 \not\subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD).$

□

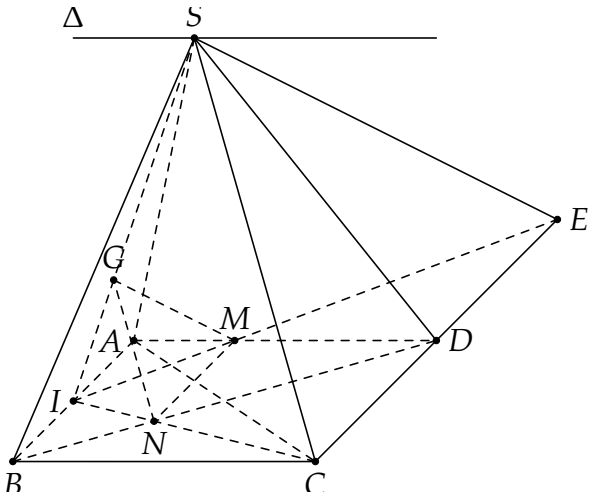
BÀI 565. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAB$, I là trung điểm AB, lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

② Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.

③ Chứng minh $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải.



① Gọi $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$, ta có $S \in \Delta$.

Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ (SAD) \cap (SBC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AD.$

Vậy Δ là đường thẳng qua S và song song với AD.

② Hình thang $AICD$ có $MN \parallel AI \parallel CD$ nên $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).

$\triangle SAB$ có G là trọng tâm nên $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$.

$\triangle ISC$ có $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$ (Định lý Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} NG \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ NG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel (SCD).$

③ Gọi E là giao điểm của IM và CD. Vì $AI \parallel DE$ nên ta có $\dfrac{IM}{ME} = \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$ (Định lý Ta-lét).

Xét $\triangle ASE$ có $\dfrac{IG}{GS} = \dfrac{IM}{ME} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow GM \parallel SE$.

Ta có $\begin{cases} MG \parallel SE \\ SE \subset (SCD) \\ MG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (SCD).$

□

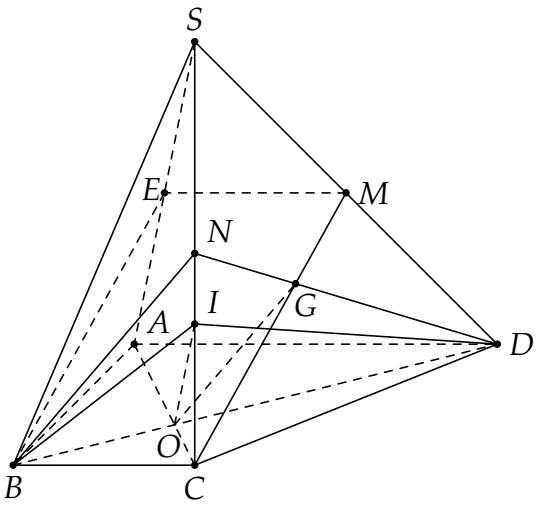
BÀI 566. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

① Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.

② Cho M là trung điểm của SD. Chứng minh $CM \parallel (SAB)$.

③ Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA \parallel (BDI)$.

Lời giải.



① Gọi N là trung điểm SC, vì G là trọng tâm $\triangle SCD$ nên $\dfrac{NG}{GD}=\dfrac{1}{2}$.
Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow \dfrac{BO}{OD}=\dfrac{CO}{AO}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$ (Định lí Ta-lét).
$\triangle BND$ có $\dfrac{NG}{GD}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow OG \parallel BN$ (Định lí Ta-lét đảo).
Ta có $\begin{cases} OG \parallel BN \\ BN \subset (SBC) \\ OG \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OG \parallel (SBC)$.

② Gọi E là trung điểm của SA, theo tính chất đường trung bình ta có $ME \parallel AD$ và $ME=\dfrac{1}{2}AD$.
$\begin{cases} ME=BC=\dfrac{1}{2}AD \\ ME \parallel BC\,(\parallel AD) \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $MEBC$ là hình bình hành.
Suy ra $CM \parallel BE$.
Ta có $\begin{cases} CM \parallel BE \\ BE \subset (SAB) \\ CM \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \parallel (SAB)$.

③ Ta có $2SC=3SI \Leftrightarrow 2SI+2IC=3SI \Leftrightarrow SI=2IC$.
Xét $\triangle SAC$ có $\dfrac{CI}{IS}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow OI \parallel SA$ (Định lí Ta-lét đảo).
Ta có $\begin{cases} SA \parallel BI \\ BI \subset (BDI) \\ AB \not\subset (BDI) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (BDI)$.

□

BÀI 567. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB.

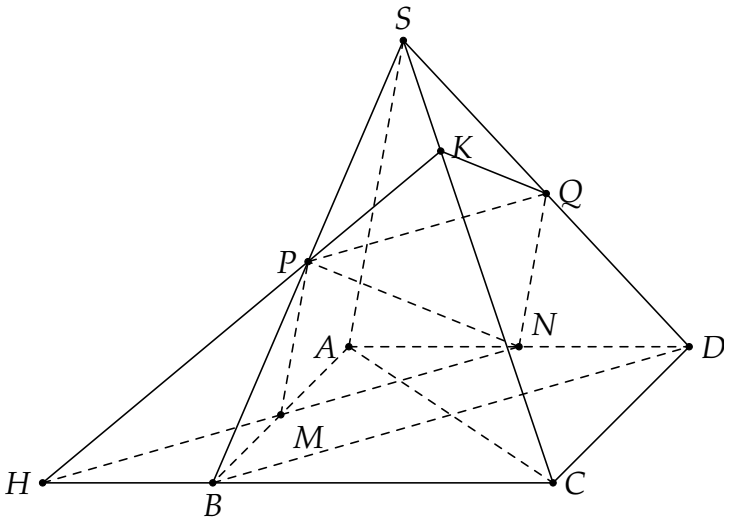
① Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

② Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

③ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

④ Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).

Lời giải.



① $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN = \dfrac{1}{2}BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \Rightarrow BD \parallel (MNP). \\ BD \not\subset (MNP) \end{cases}$

② Trong $(ABCD)$, dựng $H = MN \cap BC$, ta có

$$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC.$$

③ Gọi $\Delta = (MNP) \cap (SBD)$, ta có $\begin{cases} P \in (SBD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in \Delta$.

Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \Rightarrow \Delta \parallel MN. \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases}$$

Vậy Δ là đường thẳng qua P và song song với MN.
Gọi $Q = \Delta \cap SD$, ta được $(MNP) \cap (SBD) = PQ$.

④ Trong (SBC), dựng $K = HP \cap SC$. Giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB), (SBC) lần lượt là MN, PM, PK, KQ, QN. Vậy thiết diện của hình chóp với (MNP) là ngũ giác $PMNQK$.

□

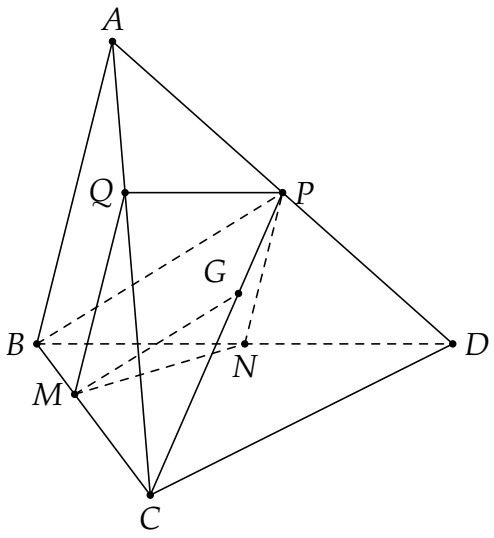
BÀI 568. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt trung điểm của BD và AD.

① Chứng minh $NP \parallel (ABC)$.

② Tìm giao điểm Q của AC với (MNP) và tính $\dfrac{QA}{QC}$. Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP).

③ Chứng minh $MG \parallel (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD.

Lời giải.



① $\triangle ABD$ có NP là đường trung bình nên $NP \parallel AB$ và $NP = \dfrac{1}{2}AB$.

Ta có $\begin{cases} NP \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel (ABC)$.

② Gọi $\Delta = (MNP) \cap (ABC)$, ta có

$\begin{cases} M \in (SBD) \\ M \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta$.

$\begin{cases} NP \parallel (ABC) \\ NP \subset (MNP) \\ (MNP) \cap (ABC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB$.

Vậy Δ là đường thẳng qua M và song song với AB.

Trong (ABC) dựng $Q = \Delta \cap AC$, ta có

$\begin{cases} Q \in AC \\ Q \in \Delta,\ \Delta \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = AC \cap (MNP)$.

Ta có $MC = 2MB \Leftrightarrow MC + MB = 3MB \Leftrightarrow BC = 3MB \Leftrightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $QM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD), (BCD) lần lượt là QM, QP, PN, MN. Vậy thiết diện cùa hình chóp bị cắt bởi (MNP) là tứ giác $MNPQ$.

③ Vì G là trọng tâm $\triangle ACD$ nên $\dfrac{PG}{PC} = \dfrac{1}{3}$.

Xét $\triangle BCP$ có $\dfrac{PG}{PC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MG \parallel BP$ (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} MG \parallel BP \\ BP \subset (ABD) \\ MG \not\subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (ABD)$.

□

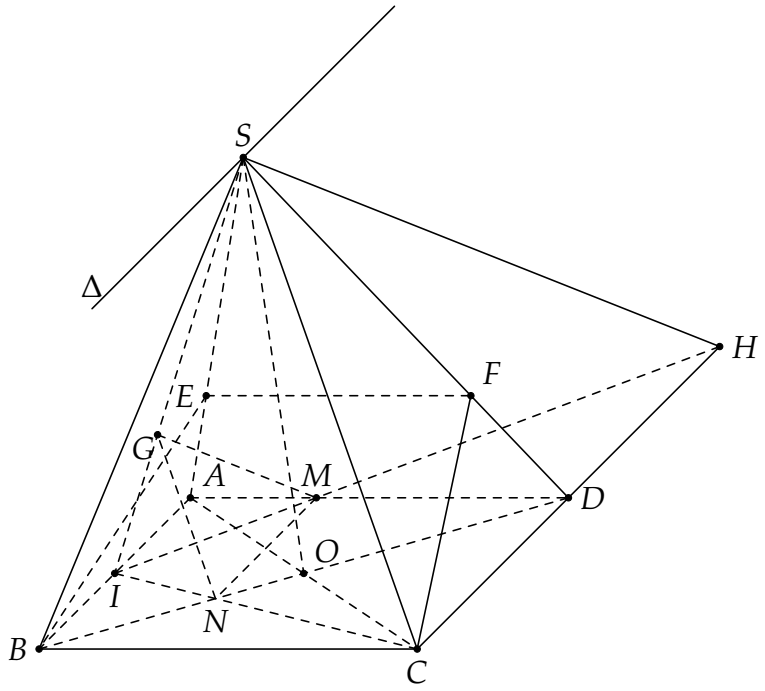
BÀI 569. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

① Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD); (SAB) và (SCD).

② Một mặt phẳng qua BC và song song với AD cắt SA tại E, $(E \neq S, E \neq A)$, cắt SD tại F, $(F \neq S, F \neq D)$. Tứ giác $BEFC$ là hình gì?

③ Gọi M thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AM$ và G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm AB. Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$ và $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải.



① Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$
Trong $(ABCD)$, dựng $O = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} O \in AC,\ AC \subset (SAC) \\ O \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD).$$

Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Gọi $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$, ta có $S \in \Delta$

Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ (SAB) \cap (SCD) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB.$

Vậy Δ là đường thẳng qua S và song song với AB.

② Ta có

$$\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \subset (BCFE) \\ AD \subset (SAD) \\ (BCFE) \cap (SAD) = EF \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AD \parallel BC.$$

Vậy tứ giác $BCFE$ là hình thang.

③ Xét hình thang $AICD$ có $MN \parallel AI \Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).
Vì G là trọng tâm tam giác SAB nên $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$.
Xét $\triangle ISC$ ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN \parallel SC \text{ (Định lí Ta-lét đảo).}$$

Ta có

$$\begin{cases} GN \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ NG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel (SCD).$$

Trong $(ABCD)$, dựng $H = IM \cap CD$. Vì $AI \parallel DM$ nên ta có $\dfrac{IM}{IH} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).
Xét $\triangle ISH$ ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IM}{IH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GM \parallel SH \text{ (Định lí Ta-lét đảo).}$$

Ta có

$$\begin{cases} MG \parallel SH \\ SH \subset (SCD) \\ MG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (SCD).$$

□

BÀI 570. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

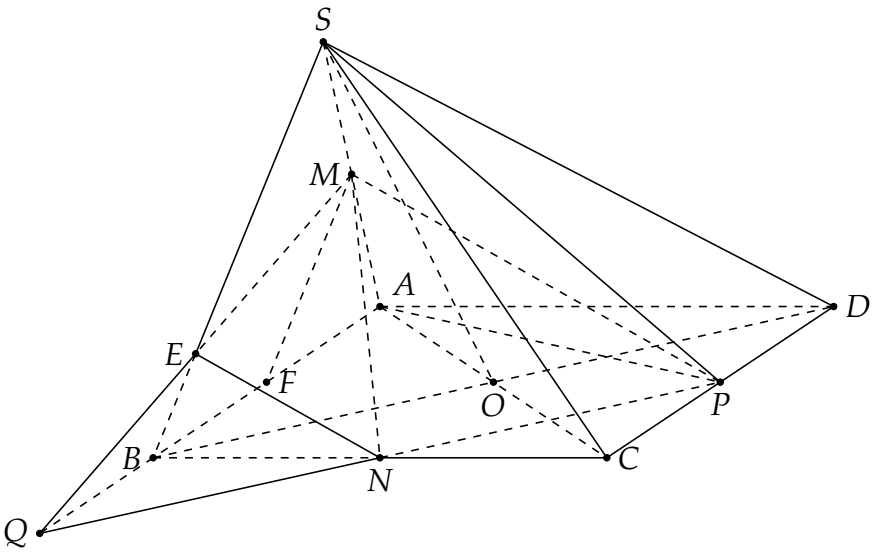
① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

③ Tìm giao điểm E của SB và (MNP).

④ Chứng minh $NE \parallel (SAP)$.

Lời giải.



① Ta có $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BC \subset (SBD). \end{cases}$
Do đó O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
mà S là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

② Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \text{ và } Sx \parallel CD.$

③ Gọi $Q = NP \cap AB \Rightarrow Q$ là điểm chung của (SAB) và (MNP)
mà M là điểm chung thứ hai nên $(SAB) \cap (MNP) = MQ$.
Trong mặt phẳng (SAB) gọi $E = MQ \cap SB$.
Ta có $\begin{cases} E \in SB \\ E \in MQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = SB \cap (MNP).$

④ Ta có N là trung điểm của BC và $BQ \parallel CP$ nên $BQ = CP$ và $NQ = NP$ (1).
Gọi F là trung điểm của AB, ta có $AF = BF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = CP = BQ$.
Ta có M, F là trung điểm của SA và AB nên MF là đường trung bình tam giác SAB nên $MF \parallel SB$.
Trong tam giác QMF có B là trung điểm QF và $BE \parallel MF$ nên E là trung điểm MQ (2).
Từ (1) và (2) ta có EN là đường trung bình tam giác $QMP \Rightarrow EN \parallel MP$.
Mặt khác, do $MP \subset (SAP)$ nên $NE \parallel (SAP)$.

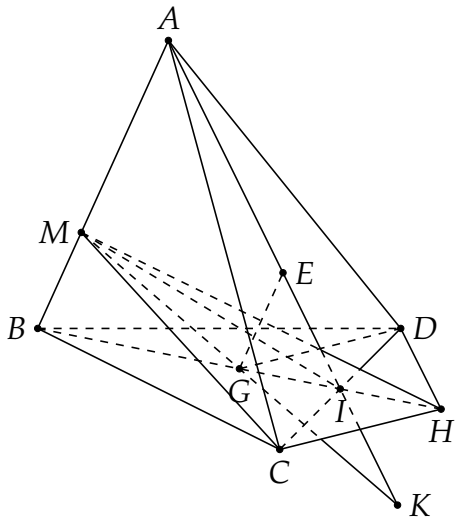
□

BÀI 571. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sau cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

① Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

② Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}$.

Lời giải.



① Ta có $IC = ID$ và $IG = IH$ nên $GDHC$ là hình bình hành.
Do đó $GD \parallel CH$
mà $CH \subset (MCH)$ nên $GD \parallel (MCH)$.

② Trong mp(ABI), gọi $K = AI \cap MG$, ta có
$\begin{cases} K \in AI \subset (ACD) \\ K \in MG \end{cases}$
$\Rightarrow K = MG \cap (ACD)$.
Trong mp(ABI), kẻ $GE \parallel AB$, $(E \in AI)$.
Xét tam giác ABI, có $GE \parallel AB$, suy ra $\dfrac{GE}{AB} = \dfrac{IG}{IB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2}$.
Xét tam giác AKM, có $GE \parallel AM$, suy ra $\dfrac{KG}{KM} = \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{GK}{GM} = 1$.

□

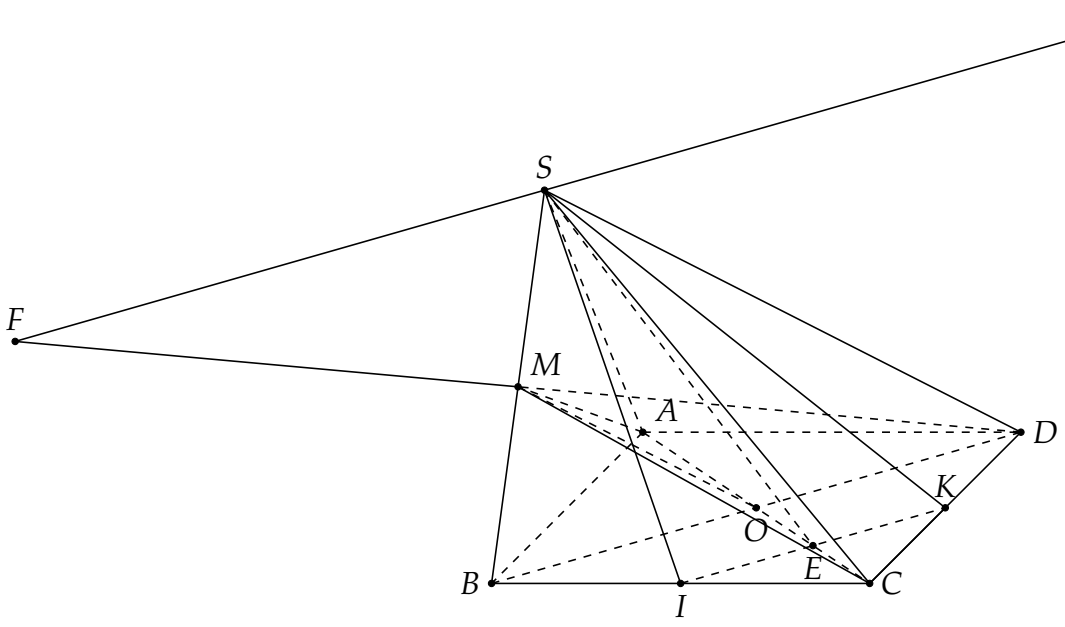
BÀI 572. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

① Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

② Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.

③ Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.

Lời giải.



① — Ta có $S \in (SIK) \cap (SAC)$.

Trong mp$(ABCD)$, gọi $E = IK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (SIK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SIK) \cap (SAC)$.

Suy ra $SE = (SIK) \cap (SAC)$.

— Ta có $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \in (SBD), IK \in (SIK), BD \parallel IK \end{cases} \Rightarrow (SIK) \cap (SBD) = Sx$, (với $Sx \parallel BD \parallel IK$).

② Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SD \parallel MO$. Mà $MO \subset (ACM)$, suy ra $SD \parallel (ACM)$.

③ — Trong mp(SBD), gọi $F = Sx \cap DM \Rightarrow \begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$.

— Ta có $SF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MF}{MD} = \dfrac{MS}{MB} = 1$.

□

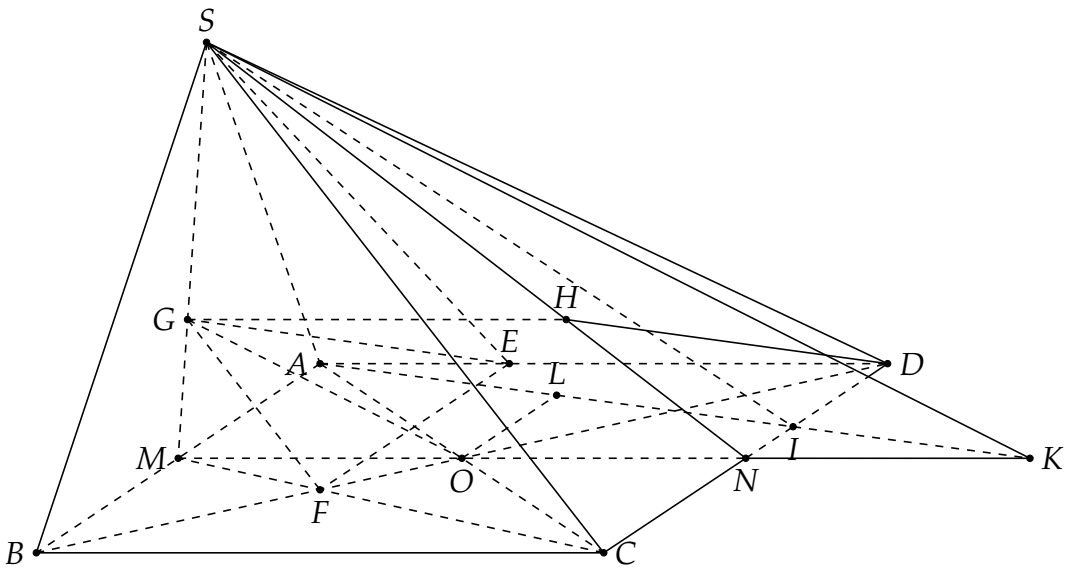
BÀI 573. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB.

① Chứng minh $EG \parallel (SCD)$.

② Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F. Chứng minh $GF \parallel (SCD)$.

③ Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh $GO \parallel (SAI)$.

Lời giải.



① Gọi H là trọng tâm tam giác SCD, ta có $GH \parallel MN$ và $\dfrac{GH}{MN} = \dfrac{2}{3}$.
Lại có $ED \parallel MN$ và $\dfrac{ED}{MN} = \dfrac{ED}{AD} = \dfrac{2}{3}$.
Suy ra $GH \parallel ED$ và $GH = ED$. Suy ra $GHDE$ là hình bình hành.
Ta có $\begin{cases} EG \parallel DH \\ DH \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow EG \parallel (SCD)$.

② Ta có $MA \parallel EF \parallel CD$, suy ra $\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{3}$.
Xét tam giác MSC có $\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{MG}{MS} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $GF \parallel SC$.
Mà $SC \subset (SCD)$. Vậy $GF \parallel (SCD)$.

③ Trong mp$(ABCD)$, gọi $K = AI \cap MN$. Ta có $SK = (SMN) \cap (SAI)$.
Gọi L là trung điểm của AI, ta có OL là đường trung bình của hình thang $AMNI$, suy ra

$$OL = \frac{AM + NI}{2} = \frac{AM + \dfrac{CD}{6}}{2} = \frac{AM + \dfrac{AB}{6}}{2} = \frac{AM + \dfrac{AM}{3}}{2} = \frac{2AM}{3} \Rightarrow \frac{OL}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác AKM, có $OL \parallel AM$, suy ra $\dfrac{KO}{KM} = \dfrac{OL}{AM} = \dfrac{2}{3}$.
Xét tam giác SMK, có $\dfrac{SG}{SM} = \dfrac{KO}{KM} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $GO \parallel SK$.
Mà $SK \subset (SAI)$. Vậy $GO \parallel (SAI)$.

□

BÀI 574. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC.

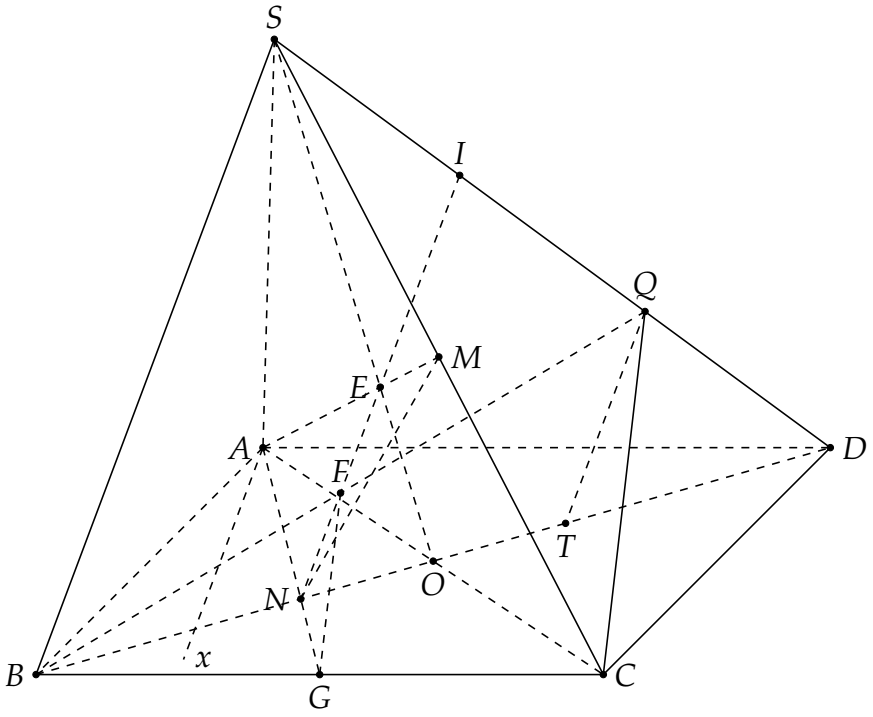
① Chứng minh $SB \parallel (AMN)$.

② Tìm giao tuyến (AMN) và (SAB).

③ Tìm giao điểm I của SD với (AMN). Tính tỉ số $\dfrac{IS}{ID}$.

④ Gọi Q là trung điểm của ID. Chứng minh $QC \parallel (AMN)$.

Lời giải.



① Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
Trong mp(SAC), gọi $E = AM \cap SO$, ta có E là trọng tâm tam giác SAC. Suy ra $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{1}{3}$.
Ta có N là trọng tâm tam giác ABC nên $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$.
Xét tam giác OSB có $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $NE \parallel SB$.
Mà $NE \subset (AMN)$. Vậy $SB \parallel (AMN)$.

② Ta có $\begin{cases} A \in (SAB) \cap (AMN) \\ SB \subset (SAB), SB \parallel (AMN) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (AMN) = Ax$, (với $Ax \parallel SB$).

③ Trong mp(SBD), gọi $I = NE \cap SD \Rightarrow \begin{cases} I \in NE \subset (AMN) \\ I \in SD \end{cases} \Rightarrow I = SD \cap (AMN)$.

Ta có $NE \parallel SB \Rightarrow NI \parallel SB \Rightarrow \dfrac{IS}{ID} = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{BN}{BD - BN} = \dfrac{\dfrac{2BO}{3}}{2BO - \dfrac{2BO}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

④ Trong mp(SBD), gọi $F = NE \cap BQ$.
Trong mp$(ABCD)$, gọi $G = AN \cap BC$, vì N là trọng tâm tam giác ABC nên G là trung điểm của BC.
Ta có $FG = (AMN) \cap (BQC)$.
Kẻ $QT \parallel FN$, $(T \in BD)$. (1)
Xét tam giác DNI có $QT \parallel NI$, suy ra $\dfrac{NT}{DN} = \dfrac{IQ}{DI} = \dfrac{1}{2}$
Mà $\dfrac{BN}{ND} = \dfrac{1}{2}$ nên $BN = NT$, hay N là trung điểm của BT. (2)
Từ (1) và (2), ta có F là trung điểm của BQ.

Do đó GF là đường trung bình của tam giác BQC. Suy ra $QC \parallel GF$.
Mà $GF \subset (AMN)$. Vậy $QC \parallel (AMN)$.

□

BÀI 575. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.

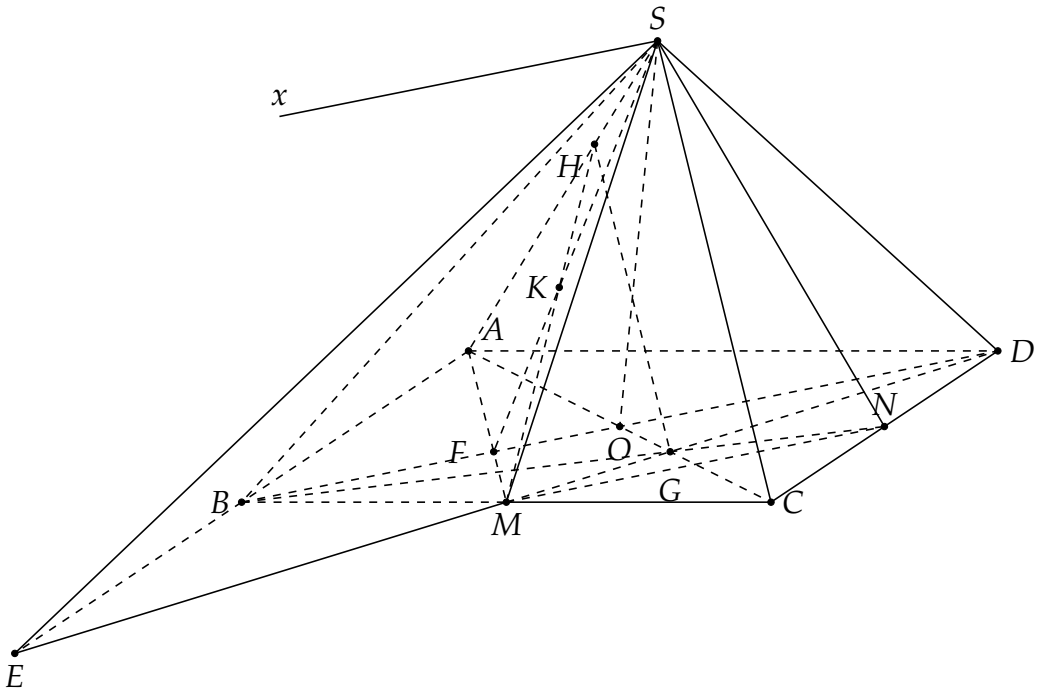
① Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB).

② Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD).

③ Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{KH}{KM}$.

④ Gọi G là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $HG \parallel (SBC)$.

Lời giải.



① Trong mp$(ABCD)$, gọi $E = MD \cap AB \Rightarrow \begin{cases} E \in MD \subset (SMD) \\ E \in AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow E \in (SMD) \cap (SAB)$.
mà $S \in (SAB) \cap (SMD) \Rightarrow SE = (SAB) \cap (SMD)$.

② Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (SMN), BD \subset (SBD) \\ S \in (SMN) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \cap (SBD) = Sx \parallel BD \parallel MN$.

③ Trong mp$(ABCD)$, gọi $F = AM \cap BD$.
Trong mp(SAM), gọi $K = MH \cap SF \Rightarrow \begin{cases} K \in SF \subset (SBD) \\ K \in MH \end{cases} \Rightarrow K = MH \cap (SBD)$.

④ Trong tam giác BCD, BN và DM là hai trung tuyến nên G là trọng tâm. Từ đó ta có $\dfrac{GC}{CO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{GC}{AC} = \dfrac{1}{3}$.
Mặt khác, do $HA = 2HS$ nên $\dfrac{HS}{SA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GC}{AC} = \dfrac{HS}{SA} \Rightarrow HG \parallel SC \Rightarrow HG \parallel (SBC)$.

□

BÀI 576. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

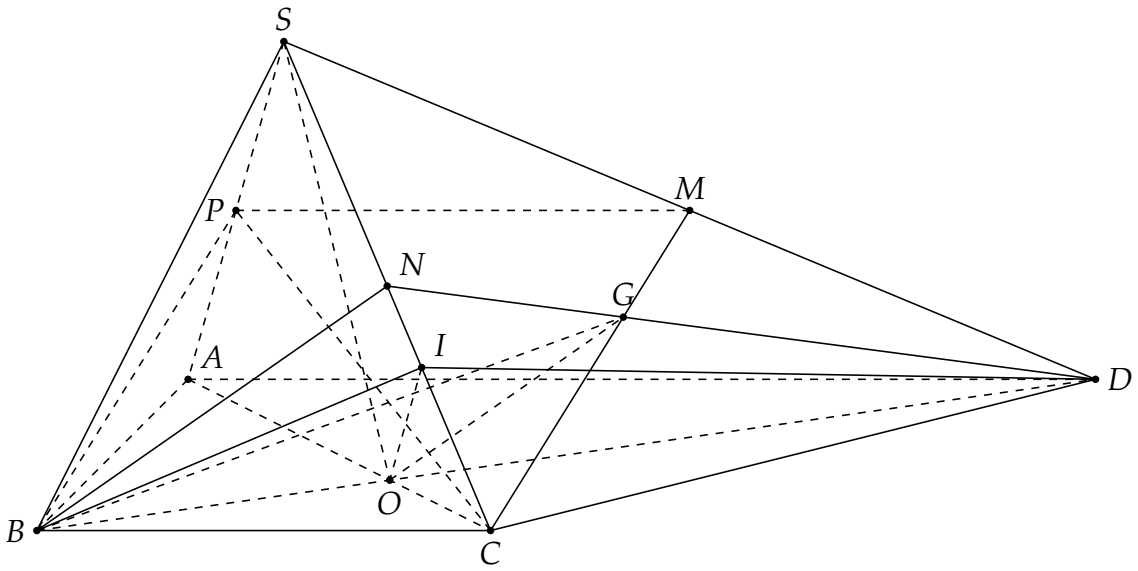
① Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.

② Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh $CM \parallel (SAB)$.

③ Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA \parallel (BID)$.

④ Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\dfrac{KB}{KG}$.

Lời giải.



① Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = 2$.
Mặt khác, gọi N là trung điểm SC. Vì G là trọng tâm $\triangle SCD$ nên $\dfrac{GD}{GN} = 2$
$\Rightarrow \dfrac{GD}{GN} = \dfrac{OD}{OB} \Rightarrow OG \parallel BN \Rightarrow OG \parallel (SBC)$.

② Gọi P là trung điểm SA, ta có ngay PM là đường trung bình của $\triangle SAD$.
Suy ra $PM = \dfrac{AD}{2} = BC$ và $PM \parallel AD \parallel BC$. Do đó $PMCB$ là hình bình hành.
Vậy $CM \parallel BP \Rightarrow CM \parallel (SAB)$.

③ Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = 2$.
Mặt khác, vì $2SC = 3SI$ nên $\dfrac{SI}{IC} = 2 \Rightarrow \dfrac{SI}{IC} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow OI \parallel SA \Rightarrow SA \parallel (BID)$.

④ Trong mp$(BCMP)$, gọi $K = BG \cap CP$
mà $CP \in (SAC) \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$.
Ta lại có $CG \parallel BP \Rightarrow \dfrac{KB}{KG} = \dfrac{BP}{CG} = \dfrac{CM}{CG} = \dfrac{3}{2}$.

□

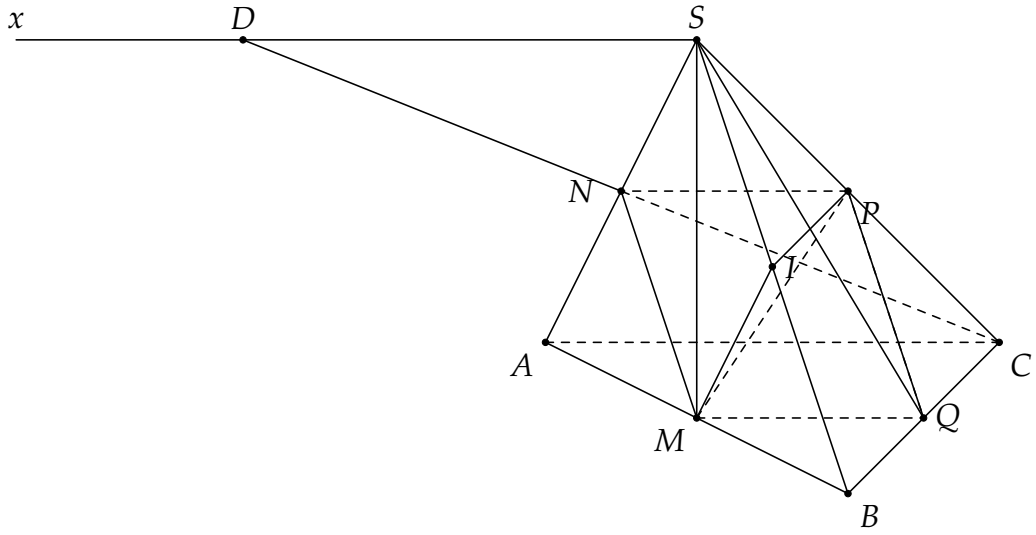
BÀI 577. Cho hình chóp $S.ABC$ Gọi M, P, I lần lượt là trung điểm của AB, SC, SB. Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q.

① Chứng minh $BC \parallel (IMP)$.

② Xác định thiết diện của (α) với hình chóp. Thiết diện này là hình gì?

③ Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ).

Lời giải.



① Ta có IP là đường trung bình của tam giác SBC nên $IP \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (IMP)$.

② Ta có (α) cắt BC tại Q nên $(\alpha) \cap (SBC) = PQ$ và $(\alpha) \cap (ABC) = MQ$.
Ta lại có (α) cắt SA tại N nên $(\alpha) \cap (SAB) = MN$ và $(\alpha) \cap (SAC) = PN$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.
Mặt khác, do $\begin{cases} (\alpha) \parallel AC \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC \Rightarrow Q$ là trung điểm BC.
Tương tự ta chứng minh được $NP \parallel AC$ và N là trung điểm SA.
Lúc này NP và MQ là đường trung bình tam giác SAC và ABC nên $NP = MQ = \dfrac{AC}{2}$ và $NP \parallel MQ$.
Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

③ Ta có $\begin{cases} AC \parallel MQ \\ AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \\ S \in (SAC) \cap (SMQ) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sx \parallel AC$.
Trong mp(SAC), gọi $D = CN \cap Sx$. Ta có $D \in Sx \subset (SMQ)$ và $D \in CN$ nên $D = CN \cap (SMQ)$.

□

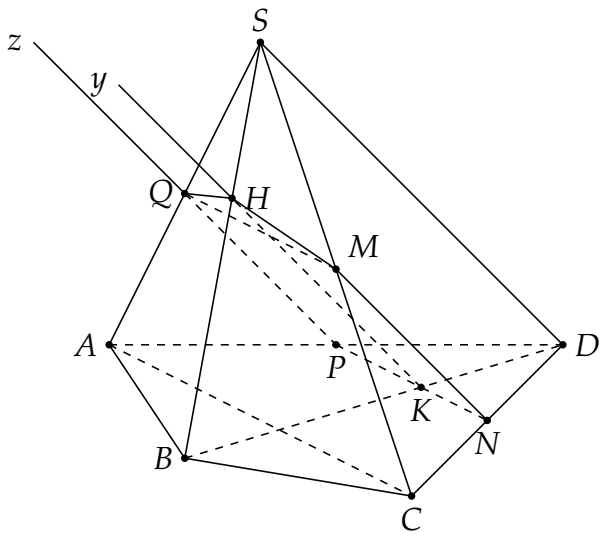
BÀI 578. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC.

① Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.

② Tìm giao điểm của SB và (α).

③ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABCD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Nx \parallel AC$. Gọi $P = Nx \cap AD$ ta có $(\alpha) \cap (ABCD) = NP$.

② Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $SD \parallel MN \Rightarrow SD \Rightarrow SD \parallel (\alpha)$.
Gọi $K = NP \cap BD$, ta có $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SBD) \\ K \in (\alpha) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Ky \parallel SD$. Gọi $H = Ky \cap SB$.
Ta có $H \in Ky \subset (\alpha)$ và $H \in SB \Rightarrow H = SB \cap (\alpha)$.

③ Ta có $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SAD) \\ P \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Pz \parallel SD$. Gọi $Q = Pz \cap SA$.
(α) và (SAB) có H, Q là điểm chung nên giao tuyến là QH.
(α) và (SAD) có P, Q là điểm chung nên giao tuyến là PQ.
(α) và $(ABCD)$ có P, N là điểm chung nên giao tuyến là PN.
(α) và (SCD) có M, N là điểm chung nên giao tuyến là MN.
(α) và (SBC) có H, M là điểm chung nên giao tuyến là HM.
Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPQH$.

□

BÀI 579. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I, lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA.

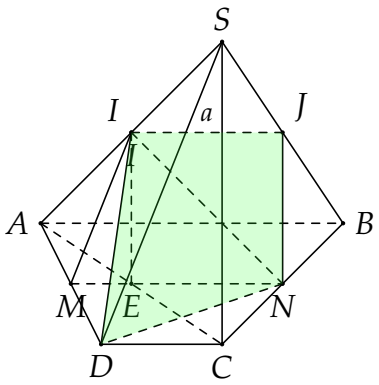
① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).

② Tìm giao điểm của SB và (IMN).

③ Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).



(a) Tìm giao tuyến của (IMN) và (SAC).
Ta có $I \in (SAC) \cap (IMN)$.
Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (SAC) \cap (IMN)$.
Vậy $IE = (IMN) \cap (SAC)$.

(b) Ta có $I \in (IMN) \cap (SAB)$ và MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN \parallel AB$. Nên giao tuyến của (IMN) và (SAB) là đường thẳng a đi qua I song song với AB.

② Ta thấy $SB \subset (SAB)$ và $a = (IMN) \cap (SAB)$. Gọi $J = SB \cap a$, vậy $J = SB \cap (IMN)$.

③ Ta thấy

$$IJ = (SAB) \cap (IDN),\ ID = (SAD) \cap (IDN),\ DN = (ABCD) \cap (IDN),\ NJ = (SBC) \cap (IDN).$$

Vậy thiết diện của (IDN) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $IJND$.

□

BÀI 580. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$; I là trung điểm của AB.

① Chứng minh $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

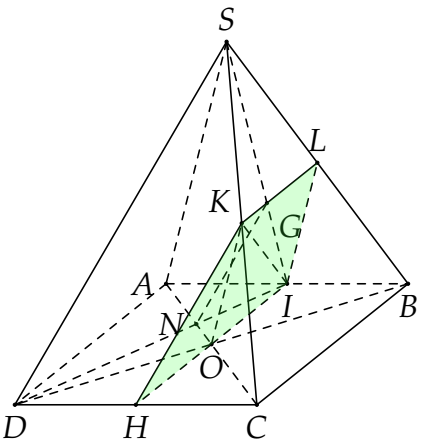
② Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O, song song với SA và BC. Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp.

Lời giải.

① Chứng minh $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

(a) Chứng minh $OI \parallel (SAD)$.
Ta có $OI \parallel BC$ (OI là đường trung bình trong $\triangle ABC$) nên $OI \parallel AD$ (vì $AD \parallel BC$) mà $AD \subset (SAD)$ suy ra $OI \parallel (SAD)$.

(b) Chứng minh $GN \parallel SD$.
Do $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{AO} = \dfrac{2}{3}$ suy ra N là trọng tâm $\triangle ABD$. Từ đó ta có $\dfrac{IN}{ID} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IG}{IS} \Rightarrow GN \parallel SD$.



② Xác định giao điểm $L = SB \cap (\alpha)$.
Ta thấy (α) là (KIH) với H, K lần lượt là trung điểm CD, SC. Ta thấy $SB \subset (SBC)$, $K = (\alpha) \cap (SBC)$ và $IH \parallel BC$ nên giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng d đi qua K song song với BC. Khi đó $L = d \cap SB$ suy ra L là trung điểm SB.
Ta thấy

$$(\alpha) \cap (ABCD) = HI,\ (\alpha) \cap (SBC) = KL,\ (\alpha) \cap (SAB) = LI.$$

Vậy thiết diện của (α) với hình chóp là hình thang $LKHI$.

□

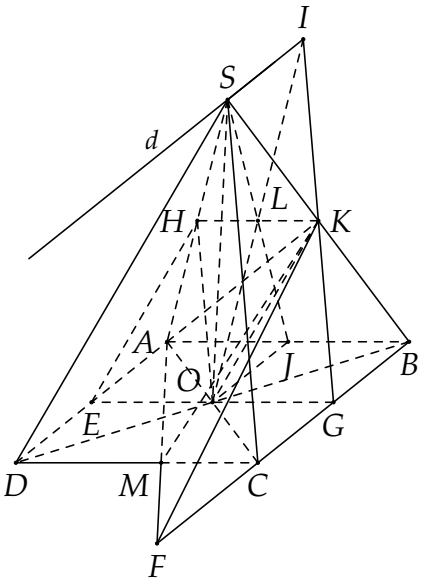
BÀI 581. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và M là điểm thuộc cạnh CD, (M khác C và D).

① Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

② Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?

③ Gọi L là trung điểm đoạn HK. Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh $SI \parallel BC$.

Lời giải.



① Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

— Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC).
Ta có $K \in (KAM) \cap (SBC)$. Trong $(ABCD)$ gọi $F = AM \cap BC$, nên $F \in (KAM) \cap (SBC)$. Suy ra $KF = (KAM) \cap (SBC)$.

— Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD).
Ta thấy $S \in (SBC) \cap (SAD)$, mà $BC \parallel AD$ nên giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S song song với AD và BC.

② Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?
Ta thấy (HKO) và $(ABCD)$ chứa có chung điểm O và lần lượt chứa HK và AB song song với nhau nên giao tuyến là đường thẳng a đi qua O song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và G. Ta thấy
$(HKO) \cap (ABCD) = EG$, $(HKO) \cap (SAD) = HE$,
$(HKO) \cap (SAB) = HK$, $(HKO) \cap (SBC) = KG$. Vậy thiết diện của (HKO) và hình chóp là hình thang $HKGE$ do $HK \parallel AB$ mà $AB \parallel EG$ nên $HK \parallel EG$.

③ Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh $SI \parallel BC$.
Trong $(HKGE)$ gọi $I = OL \cap GK$
mà $GK \subset (SBC) \Rightarrow I \in OL \cap (SBC)$.
Trong (SAB) gọi $J = SL \cap AB$ khi đó L là trung điểm của AB do $HK \parallel AB$.
Xét (SJO) và (SBC) ta thấy có S là điểm chung và $OJ \parallel BC$ nên giao tuyến là đường thẳng đi d đi qua S và song song với BC. Mặt khác $I \in (SJO) \cap (SBC)$ nên $SI \equiv d$. Vậy $SI \parallel BC$.

□

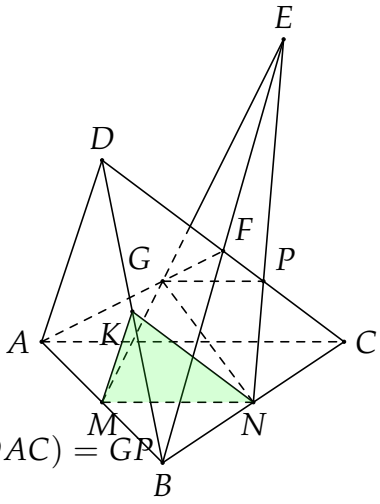
BÀI 582. Cho tứ diện $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC và G là trọng tâm của tam giác ACD.

① Tìm giao điểm E của MG và (BCD).

② Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh $GP \parallel (ABC)$.

③ Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AD. Tìm thiết diện của (α) với tứ diện.

Lời giải.



① Tìm giao điểm E của MG và (BCD).
Ta thấy (ABF) chứa MG với F là trung điểm của DC và $BF = (ABF) \cap (BCD)$. Gọi $E = MG \cap BF \Rightarrow E = MG \cap (BCD)$.

② Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh $GP \parallel (ABC)$.
Ta có $N \in (BCD) \cap (MNG)$ và $E \in MG \subset (MNG)$; $E \in BF \subset (BCD)$. Suy ra $d \equiv NE = (MNG) \cap (BCD)$.
Ta thấy

$$(ABC) \cap (EMN) = MN,\ (DAC) \cap (ABC) = AC,\ (EMN) \cap (DAC) = GP$$

mà $MN \parallel AC$ nên $GP \parallel AC \Rightarrow GP \parallel (ABC)$.

③ Gọi K là trung điểm của BD, do (α) chứa MN và song song với AD nên (α) đi qua K. Ta thấy

$$(\alpha) \cap (ABD) = NK,\ (\alpha) \cap (ABC),\ (\alpha) \cap (BCD) = KN.$$

Vậy thiết diện của (α) và hình chóp là tam giác MNK.

□

BÀI 583. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa mãn $3MA = 2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

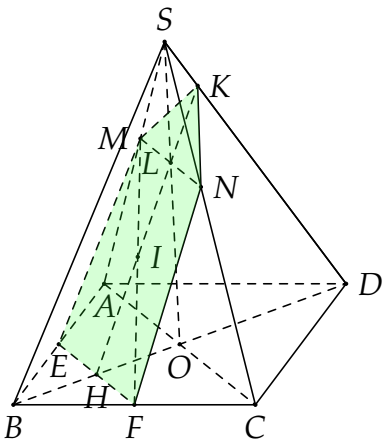
① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

② Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

③ Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{IM}{IF}$.

④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).
Ta thấy $M \in (MEF) \cap (SAC)$ và $EF \parallel AC$ với $EF \subset (MEF)$, $AC \parallel (SAC)$ nên giao tuyến của (MEF) và (SAC) là đường thẳng d đi qua M song song với AC.

② Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.
Ta thấy $SD \subset (SBD)$, gọi $H = EF \cap BD$, $O = AC \cap BD$, $L = d \cap SO$. Khi đó $HL = (MEF) \cap (SBD)$, gọi $K = HL \cap SD \Rightarrow K = SD \cap (MEF)$.
Do $ML \parallel AC$ nên $\dfrac{MA}{MS} = \dfrac{LO}{LS} = \dfrac{3}{2}$.
Xét tam giác SOD trong (SBD) vì K, L, H thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta có $\dfrac{SK}{KD} \cdot \dfrac{HD}{HO} \cdot \dfrac{LO}{LS} = 1 \Rightarrow \dfrac{SK}{KD} \cdot 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{SK}{KD} = \dfrac{2}{9}$.

③ Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{IM}{IF}$.
Trong (MEF) gọi $I = HL \cap MF$ mà $HL \subset (SBD) \Rightarrow I = MF \cap (SBD)$.
Do $ML \parallel AC$ và $EF \parallel AC$ nên $ML \parallel EF$. Từ đó ta suy ra $\dfrac{IM}{IF} = \dfrac{ML}{HF} = \dfrac{HL}{AO} : \dfrac{HF}{AO} = \dfrac{2}{5} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}$.

④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$.
Gọi $N = ML \cap SC$. Ta thấy $(MEF) \cap (SAB) = EM$, $(MEF) \cap (ABCD) = EF$, $(MEF) \cap (SAD) = MK$, $(MEF) \cap (SCD) = KN$, $(MEF) \cap (SBC) = NF$. Vậy thiết diện của (MEF) với hình chóp là ngũ giác $EMKNF$.

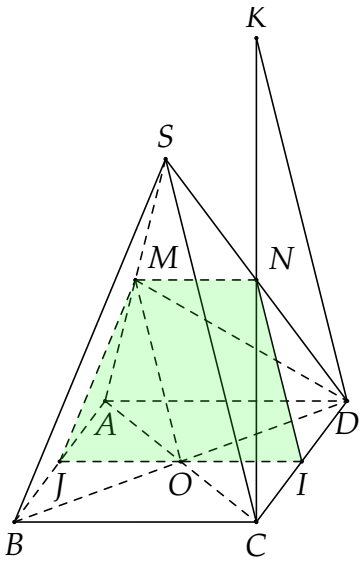
□

BÀI 584. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, SD.

① Xác định giao điểm của NC và (OMD).

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.

Lời giải.



① Xác định giao điểm của NC và (OMD).
Ta thấy $CN \subset (SCD)$, $OM \parallel SC$ mà $OM \subset (OMD)$, $SC \subset (SCD)$ và $O \in (OMD) \cap (SCD)$ nên giao tuyến của (OMD) và (SCD) là đường thẳng d đi qua D và song song với OM, SC. Gọi $K = d \cap NC \Rightarrow K = NC \cap (OMD)$.

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.
Ta thấy $(P) \equiv (OMN)$.
Xác định giao tuyến của (OMN) và (SCD).
Ta thấy $N \in (OMN) \cap (SCD)$ và $OM \parallel SC$ nên giao tuyến của (OMN) và (SCD) là đường thẳng đi qua N song song với SC cắt CD tại I là trung điểm CD.
Gọi $J = OI \cap AB$. Ta thấy $(OMN) \cap (SAB) = JM$, $(OMN) \cap (SAD) = MN$, $(OMN) \cap (SCD) = IN$, $(OMN) \cap (ABCD)$. Vậy thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp là hình thang $MNIJ$.

□

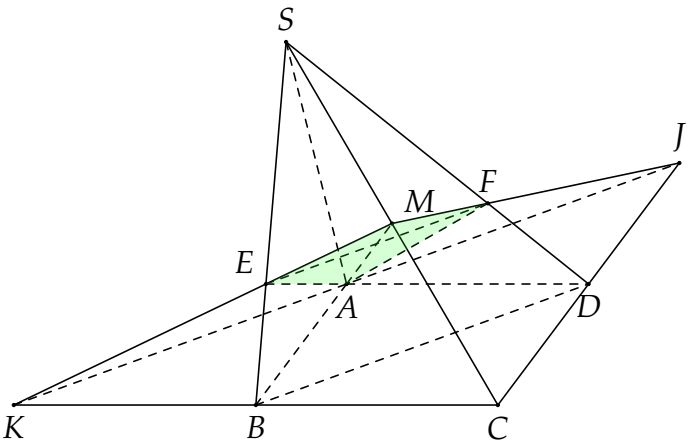
BÀI 585. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

② Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với diện tích tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và diện tích tam giác SCD.

③ Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.



① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).
Trong $(ABCD)$ qua A kẻ đường thẳng song song BD cắt BC và CD lần lượt tại K và J. Khi đó $(P) \equiv (MKJ)$. Gọi $E = MK \cap SB$, $F = CD \cap SD$. Khi đó, ta thấy $(P) \cap (SAB) = EA$, $(P) \cap (SBC) = EM$, $(P) \cap (SCD) = MF$, $(P) \cap (SAD) = AF$. Vậy thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $AEMF$.

② Tính tỉ số diện tích của tam giác SME với diện tích tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và diện tích tam giác SCD.
Ta có $\dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. (Vì E là giao điểm của hai đường trung tuyến KM và SB nên E là trọng tâm của tam giác SCK.)
Tương tự ta có $\dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{SF}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. (Vì F là giao điểm của hai đường trung tuyến JM và SD nên F là trọng tâm của tam giác SCJ.)

③ Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.
Ta có

$$\frac{SE}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SF}{SD} \Rightarrow EF \parallel KJ \Rightarrow \frac{EF}{KJ} = \frac{ME}{MK} = \frac{1}{3}.$$

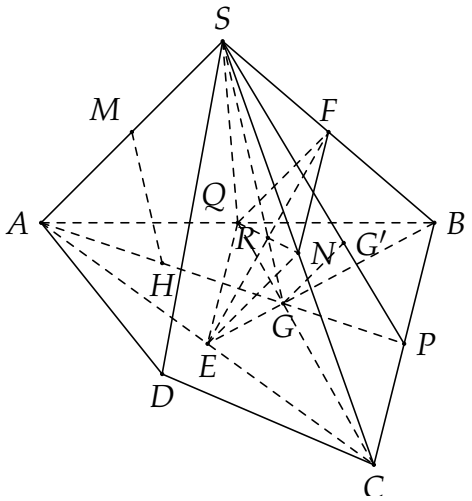
□

BÀI 586. Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

① Chứng minh rằng S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.

② Gọi G' là trọng tâm $\triangle SBC$. Chứng minh rằng $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

Lời giải.



① Chứng minh rằng S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và SB khi đó ta có $QENF$ là hình bình hành (do $EQ = NF = \frac{1}{2}BC$, $EQ \parallel BC \parallel NF$) nên R là trung điểm của EF. Ta thấy $S \in (SQC) \cap (SEB)$, $G \in (SQC) \cap (SEB)$, $R \in (SQC) \cap (SEB)$ suy ra S, R, G thẳng hàng.
Vì M, H lần lượt là trung điểm của SA, AG nên $SG = 2MH$.
Xét $\triangle SGB$ vì E, R, F thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta có $\frac{RS}{RG} \cdot \frac{EG}{EB} \cdot \frac{FB}{FS} = 1 \Rightarrow \frac{RS}{RG} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{RS}{RG} = 3 \Rightarrow SG = 4RG$.

② Chứng minh rằng $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.
Xét $\triangle SAP$ có $\frac{PG'}{PS} = \frac{1}{3} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow GG' \parallel SA$ mà $SA \subset (SAB)$ và $SA \subset (SAC)$ nên suy ra $GG' \parallel (SAB)$, $GG' \parallel (SAC)$.

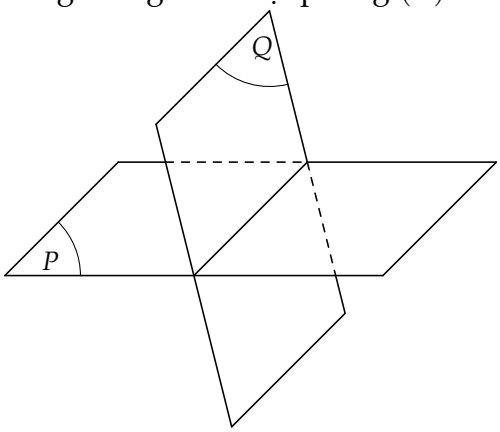
□

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

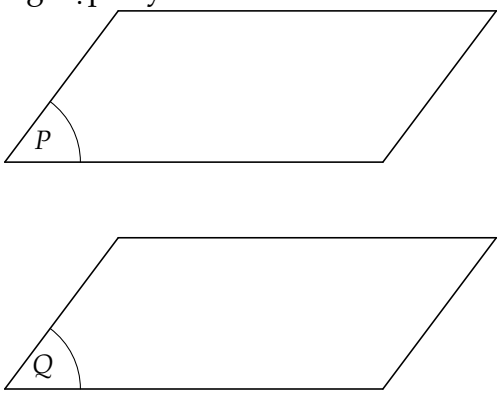
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG PHÂN BIỆT

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Có ba trường hợp xảy ra:



(P), (Q) có 1 điểm chung: $(P) \cap (Q) = a$

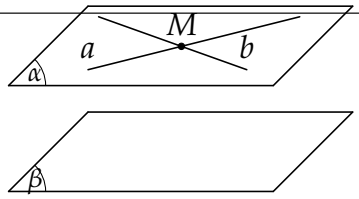


(P), (Q) không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2 CÁC ĐỊNH LÍ

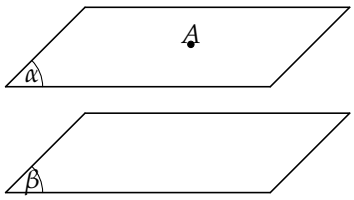
Định lí 1. *Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).*



! — Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

— Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

Định lí 2. *Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.*

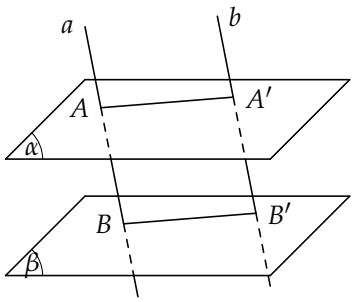


Hệ quả 1. — Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α). Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.

— Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

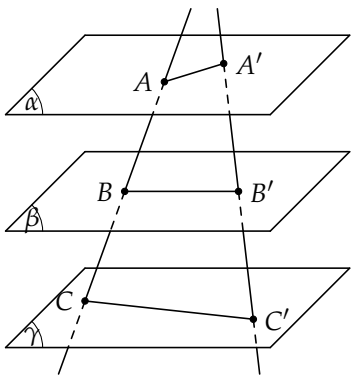
— Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Định lí 3. *Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.*



Hệ quả 2. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Định lí 4. ***Định lí Thales**: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

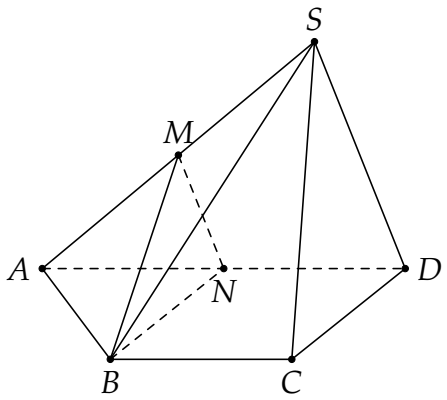


3 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

Lời giải

Vì N là trung điểm của AD nên $NA = ND = \dfrac{AD}{2} = BC$.
Tứ giác $NBCD$ có $ND = BC$ và $ND \parallel BC$ nên $NBCD$ là hình bình hành, suy ra $NB \parallel CD \Rightarrow NB \parallel (SCD)$.
Tam giác SAD có M, N lần lượt là trung điểm của AS và AD nên MN là đường trung bình của $\triangle ADS$, suy ra $MN \parallel SD \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.
Từ $\begin{cases} MN \parallel (SCD),\ MN \subset (BMN) \\ BN \parallel (SCD),\ BN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$.



□

B BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 587. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM.

① Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

② Chứng minh $(PMN) \parallel (ABCD)$.

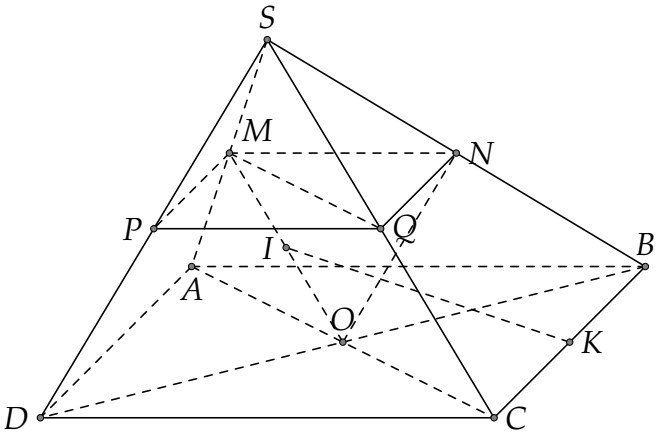
③ Chứng minh $KI \parallel (SCD)$.

Lời giải.

① Ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OM \parallel SC$, suy ra $OM \parallel (SCD)$. Tương tự $ON \parallel (SCD)$.
Khi đó $(OMN) \parallel (SCD)$.

② Ta có N, M lần lượt là trung điểm của SB và SA nên $MN \parallel AB$, suy ra $MN \parallel (ABCD)$. Tương tự $PM \parallel (ABCD)$. Vậy $(PMN) \parallel (ABCD)$.

③ Ta có O, K lần lượt là trung điểm của AC và BC nên $OK \parallel AB$, suy ra $OK \parallel MN$.
Khi đó 5 điểm M, N, K, O, I đồng phẳng.
Từ câu trên $(OMN) \parallel (SCD)$, thì $KI \parallel (SCD)$.



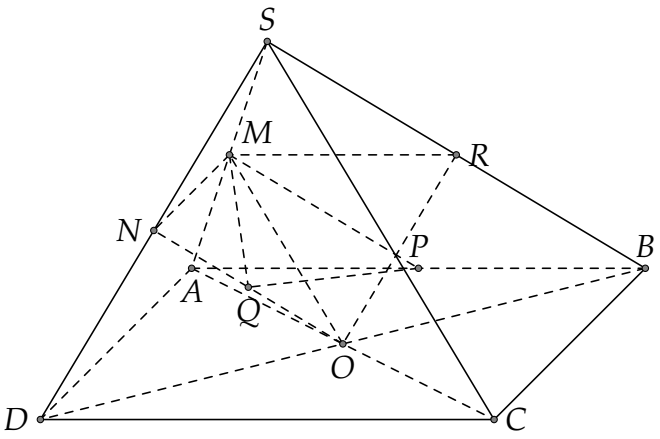
□

BÀI 588. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD

① Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

② Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$ và $(ROM) \parallel (SCD)$.

Lời giải.



① Ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OM \parallel SC$, suy ra $OM \parallel (SBC)$. Tương tự $ON \parallel (SBC)$.
Khi đó $(OMN) \parallel (SBC)$.

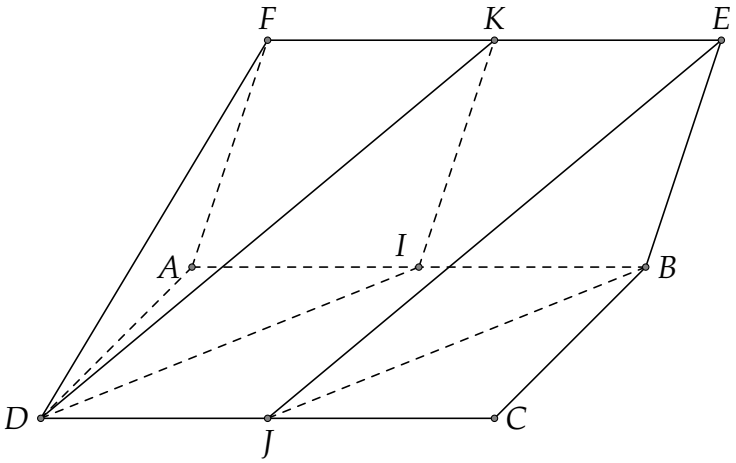
② Ta có O, P lần lượt là trung điểm của AC và BA nên $OP \parallel CB$, suy ra $OP \parallel (SBC)$ hay $P \in (OMN)$. Mặt khác $Q \in (OMN)$.
Theo trên $(OMN) \parallel (SBC)$ thì $PQ \parallel (SBC)$.
Ta có R, O lần lượt là trung điểm của SB và BD nên $RO \parallel SD$, suy ra $RO \parallel (SCD)$.
Theo trên $OM \parallel SC$ nên $OM \parallel (SCD)$.
Vậy $(ROM) \parallel (SCD)$.

□

BÀI 589. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh

① $(ADF) \parallel (BCE)$. ② $(DIK) \parallel (JBE)$.

Lời giải.



① Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $AD \parallel (BCE)$. Tương tự $AF \parallel (BCE)$.
Khi đó $(ADF) \parallel (BCE)$.

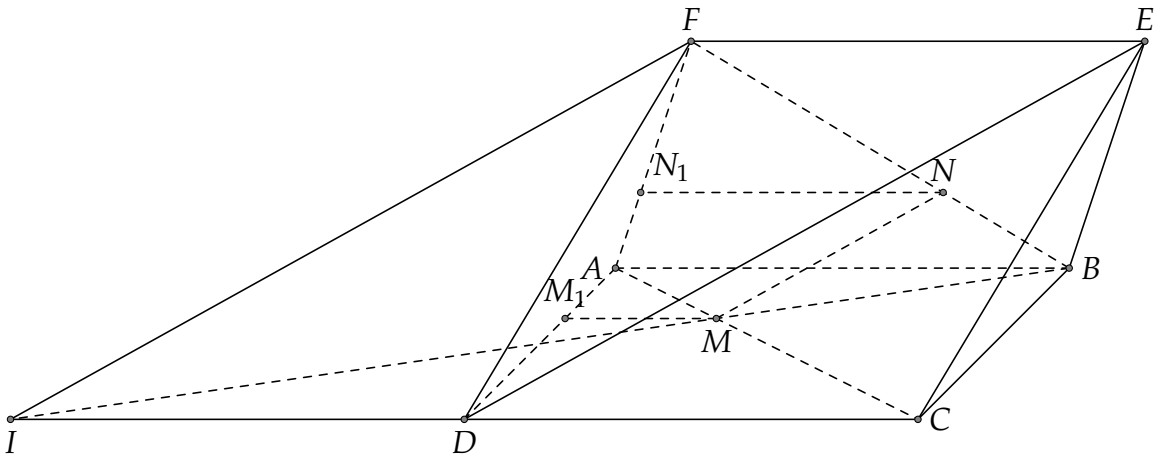
② Trong hình bình hành $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $BI = DJ$. Do đó $IBJD$ là hình bình hành. Suy ra $DI \parallel BJ$ nên $DI \parallel (JBE)$.
Trong hình bình hành $ABEF$ có I, K lần lượt là trung điểm của AB và EF nên $IK \parallel EF$, suy ra $IK \parallel (JBE)$.
Vậy $(DIK) \parallel (JBE)$.

□

BÀI 590. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1. Chứng minh rằng

① $MN \parallel DE$. ② $M_1N_1 \parallel (DEF)$. ③ $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

Lời giải.



① Gọi I là giao điểm của BM với CD. Khi đó ta có $\dfrac{BM}{MI} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$. Mặt khác $\dfrac{BN}{NF} = \dfrac{1}{2}$.
Khi đó $MN \parallel IF$.
Theo trên $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{AB}{CI} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $DI = CD = AB$.
Lại có $DI \parallel EF$. Do đó $DEFI$ là hình bình hành, hay $FI \parallel DE$.
Vậy $MN \parallel DE$.

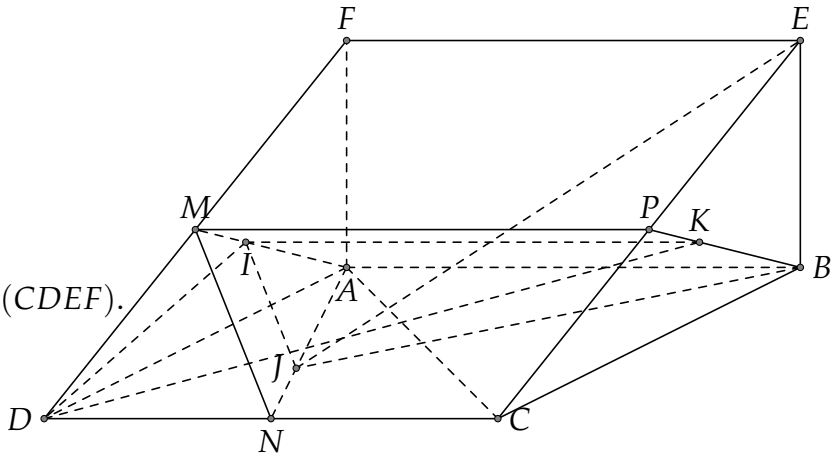
② Theo giả thiết thì $MM_1 \parallel NN_1$ (vì cùng song song với AB) nên M, M_1, N,N_1 đồng phẳng.
Lại có $MM_1 \parallel (DEF)$ (vì $MM_1 \parallel CD \parallel AB$) và theo câu trên thì $MN \parallel DE$ nên $MN \parallel (DEF)$.
Vậy $(MM_1N_1N) \parallel (DEF)$, suy ra $M_1N_1 \parallel (DEF)$.

③ Đã chứng minh ở câu 2.

□

BÀI 591. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng phân biệt. Gọi I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Lời giải.



Ta có $CD \parallel EF \parallel AB$ nên CD và EF đồng phẳng.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DF, CD. Khi đó, vì I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ADF, ADC nên

$$\frac{AI}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN \Rightarrow IJ \parallel (CDEF).$$

Mặt khác, gọi P là trung điểm CE.
Khi đó $\dfrac{BK}{BP} = \dfrac{2}{3}$.
Ta có $ABCD$, $ABEF$ là hình bình hành nên $CDFE$ cũng là hình bình hành. Khi đó với M, P là trung điểm của hai cạnh đối của hình bình hành $CDFE$ nên $MP \parallel CD \parallel AB$ suy ra $IK \parallel MP \parallel AB$. Do đó $ABPK$ cũng là hình bình hành.
Ta có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{BK}{BP}$. Suy ra $IK \parallel MN$. Khi đó $IK \parallel (CDFE)$.
Vậy $(IJK) \parallel (CDFE)$.

□

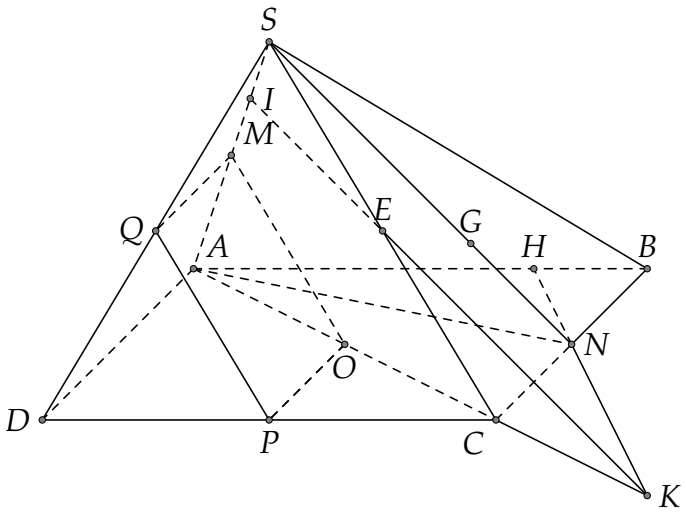
BÀI 592. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP).

② Gọi E là trung điểm của SC và I là điểm trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$. Tìm $K = IE \cap (ABC)$ và $H = AB \cap (EIN)$. Tính tỉ số $\dfrac{AH}{AB}$.

③ Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG).

Lời giải.



① Ta có O, P lần lượt là trung điểm của AC và CD nên $OP \parallel AD$, suy ra $OP \parallel (SAD)$.
Khi đó giao tuyến của (SAD) và (OMP) là đường thẳng qua M và song song với AD và cắt SD tại trung điểm Q của SD.

② Xét mặt phẳng (SAC) có $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{SE}{SC}$ suy ra IE cắt AC tại K.
Khi đó $K = IE \cap (ABC)$.
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SAC với ba điểm K, E, I thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{IA}{IS} \cdot \frac{ES}{EC} = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} \cdot \frac{3}{1} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ABC với ba điểm K, N, H thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{HA}{HB} = 3.$$

Khi đó $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{3}{4}$.

③ Ta thấy mặt phẳng (IMG) cũng chính là mặt phẳng (SAG).
Vì G là trọng tâm tam giác SBC và N là trung điểm BC nên $(IMG) \cap (SBC) = SN$.
Vậy thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG) là tam giác SAN.

□

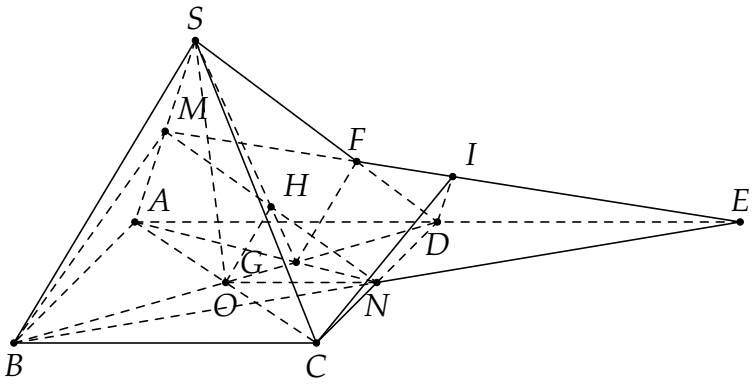
BÀI 593. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Gọi E là giao điểm của AD và (BMN), I là trung điểm của ME và $G = AN \cap BD$.

① Tìm điểm E và giao điểm F của SD với mặt phẳng (BMN). Chứng minh $FS = 2FD$.

② Chứng minh $FG \parallel (SAB)$ và $(CDI) \parallel (SAB)$.

③ Gọi H là giao điểm của MN và SG. Chứng minh $OH \parallel GF$.

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài BN cắt đường thẳng AD tại E. Khi đó E là giao điểm của (BMN) với AD.
Gọi F là giao điểm của ME với SD. Khi đó F là giao điểm của SD với (BMN).
Vì $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{DN}{AB} = \dfrac{1}{2}$ nên D là trung điểm của đoạn AE. Từ đó suy ra SD và EM là các đường trung tuyến của tam giác SAE. Suy ra F là trọng tâm tam giác SAE. Vậy $FS = 2FD$.

② Tam giác DGN và tam giác BGA đồng dạng nên $\dfrac{GD}{GB} = \dfrac{DN}{BA} = \dfrac{1}{2}$.
Từ đó suy ra $\dfrac{GD}{GB} = \dfrac{FD}{FS}$. Nên $FG \parallel SB \Rightarrow FG \parallel (SAB)$.
Ta có $CD \parallel AB$ và $DI \parallel MA$. Từ đó suy ra $(CDI) \parallel (SAB)$.

③ Ta có G là trọng tâm tam giác ACD. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAG với bộ ba điểm thẳng hàng M, H, N, ta có

$$\frac{NG}{NA} \cdot \frac{MA}{MS} \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HG} = 3.$$

Ta cũng có $\dfrac{OG}{OB} = \dfrac{OG}{OD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OH \parallel SB$.
Theo chứng minh trên ta cũng có $GF \parallel SB$. Vậy $OH \parallel GF$.

□

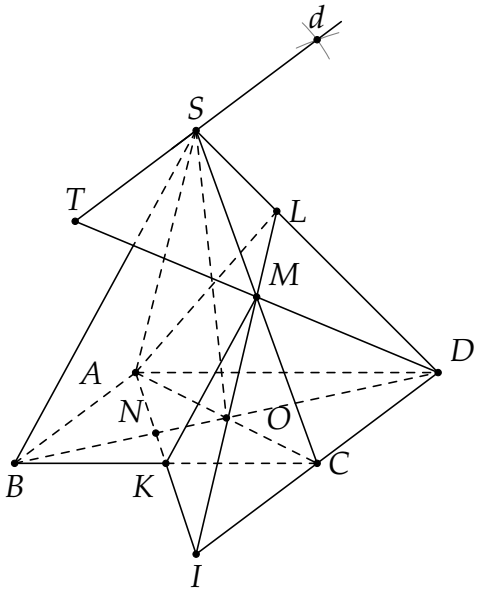
BÀI 594. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC, N là điểm trên đường chéo BD sao cho $BD = 3BN$.

① Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SCD) và (SAB) và tìm $T = DM \cap (SAB)$. Tính $\dfrac{TM}{TD}$.
ĐS: $\dfrac{TM}{TD} = \dfrac{1}{2}$

② Gọi $K = AN \cap BC$. Chứng minh rằng $MK \parallel (SBD)$.

③ Gọi $I = AN \cap DC$, $L = IM \cap SD$. Tính tỉ số $\dfrac{LS}{LD}$ và $\dfrac{S_{IKM}}{S_{IAL}}$. **ĐS:** $\dfrac{LS}{LD} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{S_{IKM}}{S_{IAL}} = \dfrac{3}{8}$

Lời giải.



① — Mặt phẳng (SAB) và (SCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d qua S và $d \parallel AB \parallel CD$.

— Trong mặt phẳng (SCD) kéo dài DM cắt d tại T. Khi đó $T \in d \Rightarrow T \in (SAB)$. Vậy $T = DM \cap (SAB)$.

— Do $CD \parallel ST$ nên hai tam giác MCD và MST đồng dạng. Do đó $\dfrac{MT}{MD} = \dfrac{MS}{MC} = 1$. Vậy $\dfrac{TM}{TD} = \dfrac{1}{2}$.

② Vì $\dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BN}{BO} = \dfrac{2}{3}$. Do đó N là trọng tâm tam giác ABC.
Suy ra K là trung điểm của BC. Dẫn đến MK là đường trung bình của tam giác SBC.
Nên $MK \parallel SB \Rightarrow MK \parallel (SBD)$.

③ — Tam giác IKC và tam giác IAD đồng dạng nên $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{KC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SCD với bộ điểm thẳng hàng I, M, L ta có

$$\frac{LS}{LD} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} = \frac{1}{2}.$$

— Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IDL với ba điểm thẳng hàng S, M, C ta có

$$\frac{SD}{SL} \cdot \frac{ML}{MI} \cdot \frac{CI}{CD} = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{ML}{MI} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{ML}{MI} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra $IM = \dfrac{3}{4} IL$.
Gọi h, k là lượt là độ dài đường cao các tam giác IKM và IAL kẻ từ M và L. Dễ thấy rằng $\dfrac{h}{k} = \dfrac{IM}{IL} = \dfrac{3}{4}$. Vậy

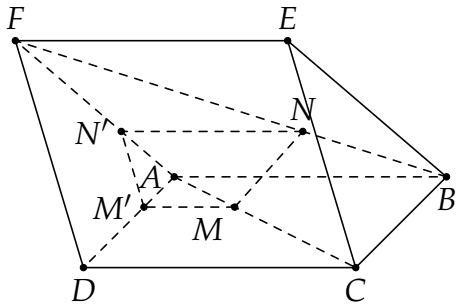
$$\frac{S_{IKM}}{S_{IAL}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot IK}{\frac{1}{2} k \cdot IA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

□

BÀI 595. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

① Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$. ② Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AF \parallel BE \\ AD \cap AF = A \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BCF).$

② Ta có

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \tag{1}$$

Ta cũng có

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF} \tag{2}$$

Mà từ giả thiết ta có

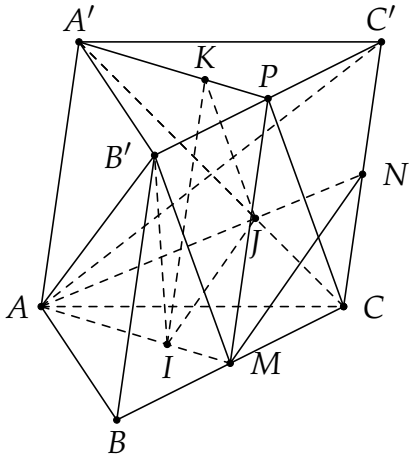
$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \tag{3}$$

Từ (3) suy ra $M'N' \parallel DF$. Ta cũng có $MM' \parallel NN' \parallel DC \parallel FE$.
Vậy $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

□

BÀI 596. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Lời giải.



① Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CC' và $B'C'$. Theo tính chất của trọng tâm tam giác ta có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN.$$

Tứ giác $AMPA'$ là hình bình hành và có $\frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK \parallel MP$.
Vậy $(IJK) \parallel (BCC'B')$.

② Chú ý rằng mặt phẳng (AIB') chính là mặt phẳng (AMB'). Mặt phẳng $(A'JK)$ chính là mặt phẳng $(A'CP)$.
Vì $AM \parallel A'P$, $MB' \parallel CP$ (do tứ giác $B'MCP$ là hình bình hành). Vậy ta có $(A'JK) \parallel (AIB')$.

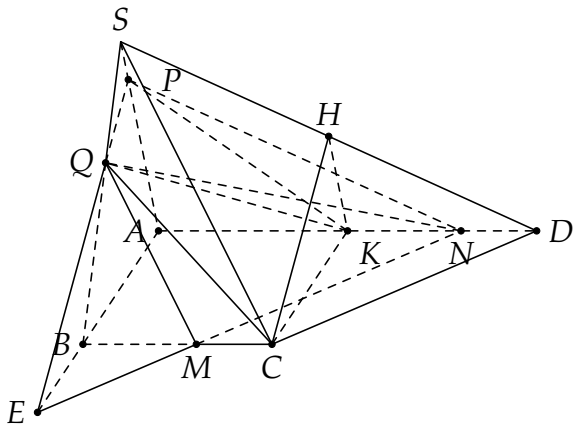
□

BÀI 597. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$, $M \in BC$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, $(P) \parallel CD$, $(P) \parallel SC$, (P) cắt AD, SA ,SB lần lượt tại N, P, Q.

① Chứng minh rằng $NQ \parallel (SCD)$ và $NP \parallel SD$.

② Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SD và AD. Chứng minh rằng $(CHK) \parallel (SAB)$.

Lời giải.



① - Từ M ta kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại N và cắt AB tại E.
Từ M kẻ đường thẳng song song với SC cắt SB tại Q. Kéo dài EQ cắt SA tại P.
Theo cách dựng ta suy ra $(EPN) \parallel (SCD)$ và $NQ \subset (EPN)$. Vậy $NQ \parallel (SCD)$.
- Do $(P) \parallel (SCD)$ và hai mặt phẳng này cùng cắt (SAD) theo các giao tuyến là NP và SD. Do đó ta suy ra $NP \parallel SD$.

② Ta có HK là đường trung bình của tam giác SAD nên $HK \parallel SA$ (1)
Vì K là trung điểm của AD nên $AK = BC$. Do đó tứ giác $ABCK$ là hình bình hành. Suy ra $CK \parallel AB$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(CKH) \parallel (SAB)$.

□

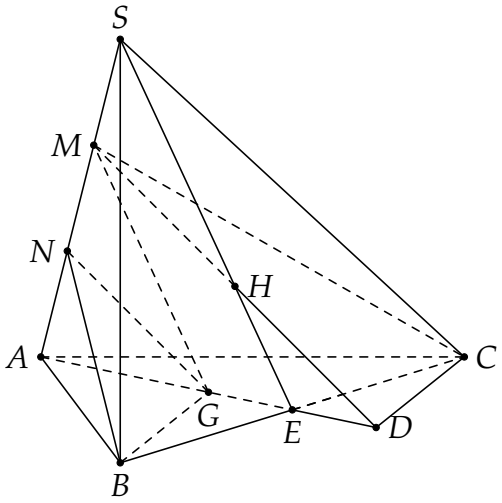
BÀI 598. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

① Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

② Gọi D là điểm đối xứng với A qua G. Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

③ Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác SBC.

Lời giải.



① Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel SE$. Vậy $GM \parallel (SBC)$.

② Từ giả thiết ta suy ra G, N lần lượt là trung điểm của AD và AM. Do đó $NG \parallel MD$ (1) (1)
Từ giác $BDCG$ có E là trung điểm của hai đường chéo nên đó là hình bình hành. Suy ra $BG \parallel CD$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(MCD) \parallel (NBG)$.

③ Ta có AE là đường trung tuyến của tam giác SBC (3)
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAE với ba điểm thẳng hàng M, H, D ta có

$$\frac{HS}{HE} \cdot \cdot \frac{DE}{DA} \cdot \frac{MA}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE} = 2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra H là trọng tâm tam giác SBC.

□

BÀI 5. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 2

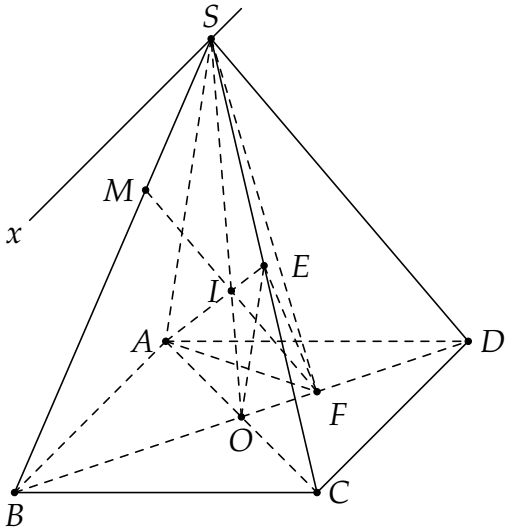
BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

② Gọi E là trung điểm của SC. Chứng minh $OE \parallel (SAB)$.

③ Gọi F là điểm trên đoạn BD sao cho $3BF = 2BD$. Tìm giao điểm M của SB và (AEF). Tính tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB$.

② Ta có $\begin{cases} OE \parallel SA \quad \text{(đường trung bình)} \\ SA \subset (SAB) \\ OE \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow OE \parallel (SAB)$.

③ Trong mặt phẳng (SAC) có $I = SO \cap AE$.

Suy ra $\begin{cases} I \in (SBF) \\ I \in (AEF) \end{cases}$.

$\begin{cases} SB \subset (SBF) \\ FI = (SBF) \cap (AEF) \Rightarrow M \in SB \cap (AEF). \\ M = FI \cap SB \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & 3BF = 2BD \\ \Rightarrow \quad & 3(OB + OF) = 4OD \\ \Rightarrow \quad & 3OD + 3OF = 4OD \\ \Rightarrow \quad & 3OF = OD \\ \Rightarrow \quad & \frac{OF}{OD} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Mặt khác $\triangle IOE \backsim \triangle ISM$ (g.g), suy ra $\dfrac{OE}{SM} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{1}{2}$ suy ra

$$\frac{OI}{OS} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $FI \parallel SD$, suy ra $MF \parallel AD$.

Mà $FD = \dfrac{2}{3}OD = \dfrac{1}{3}BD$, suy ra $SM = \dfrac{1}{3}SB$.

Vậy $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{3}$.

□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

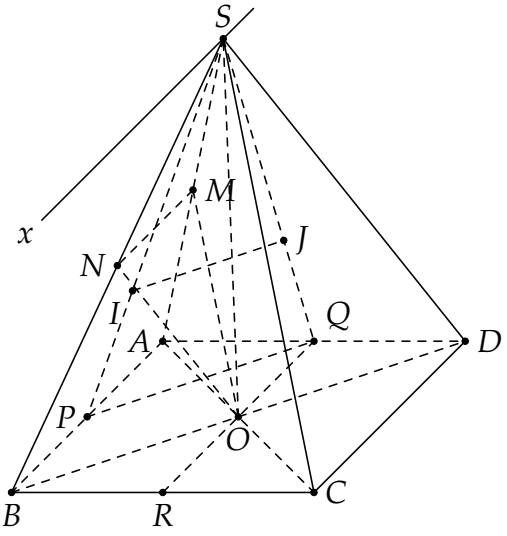
① Chứng minh $IJ \parallel (ABCD)$.

② Chứng minh $(OMN) \parallel (SDC)$.

③ Tìm giao tuyến của (SAB) và (SDC).

④ Tìm giao điểm của BC và (OMN).

Lời giải.



① Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD, ta có:

$$\frac{SI}{SP} = \frac{SJ}{SQ} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $IJ \parallel PQ$.

$$\begin{cases} IJ \parallel PQ \\ PQ \subset (ABCD) \\ IJ \not\subset (SBCD) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (ABCD).$$

② Xét hai mặt phẳng (OMN) và (SCD) có:

$$\begin{cases} MN \parallel CD \quad (\text{cùng song song AB}) \\ MO \parallel SC \\ M = MN \cap MO \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} MN \parallel (SCD) \\ MO \parallel (SCD) \\ M = MN \cap MO \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD).$$

③ Ta có $\begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$

④ Gọi R là trung điểm BC, dễ dàng chứng minh $MN \parallel RQ$.

Ta có $\begin{cases} BC \subset (ABCD) \\ (OMN) \cap (ABCD) = RQ \\ R = BC \cap RQ \end{cases} \Rightarrow R = BC \cap (OMN).$

□

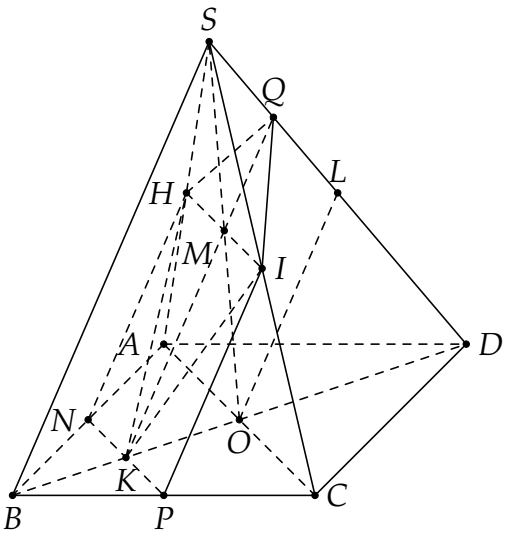
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, I, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SC, OB, SD.

① Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD); (HIK) và (SBD).

② Chứng minh OL song song với (HIK).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (HIK).

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} SO \subset (SAC) \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.
Gọi M là giao điểm của SO và HI, ta có:
$\begin{cases} K \in BO \subset (SBD) \\ K \in (HIK) \\ M \in SO \subset (SBD) \\ M \in HI \subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow MK = (HIK) \cap (SBD)$.

② Trong tam giác SAC có $HI \parallel AC$ nên theo định lí Talet ta có $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{1}{2}$, suy ra M là trung điểm SO.
Trong tam giác SOB có $MK \parallel SB$ (tính chất trung bình), trong tam giác SBD có $OL \parallel SB$ (tính chất trung bình). Do đó, $OL \parallel MK$.
Ta có $\begin{cases} OL \parallel MK \\ MK \subset (HIK) \\ OL \not\subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow OL \parallel (HIK)$.

③ Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và BC, từ đó dễ dàng chứng minh được N, K, P thẳng hàng.
Gọi Q là giao điểm của MK và SD.
Suy ra $NP \parallel AC \Rightarrow NP \parallel HI$ (tính chất trung bình).
Ta có $\begin{cases} HN = (HIK) \cap (SAB) \\ PI = (HIK) \cap (SBC) \\ QI = (HIK) \cap (SCD) \\ HQ = (HIK) \cap (SAD) \\ NP = (HIK) \cap (ABCD). \end{cases}$
Do đó, thiết diện tạo bởi (HIK) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $HNPIQ$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cạnh đáy lớn AD. Gọi E, F lần lượt là các điểm trên hai cạnh SA, SD thỏa mãn điều kiện $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

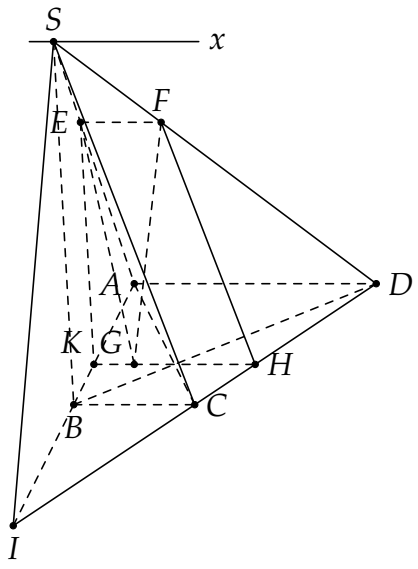
① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD), của (SAD) và (SBC).

② Tìm giao điểm H của CD và (EFG).

③ Chứng minh $EG \parallel (SBC)$.

④ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG). Nó là hình gì?

Lời giải.



① Gọi I là giao điểm của AB và CD, ta có:
$$\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \\ I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$$
Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAB) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel BC.$

② Theo định lí Talet thì $EF \parallel AD$, lấy điểm K trên AB sao cho $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{2}{3}$, do đó:
Cũng theo định lí Talet thì $KG \parallel BC$ mà $BC \parallel AB$ nên $EF \parallel KG$.
Gọi H là giao điểm của KG và CD, ta có:
$$\begin{cases} H \in CD \\ H \in KH \subset (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in CD \cap (EFG).$$

③ Ta có $\begin{cases} EF \parallel BC \subset (SBC) \\ EK \parallel SB \subset (SBC) \\ E = EF \cap EK \end{cases} \Rightarrow (EFG) \parallel (SBC) \Rightarrow EG \parallel (SBC).$

④ Ta có $\begin{cases} EF = (EFG) \cap (SAD) \\ FH = (EFG) \cap (SBD) \\ KH = (EFG) \cap (ABCD) \\ EK = (EFG) \cap (SAB) \\ \varnothing = (EFG) \cap (SBC) \\ EF. \end{cases}$
Vậy mặt phẳng (EFG) cắt hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $EFHK$.

□

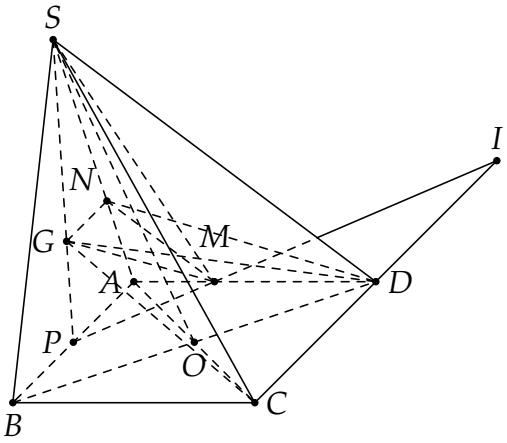
BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$. Lấy điểm M thuộc cạnh AD sao cho $AD = 3AM$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (GCD).

② Tìm giao điểm I của CD và mặt phẳng (SGM).

③ Chứng minh MG song song (SCD).

Lời giải.



① Lấy điểm N trên SA sao cho $SN = \dfrac{2}{3}SA$, ta có:
$\begin{cases} GN \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow GN \parallel CD \Rightarrow GN \subset (GCD)$.
Do đó, $\begin{cases} N \in SA \subset (SAD) \\ N \in GD \subset (GCD) \\ D \in (SAD) \\ D \in (GCD) \end{cases} \Rightarrow ND = (GCD) \cap (SAD)$.

② Gọi P là trung điểm AB và I là giao điểm của PM và CD, ta có:
$\begin{cases} I \in CD \\ I \in PM \subset (SGM) \end{cases} \Rightarrow I \in CD \cap (SGM)$.

③ Ta có $\begin{cases} CD \parallel GN \\ GN \subset (GMN) \Rightarrow CD \parallel (GMN). \\ CD \not\subset (GMN) \end{cases}$ (1)
$\dfrac{AN}{AS} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$, theo định lí Talet ta được $MN \parallel SD$.
$\begin{cases} SD \parallel MN \\ MN \subset (GMN) \Rightarrow SD \parallel (GMN). \\ SD \not\subset (GMN) \end{cases}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra, $(SCD) \parallel (GMN) \Rightarrow GM \parallel (SCD)$.

□

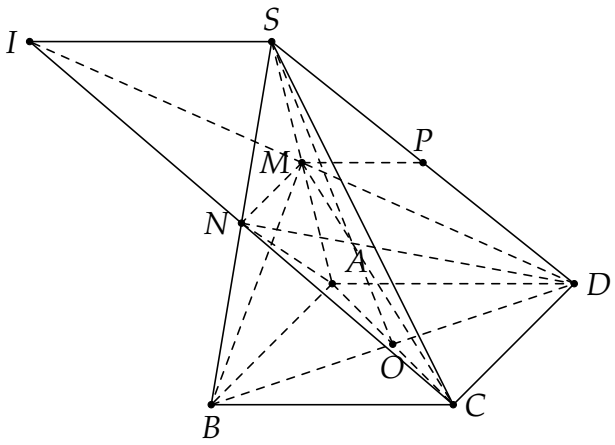
BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

① Tìm giao tuyến của (MBC) và (SAD).

② Chứng minh $(MN \parallel (SCD)$.

③ Gọi $I = DM \cap CN$. Chứng minh $SI \parallel (NAD)$.

Lời giải.



① Gọi P là trung điểm của SD, ta có:
$\begin{cases} MP \parallel AD \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow MP \subset (MBC)$.
$\begin{cases} M \in (MBC) \\ M \in (SAD) \\ P \in SD \subset (SAD) \\ P \in MP \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow MP = (MBC) \cap (SAD)$.

② Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

③ Ta có $MN = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}CD$ suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ICD$, do đó M là trung điểm ID.
Dễ dàng chứng minh $\triangle MSI = \triangle MAD$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{SIM} = \widehat{ADM} \Rightarrow SI \parallel AD$ (so le trong).
$\begin{cases} SI \parallel AD \\ AD \subset (NAD) \Rightarrow SI \parallel (NAD). \\ SI \not\subset (NAD) \end{cases}$

□

CHƯƠNG 3 QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

① Véctơ là một đoạn thẳng có hướng (có phân biệt điểm đầu và điểm cuối).

② Véctơ - không là véctơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

③ Ký hiệu véctơ: $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A, điểm cuối là B) hay $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

④ Độ dài của véctơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véctơ đó. Kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

⑤ Giá của véctơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của véctơ đó.

⑥ Hai véctơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

⑦ Hai véctơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

⑧ Hai véctơ bằng nhau là hai véctơ cùng hướng và có cùng độ dài. Tức là $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$

⑨ Hai véctơ đối nhau là hai véctơ ngược hướng nhưng vẫn có cùng độ dài.

⑩ Các phép toán cộng, trừ, nhân véctơ với một số được định nghĩa tương tự trong mặt phẳng.

2 CÁC QUY TẮC TÍNH TOÁN VỚI VÉCTƠ

① Quy tắc ba điểm (với phép cộng): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

② Quy tắc ba điểm (với phép trừ): $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

③ Quy tắc ba điểm (mở rộng): $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} \cdots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$.

④ Quy tắc hình bình hành:

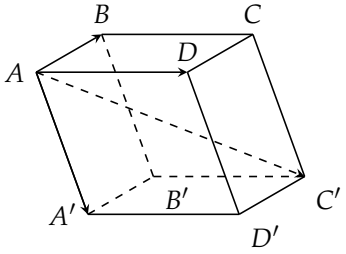
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

(b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$
trong đó $ABCD$ là hình bình hành và E là trung điểm của BD.

⑤ Quy tắc hình hộp:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp.



3 MỘT SỐ HỆ THỨC VÉCTƠ TRỌNG TÂM, CẦN NHỚ

① I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ (với O là một điểm bất kỳ).

② G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (với O là một điểm bất kỳ, M là trung điểm cạnh BC).

③ G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ (với điểm O bất kỳ, A' là trọng tâm của ΔBCD)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$ (với M, N là trung điểm 1 cặp cạnh đối diện).

④ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \vec{a}=k.\vec{b}$

⑤ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^+: \vec{a}=k.\vec{b}$

⑥ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}^-: \vec{a}=k.\vec{b}$

⑦ Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$

4 ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VÉCTƠ

Định nghĩa 1. Trong không gian, ba véctơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

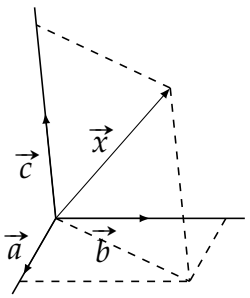
Hệ quả 1. Nếu có một mặt phẳng chứa véctơ này đồng thời song song với giá của hai véctơ kia thì ba véctơ đó đồng phẳng.

Định lí 1. *(**Điều kiện để ba véctơ đồng phẳng**) Trong không gian cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và véctơ $\vec{c}$. Khi đó $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số $(m;n)$ sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (cặp số $(m;n)$ nêu trên là duy nhất).*

⚠ *Bốn điểm phân biệt A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=m.\overrightarrow{AC}+n.\overrightarrow{AD}$.*

5 PHÂN TÍCH MỘT VÉCTƠ THEO BA VÉCTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

Định lí 2.
Cho ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng. Với mọi véctơ $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số $(m;n;p)$ sao cho $\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$.



6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

Định nghĩa 2.

① Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ thì $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos(\vec{a},\vec{b})}$

② Nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b}=0$

③ Bình phương vô hướng của một véctơ: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

⚠ *Một số ứng dụng của tích vô hướng*

① *Nếu* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *và* $\vec{b} \neq \vec{0}$ *ta có* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

② *Công thức tính côsin của góc hợp bởi hai véctơ khác* $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|}$

③ *Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng:* $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1.1. Xác định véctơ và các khái niệm có liên quan

Phương pháp giải:

— *Dựa vào định nghĩa của các khái niệm liên quan đến véctơ (xem mục 1)*

— *Dựa vào tính chất hình học của các hình hình học cụ thể.*

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và

a) cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

a) Các véctơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là

$$\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{B'A'}; \overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{D'C'}$$

b) Các véctơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp cùng phương với $\overrightarrow{AA'}$ là

$$\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{B'B}; \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{C'C}; \overrightarrow{DD'}; \overrightarrow{D'D}$$

.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là các giao điểm của hai đường chéo của hai đáy. Hãy xác định các véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ sao cho

a) bằng $\overrightarrow{OO'}$.

b) bằng $\overrightarrow{AO}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.

b) Ta có Các véctơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$.

□

BÀI 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. Hãy xác định các véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) cùng hướng $\overrightarrow{AM}$. b) ngược hướng $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

a) Các véctơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ là

$$\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DN};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{D'C'}$$

b) Các véc tơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$ là

$$\overrightarrow{DA};\overrightarrow{CB};\overrightarrow{D'A'};\overrightarrow{C'B'}$$

.

□

BÀI 2. Cho bốn điểm A, B, C, D. Hãy xác định các véctơ trong các trường hợp sau:

a) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B;

b) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B, C;

c) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B, C, D.

Lời giải.

a) Các véctơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}$.

b) Các véctơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA}$.

c) Các véctơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{DB}$.

□

BÀI 3. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại I, K, L, M. Xét các véctơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có điểm cuối là các đỉnh của hình trụ. Hãy chỉ ra các véctơ

a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$.

b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$.

c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

Lời giải.

a) Các véctơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IA'}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KB'}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{LC'}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MD'}$.

b) Các véctơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{MD}$.

c) Các véctơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{MD}$.

□

DẠNG 1.2. Chứng minh đẳng thức véctơ

Để chứng minh đẳng thức vectơ ta thường sử dụng:

— *Qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp.*

— *Tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác, tích một số với một vectơ... Để biến đổi vế này thành vế kia.*

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện A, B, C, D. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh rằng: $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

Ta có $\vec{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ và $\vec{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

Suy ra $2\vec{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}\right)$
$= \vec{0} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) Cho G là trung điểm của I, J. Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

Tacó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{MG} + 2\vec{0} = 4\overrightarrow{MG}$

(Vì I là trung điểm của AB,J là trung điểm của CD, G là trung điểm của IJ)

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, Nlần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Vì N là trung điểm cuả CD nên ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

Suy ra, $2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}\right) = \vec{0} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \vec{0} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

Vậy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$. □

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi P, Q là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AD và BC sao cho: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải.

Ta có, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \tag{3.1}$$

Ta lại có theo giả thiết: $\begin{cases} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{BQ} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} &= 4\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{BC} &= 4\overrightarrow{BQ} \end{cases} \tag{3.2}$$

Thay (1.2) vào (1.1) ta được:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BQ} = 2\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}\right) \\ &= 2\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ} \quad \text{(ĐPCM).} \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Lời giải.

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Ta có, O là trung điểm của AC và BD nên

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \tag{3.3}$$

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \tag{3.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra, $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Ta có, $\overrightarrow{SA}^2 = \left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{SC}^2 = \left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$

Suy ra, $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2$
Tương tự, $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OD}^2$
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$.
Từ đó suy ra, $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$

□

DẠNG 1.3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vecto

Dựa vào các yếu tố cố định như điểm và véc-tơ.

— ***Các bước thực hành giải toán:***

1. *Biến đổi đẳng thức véc-tơ cho trước về dạng: $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$.*
   Trong đó: Điểm O và véc-tơ $\vec{v}$ đã biết.
2. *Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là M.*

— ***Ứng dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm***

Với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và các số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Tồn tại duy nhất điểm M sao cho: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}=\vec{0}$.

Điểm M như vậy gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$.
Trong trường hợp $\alpha_i=\alpha_j\ \forall i,j$ điểm M gọi là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

— ***Một số kết quả thường sử dụng***
Với A, B, C là các điểm cố định, $\vec{v}$ là véc-tơ đã biết.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Rightarrow M$ *là trung điểm AB.*

② *Nếu A, B, C không thẳng hàng thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.*

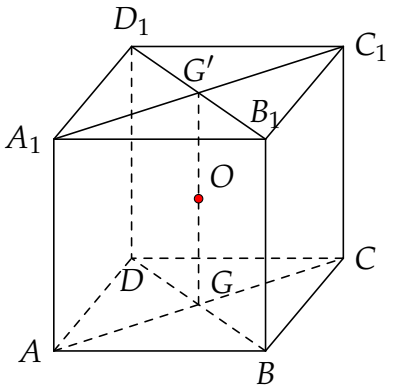
③ *Tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ là mặt phẳng trung trực của AB.*

④ *Tập hợp điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k\left|\overrightarrow{AB}\right|$ là mặt cầu tâm C bán kính bằng $k.AB$.*

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Xác định vị trí của điểm O sao cho:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}=\vec{0}$.

Lời giải

Gọi G, G' là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$.
Khi đó ta có:
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}$
$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{G'A_1}+$
$\overrightarrow{G'B_1}+\overrightarrow{G'C_1}+\overrightarrow{G'D_1}+4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})$
$=4(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{G'O})=\vec{0}$
Suy ra O là trung điểm GG'.



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm I, H, G thỏa mãn

① $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

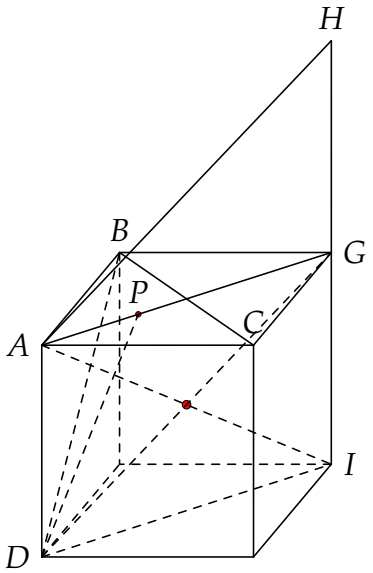
③ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

① Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với G là đỉnh còn lại của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Vậy $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với I là đỉnh còn lại của hình bình hành $AGID$.
Do đó AI là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

② Ta có: $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.
Mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DG}$.
Vậy $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DG}$ nên F là đỉnh còn lại của hình bình hành $ADGH$.

③ Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PG}$ với P là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow G$ là điểm nằm trên đoạn thẳng DP sao cho $PD=4PG$.
Điểm G thỏa mãn đẳng thức trên gọi là trọng tâm tứ diện.



□

VÍ DỤ 3. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta biến đổi đẳng thức về dạng:
$\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\left|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{GA}\right|$
$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA cố định. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$. Tìm điểm G thỏa mãn:
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow I$ cố định. Khi đó ta có:
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IG}$.
Điểm G được xác định nhờ đẳng thức trên. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Tìm điểm O thỏa mãn: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OS}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tứ giác $ABCD \Rightarrow G$ cố định. Khi đó ta có:
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OS}=\vec{0}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.
Điểm O được xác định nhờ đẳng thức trên. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm điểm G thỏa mãn: $\overrightarrow{SA}=3\overrightarrow{SG}-2\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=3\overrightarrow{SG}-2\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}=3\overrightarrow{SG}-\overrightarrow{SB}-(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BC})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}=3\overrightarrow{SG}-\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. □

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm I thỏa mãn đẳng thức: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tứ diện. Khi đó: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AI}$.
$\Rightarrow G$ là điểm nằm trên AG thỏa mãn $4GI=AI$. □

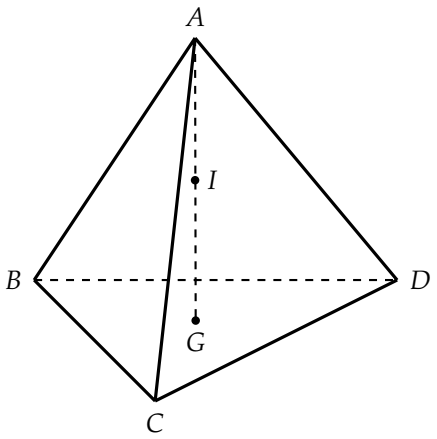
BÀI 5. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng. Tìm tập hợp các điểm N sao cho: $\left|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right|=\left|2\overrightarrow{BN}-2\overrightarrow{BA}\right|$.

Lời giải.

Gọi G là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow G$ cố định.
Ta có $\left|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right|=\left|2\overrightarrow{BN}-2\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{NG}\right|=\left|2\overrightarrow{AN}\right|$
$\Rightarrow$ Tập hợp N là mặt phẳng trung trực của AG. □

BÀI 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $AB=5$. Xác định vị trí của M để $P=3\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2+\overrightarrow{MD}^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ $(1) \Rightarrow I$ cố định (do A, B, C, D cố định).
Ta có:

$$P = 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$$
$$= 6MI^2+3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$$
$$= 6MI^2+3IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$$

Do đó: P nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M trùng I.
Gọi G là trọng tâm tam giác BCD ta có: $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.
Kết hợp với $(1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{GI} \Rightarrow I$ là trung điểm GA.
Khi đó $IA^2=\dfrac{25}{6}, IB^2=IC^2=ID^2=\dfrac{25}{2} \Rightarrow P=50$. □

DẠNG 1.4. Tích vô hướng của hai véctơ

Phương pháp giải: dựa vào định nghĩa và tính chất của tích vô hướng (xem mục 6), các quy tắc tính toán véctơ (xem mục 2) và các hệ thức véctơ trọng tâm (xem mục 3) để giải toán.

VÍ DỤ 1. Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chứng minh rằng: $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

Lời giải

Ta có: $VP=\dfrac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)=\dfrac{1}{4}\left((\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2\right).=\dfrac{1}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}.\vec{b}-(\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}))=\vec{a}.\vec{b}=VT$ □

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}=0$ (vì $AC\perp B'D' \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}=0$) □

VÍ DỤ 3. Cho $|\vec{a}|=2, \left|\vec{b}\right|=3, (\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ và $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

Lời giải

Ta có: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.
$\Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2^2+3^2+2.2.3.\cos 120^\circ=7 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{7}$.
Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.
$\Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2^2+3^2-2.2.3.\cos 120^\circ=19 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$ □

VÍ DỤ 4. Cho $|\vec{a}|=3, \left|\vec{b}\right|=4, \vec{a}.\vec{b}=-6$. Tính góc hợp bởi hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

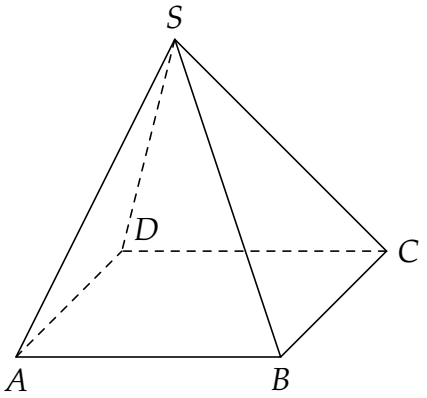
Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-6}{3.4} = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy góc hợp bởi hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120° □

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}\right)$
$= \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$
$= \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$ (vì $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)
$= \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \left(-\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}\right)$
$= \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}\left(-\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}\right)$
$= \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD}$
(vì $BA \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$).
Vậy $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SD} = 0$.



□

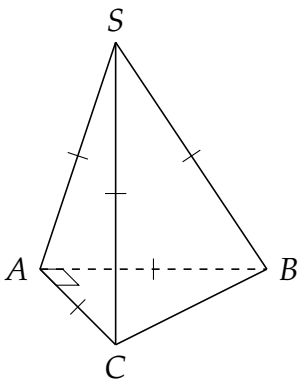
VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

① Tính tích vô hướng $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}$;

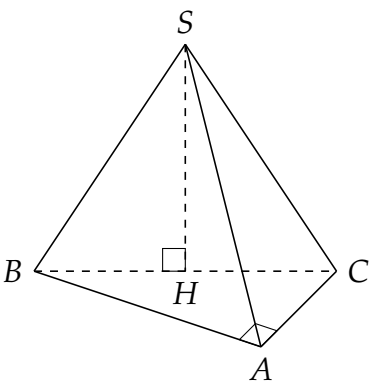
② Tính tích vô hướng $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB} = -AS.AB.\cos\left(\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}\right)$
$= -a.a.\cos SAB = -a.a.\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}a^2$.



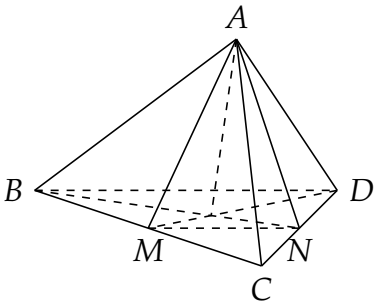
b) Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB} = 0 - \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AB}$
$= -\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right) = -a.a.\cos\widehat{SAB} = -a.a.\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}a^2$.



□

BÀI 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$

Lời giải.



Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong ΔAMN: $AM = AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \dfrac{a}{2}$.

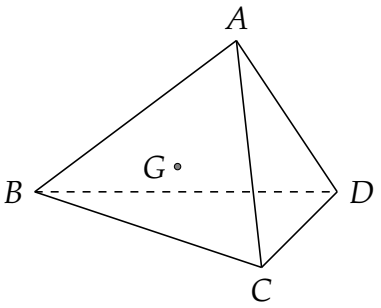
Xét ΔAMN, ta có: $\cos\widehat{MAN} = \dfrac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{5}{6}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AN}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos\widehat{MAN} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{8}a^2$

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều có cạnh bằng a, $CD = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCA. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$

Lời giải.

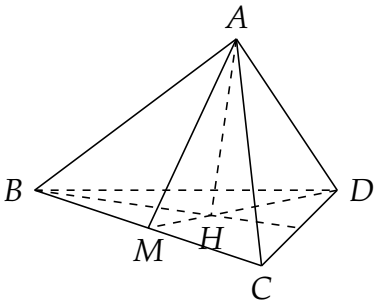


Ta có $3\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - AC^2$
$= a.a.\cos 60^\circ - a.a.\cos 60^\circ + 0 - a^2 = -a^2$
Vậy $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = -\dfrac{a^2}{6}$

□

BÀI 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.



Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong ΔAMD: $AM = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = a$.

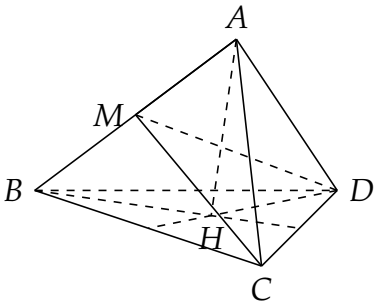
Xét ΔAMD, ta có: $\cos\widehat{MAD} = \dfrac{AM^2 + AD^2 - MD^2}{2AM.AD} = \dfrac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.\cos\widehat{MAD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2}a^2$.

□

BÀI 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm cạnh AB. Tính $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{DM}$.

Lời giải.



Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong ΔMCD: $MC = MD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CD = a$.

Ta có: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{DM} = \left(-\overrightarrow{MC}\right).\left(-\overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \left|\overrightarrow{MC}\right|.\left|\overrightarrow{MD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right)$.

Xét $\triangle CMD$, ta có:

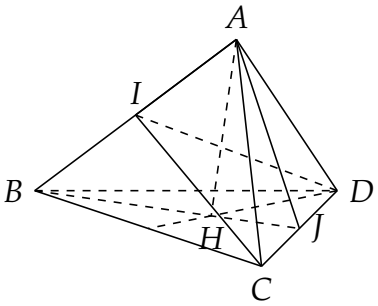
$$\cos\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}\right) = \cos\widehat{CMD} = \frac{MC^2+MD^2-CD^2}{2MC.MD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Khi đó: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{DM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{a^2}{4}$.

□

BÀI 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a; I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AJ}$

Lời giải.



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Ta có: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\right) = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CJ}$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp BJ \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AI}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{a}{2}.a.\cos\widehat{IAC} = \dfrac{a}{2}.a.\cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{4}$.

Tương tự: $-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CJ} = \left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CJ}\right|.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CJ}\right) = \dfrac{a}{2}.a.\cos\widehat{ACJ} = \dfrac{a}{2}.a.\cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{4}$.

Do đó: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AJ} = \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-\overrightarrow{AC}^2 = \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-a^2 = -\dfrac{1}{2}a^2$.

□

DẠNG 1.5. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng

Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách:

- *Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.*
- *Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng : Nếu có $m, n \in \mathbb{R}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.*

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng 3 vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

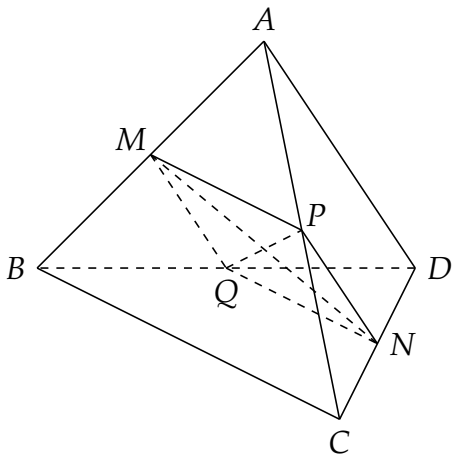
Lời giải

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có $\begin{cases} PN \parallel MQ \\ PN = MQ = \dfrac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $(MNPQ)$ chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

$\Rightarrow$ ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó 3 vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{NB}$ (2)

Cộng vế theo vế, ta được : $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

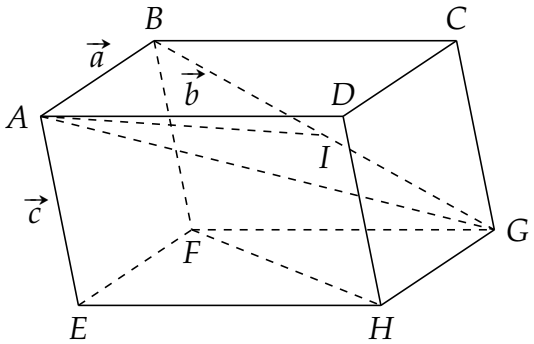
Vậy : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng. □

DẠNG 1.6. Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng cho trước

Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của BG. hãy biểu thị vectơ AI theo 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải



Vì I là trung điểm của BG nên $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}\right)$.

Theo quy tắc hình hộp, $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. □

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD, I là trung điểm của BM. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải

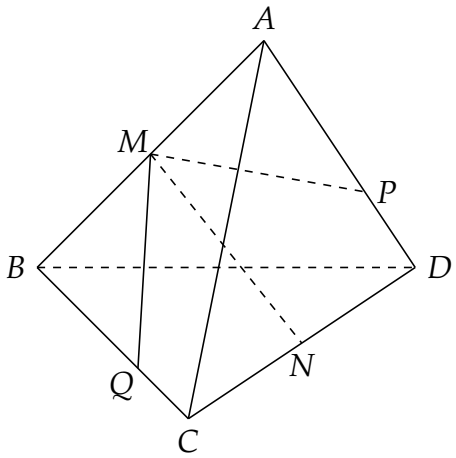
Ta có $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + +\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.



Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ (1)

Mặt khác vì $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}BQ$

Từ (1) ta suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}\right) = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}\right)$.

Vì $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right)$ suy ra $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng .

Do đó 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. □

BÀI 2. Cho 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ và 3 số thực $m, n, p \neq 0$. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b}, \vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c}, \vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b} \Rightarrow p\vec{x} = mp\vec{a} - np\vec{b} \ (1) \\ \vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c} \Rightarrow n\vec{y} = np\vec{b} - nm\vec{c} \ (2) \\ \vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a} \Rightarrow m\vec{z} = mn\vec{c} - np\vec{a} \ (3) \end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta được $p\vec{x} + n\vec{y} + m\vec{z} = \vec{0}$

Vì $m, n, p \neq 0$ nên $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. □

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi P, Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}, k \neq 1$. Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP} = k\left(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MP}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$.

Suy ra $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MC}}{1-k} = \dfrac{k}{k-1}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$ (Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$).

Mặt khác N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \dfrac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$.

Suy ra ba vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng hay bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. □

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$, với $x, y \neq 1$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Ta có :$\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = \dfrac{\vec{a} - x\vec{c}}{1-x}$, (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{1-y}\vec{b}$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -\dfrac{1}{1-x}\vec{a} + \dfrac{1}{1-y}\vec{b} + \dfrac{x}{1-x}\vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD}$, tức là :

$$-\frac{1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c} = m\left(\vec{b} - \vec{a}\right) - n\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{1-x}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-y} - m\right)\vec{b} + \left(n + \frac{x}{1-x}\right)\vec{c} = \vec{0}. \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{1-x} \\ m = \dfrac{1}{1-y} \\ n = -\dfrac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x = y$. □

DẠNG 1.7. Ứng dụng véctơ chứng minh bài toán hình học

Phương pháp giải:

— *Chọn 3 véctơ không đồng phẳng làm cơ sở.*

— *Biểu diễn các véctơ cần tính toán về hệ 3 véctơ cơ sở.*

— *Dựa vào hệ thức biểu diễn ở trên ta tìm mối quan hệ giữa các véctơ cần xét.*

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ hay A, G, C' thẳng hàng. □

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

Lời giải

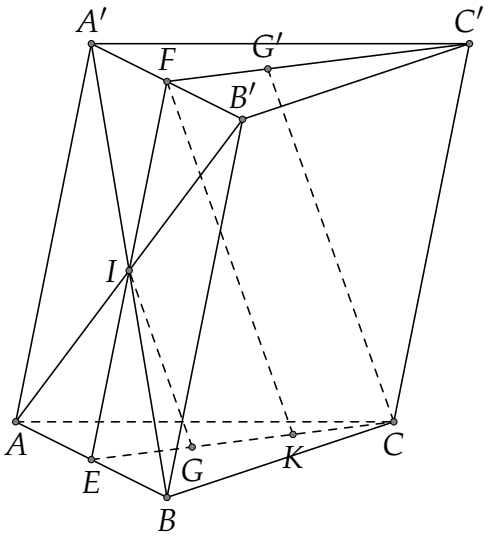
1. Phương pháp véctơ.

— Lấy trung điểm E, F (như hình vẽ).

— Ta có $\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} = \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C'F} = \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A'F} - \overrightarrow{A'C'}\right) = -\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}$, (1).

— Và $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'C'}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG'}$,(2)

— Suy ra $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{CG'}$ cùng phương $\Rightarrow GI \parallel CG'$.



2. Phương pháp cổ điển.

— Lấy các trung điểm E, F, K.

— Chứng minh $EG'CK$ là hình bình hành $\Rightarrow CG' \parallel FK$, (1).

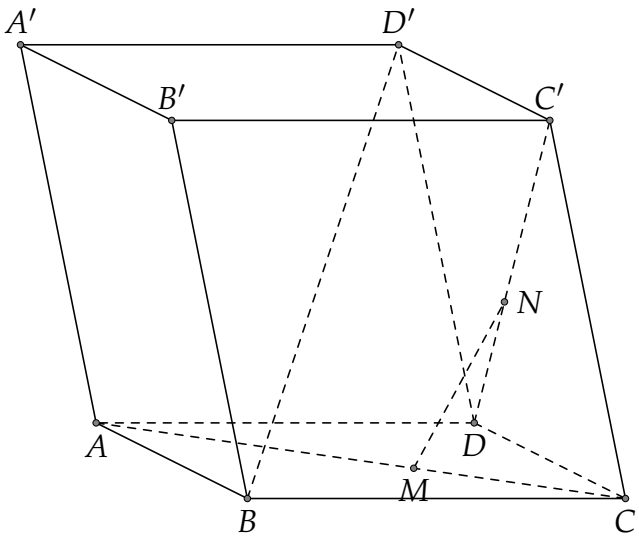
— Chứng minh GI là đường trung bình của $\triangle EFK$: suy ra $GI \parallel FK$, (2).

— Kết hợp (1) và (2) suy ra $GI \parallel CG'$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m.\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = m.\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ và $BA = a, BB' = b, BC = c$.

Lời giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB'}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = m\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}\right) \\ \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BN} = m\left(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BN}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{1-m}\overrightarrow{BD} - \dfrac{m}{1-m}\overrightarrow{BC'} = \dfrac{1}{1-m}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) - \dfrac{m}{1-m}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\dfrac{m}{1-m}\vec{a} + \dfrac{1}{1-m}\vec{c} \\ \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{1-m}\vec{a} - \dfrac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}$$

Ngoài ra $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên để $MN \parallel BD'$ thì cần có $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \dfrac{1+m}{1-m} = -\dfrac{m}{1-m}$.

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $m = -0,5$.

Với $m = -\dfrac{1}{2}$ ta có $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \dfrac{1}{9}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{c}\,\vec{a}\right)$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ nên $2\vec{a}\,\vec{b} + 2\vec{b}\,\vec{c} + 2\vec{c}\,\vec{a} = ab + bc + ca$.

Vậy $MN = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$$

Lời giải.

Đặt $\dfrac{SA}{SA'} = a$, $\dfrac{SB}{SB'} = b$, $\dfrac{SC}{SC'} = c$, $\dfrac{SG}{SG'} = t$. Khi đó

$$3t\overrightarrow{SG'} = 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'}$$

Trong mặt phẳng (α) xét điểm I sao cho $a\overrightarrow{IA'} + b\overrightarrow{IB'} + c\overrightarrow{IC'} = \vec{0}$. Khi đó

$$3t\overrightarrow{SG'} = a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = (a+b+c)\overrightarrow{SI}$$

nên $\overrightarrow{SG'}$ cùng phương với $\overrightarrow{SI}$ hay I là giao điểm của SG và (α) nghĩa là $I \equiv G'$. Suy ra

$$3t\overrightarrow{SG'} = (a+b+c)\overrightarrow{SG'}$$

hay $a+b+c=3t$. □

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\
&= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \\
&= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với G. Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$, khi M trùng với trọng tâm G của tứ diện $ABCD$. □

BÀI 3. Cho ba tia Ax, By, Cz đôi một chéo nhau trong không gian. Ba điểm M, N, P lần lượt thay đổi trên các tia đó sao cho $AM = 2BN = 3CP$. Chứng minh rằng trọng tâm I của tam giác MNP luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Trên ba tia Ax, By, Cz lần lượt lấy các vec-tơ đơn vị $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng chiều với các tia chứa nó. Giả sử $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}$. Khi đó,

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}t\vec{b}, \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}t\vec{c}.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là điểm tùy ý. Ta có

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ 3\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \end{cases},$$

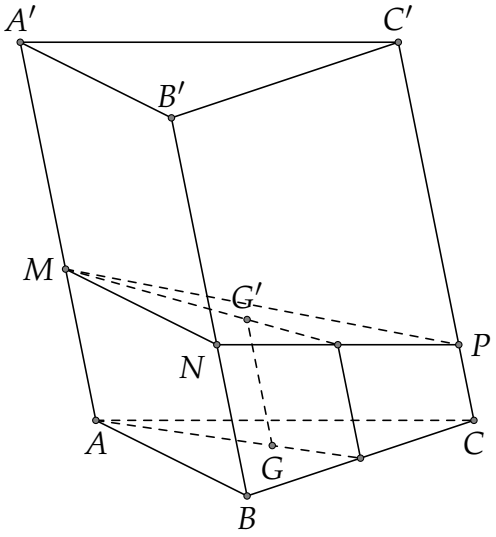
suy ra

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) = \frac{t}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

nên I thuộc tia Gt có gốc G, cùng chiều với vec-tơ $\vec{u} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. □

BÀI 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a. Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $AM + BN + CP = a$. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn đi qua 1 điểm cố định.

Lời giải.



Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ thì $\begin{cases} 3\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \\ 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$

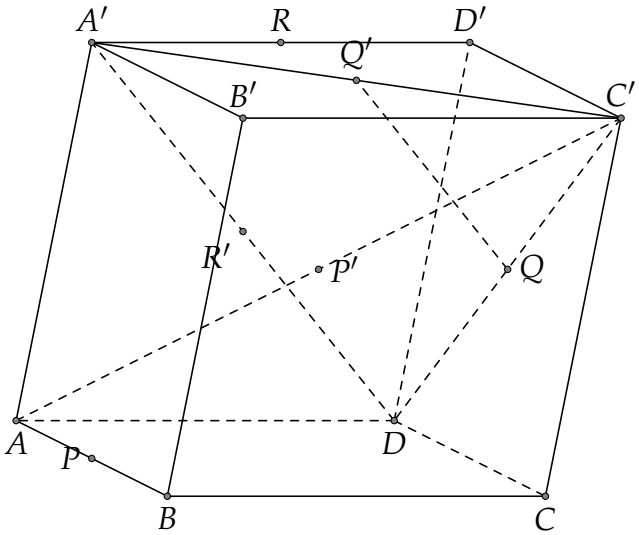
$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \dfrac{AM}{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} + \dfrac{BN}{BB'} \cdot \overrightarrow{BB'} + \dfrac{CN}{CC'} \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$ (*). Do A, A', G cố định nên từ (*) ta suy ra G' cố định. Vậy (MNP) luôn đi qua điểm G' cố định xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{GG'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. □

BÀI 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A'D'$. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm đối xứng của các hình bình hành $ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'$.

① Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

② Chứng minh hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.



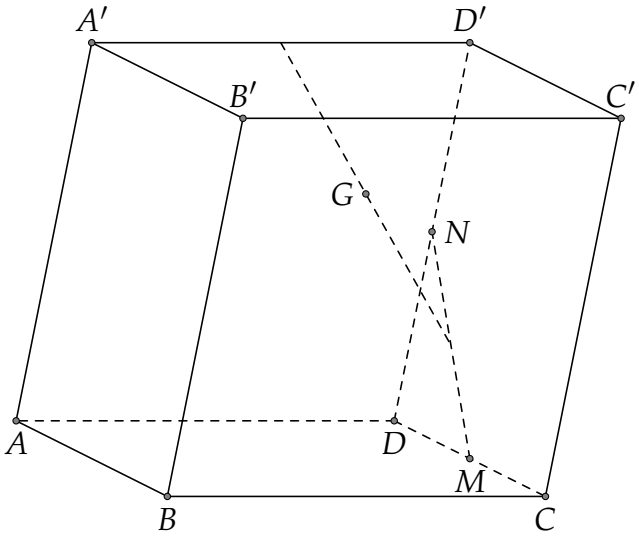
① Theo tính chất đường trung bình trong tam giác ta có $\overrightarrow{DA'} = 2\overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{DD'} = -2\overrightarrow{RR'}$ và $\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{PP'}$.
Theo quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'}$. Từ đó, $2\overrightarrow{QQ'} = -2\overrightarrow{RR'} - 2\overrightarrow{PP'}$
$\Rightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

② Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác PQR và $P'Q'R'$. Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AQ'} + \overrightarrow{AR'} = 3\overrightarrow{AG'} \\ \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AG} \end{cases}$.
Trừ vế theo vế ta được $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = 3\overrightarrow{GG'} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$.

□

BÀI 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, DD' và G, G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

Lời giải.



Do G, G' lần lượt là trọng tâm của $A'D'MN$ và $BCC'D'$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 4\overrightarrow{AG'} \end{cases}.$$

Trừ vế theo vế ta được $4\overrightarrow{GG'} = \left(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C}\right) + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'} = 2\overrightarrow{A'B} + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}$

$= 2\left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'A}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \frac{5}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{GG'}, \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B'}$ đồng phẳng

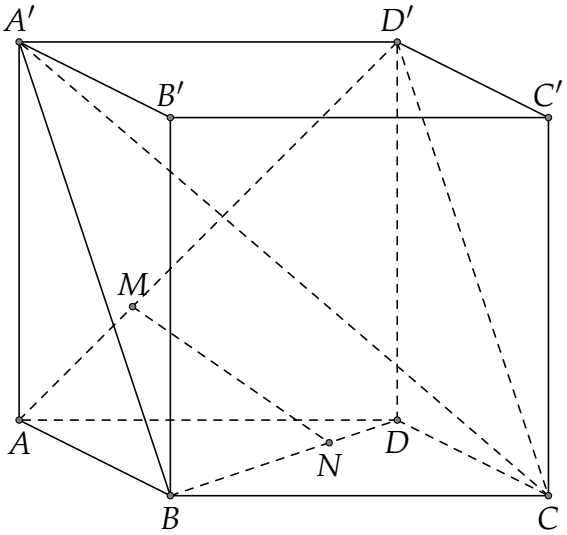
$\Rightarrow GG' \parallel (ABB'A')$. □

BÀI 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AD' và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k.\overrightarrow{NB}$ với $(k \neq 0, k \neq 1)$.

① Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng (BCA').

② Khi đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB.

Lời giải.



① Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AD}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$.
Do $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$ nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$.
Tương tự $\overrightarrow{AN} = -\dfrac{k}{1-k}\vec{b} + \dfrac{1}{1-k}\vec{c}$.
Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \dfrac{1+k}{1-k} \cdot \vec{c} + \dfrac{k}{1-k} \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ hay $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1+k}{1-k} \cdot \overrightarrow{BC} + \dfrac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{BA'}$.
Vậy $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng suy ra $MN \parallel (BCA')$ do $M \notin (BCA')$.

② Do $MN \parallel A'C$ nên $\overrightarrow{MN} = m.\overrightarrow{A'C}$, do đó $\dfrac{k}{1-k} \cdot \vec{a} - \dfrac{k}{1-k} \cdot \vec{b} + \dfrac{1+k}{1-k} \cdot \vec{c} = -m.\vec{a} + m.\vec{b} + m.\vec{c}$.
Suy ra $\begin{cases} \dfrac{k}{1-k} = -m \\ -\dfrac{k}{1-k} = m \\ \dfrac{1+k}{1-k} = m \end{cases}$. Giải hệ này ta được $k = -\dfrac{1}{2}$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{3}\left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)$.
Mặt khác $\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c}$ nên ta có ngay $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0$ và $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0$.
Như thế là MN vuông góc với AD' và DB.

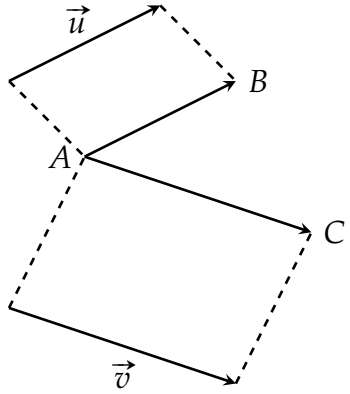
□

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vec-tơ khác vec-tơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vec-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



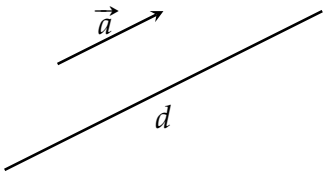
Định nghĩa 2. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vec-tơ khác vec-tơ - không. Tích vô hướng của hai vec-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, và được tính bởi công thức

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

⚠ *Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*

2 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 3.
Vec-tơ $\vec{a}$ khác vec-tơ - không được gọi là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vec-tơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



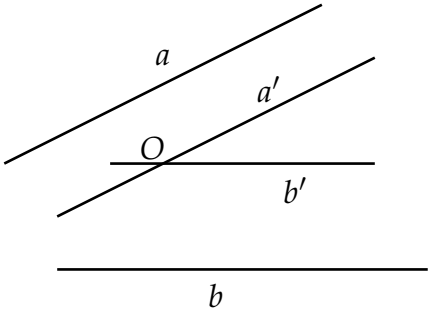
⚠

① *Nếu $\vec{a}$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d thì vec-tơ $k.\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d.*

② *Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vec-tơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.*

③ *Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vec-tơ chỉ phương cùng phương.*

Định nghĩa 4. Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.



⚠

① *Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.*

② *Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của a và b, đồng thời $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.*

③ *Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.*

B CÁC DẠNG TOÁN

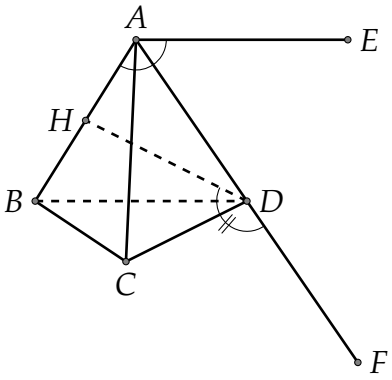
DẠNG 2.1. Xác định góc giữa hai vec-tơ

Ta xác định một điểm cho trước trên hình làm điểm gốc và dời các vec-tơ cần tính góc về điểm gốc đó.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp vec-tơ sau đây:

① $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$. ② $\overrightarrow{DH}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



① Dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 120^\circ$.

② Dựng $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD}$. Ta có $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DF}) = \widehat{HDF} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

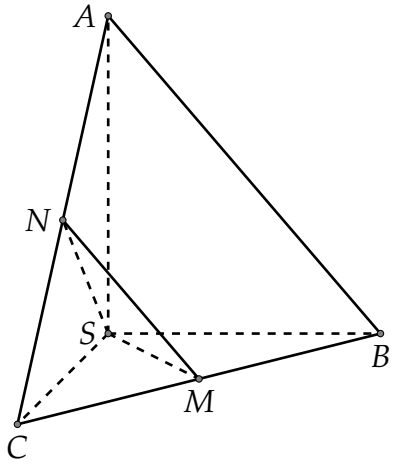
Gọi α là góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}}{SM\cdot AB}$.

Có $BC = AB = \sqrt{SA^2+SB^2} = a\sqrt{2}$, $SM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})\cdot(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB}^2 - \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SA}) = \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{a^2}{2\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



Cách khác: Gọi N là trung điểm của AC, ta dễ dàng chứng minh được $\triangle SMN$ đều.

Có $(\overrightarrow{SM},\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{SM},\overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{MS},\overrightarrow{MN}) = \widehat{NMS} = 60^\circ$.

□

DẠNG 2.2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

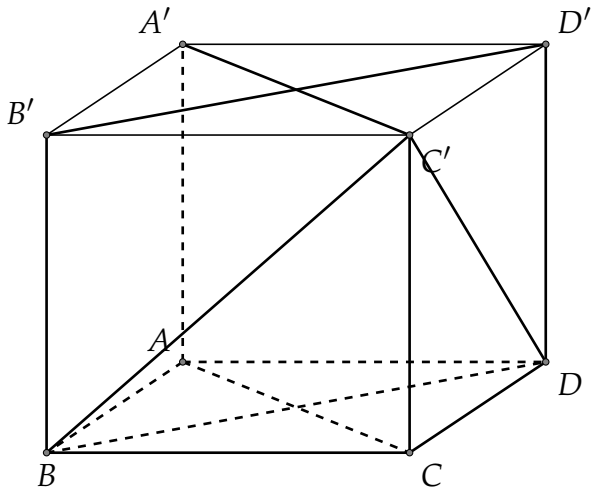
— ***Phương pháp 1:*** *Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý* cos*, công thức trung tuyến).*

— ***Phương pháp 2:*** *Sử dụng tích vô hương của hai vec-tơ.*

VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

① AB và $A'D'$. ② AD và $A'C'$. ③ BC' và $B'D'$.

Lời giải



① Ta có $A'D' \parallel AD$ nên $(AB, A'D') = (AB, AD) = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

② Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(AD, A'C') = (AD, AC) = \widehat{DAC} = 45^\circ$.

③ Ta có $B'D' \parallel BD$ nên $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$.
Ta có $BD = BC' = C'D = AB\sqrt{2}$ nên $\triangle BDC'$ đều, suy ra $\widehat{DBC'} = 60^\circ$.
Vậy $(BC', B'D') = 60^\circ$.

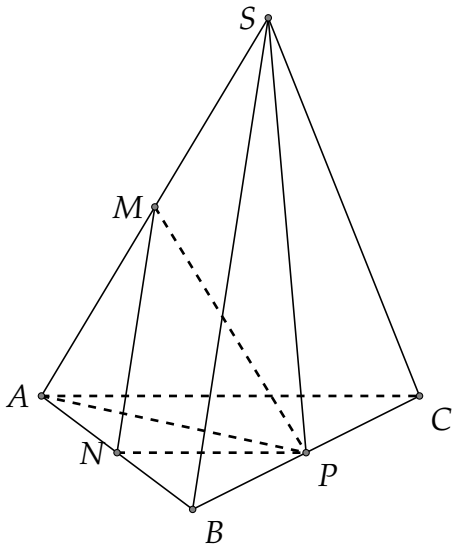
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

Lời giải

Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC.
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.
$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$AP = SP = \dfrac{BC}{2} = a$, $SA = a\sqrt{2}$

Nên $\triangle SAP$ vuông cân tại $P \Rightarrow MP = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $\triangle MNP$ đều $\Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.



Cách khác:
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$
$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -a^2$.
$\cos(AC, SB) = \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow (AC, SB) = 60^\circ$.

□

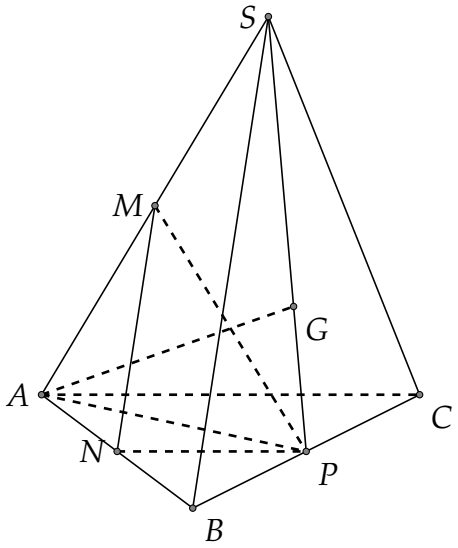
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S, $SA = 2a$.

① Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

② Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Tính góc tạo bởi AG và SC.

Lời giải.



① Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, BC, ta có $MN \parallel SB$, $NP \parallel AC$ nên $(SB, AC) = (MN, NP)$.

$\triangle ABC$ đều nên $AP = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $SP = \dfrac{BC}{2} = a$, mặt khác có $SA = 2a = \sqrt{SP^2 + AP^2}$ nên $\triangle SAP$ vuông tại P.

$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{AC}{2} = a$, $MP = \dfrac{SA}{2} = a$.

$\cos\widehat{MNP} = \dfrac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow (SB, AC) = (MN, NP) = \widehat{MNP} \approx 69°17'$.

② Ta có $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PA})(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PS})$

$= \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 - \dfrac{PS^2}{3} - 0 + 0 = \dfrac{a^2}{3}$.

Có $SC = a\sqrt{2}$, $AG = \sqrt{AP^2 + PG^2} = \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}$.

$\cos(SC, AG) = \dfrac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC}|}{SC \cdot AG} = \dfrac{\dfrac{a^2}{3}}{a\sqrt{2} \cdot \dfrac{2a\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{14}} \Rightarrow (SC, AG) \approx 82°19'$.

□

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD.

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel BD$, $N \in AD$, ta có $(CM, BD) = (CM, MN)$.

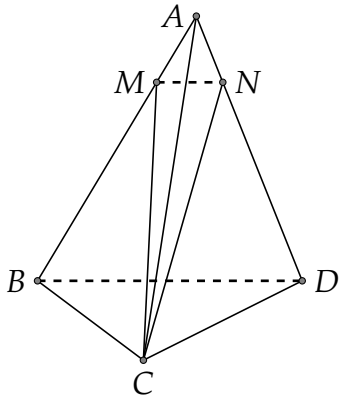
Do $ABCD$ là tứ diện đều nên ta có

$CM = CN = \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot \cos 60°} = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$

$MN = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{a}{4}$.

$\cos\widehat{CMN} = \dfrac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2 \cdot MC \cdot MN} = \dfrac{1}{2\sqrt{13}}$

$\Rightarrow (CM, BD) = (CM, MN) = \widehat{CMN} \approx 82°1'$.



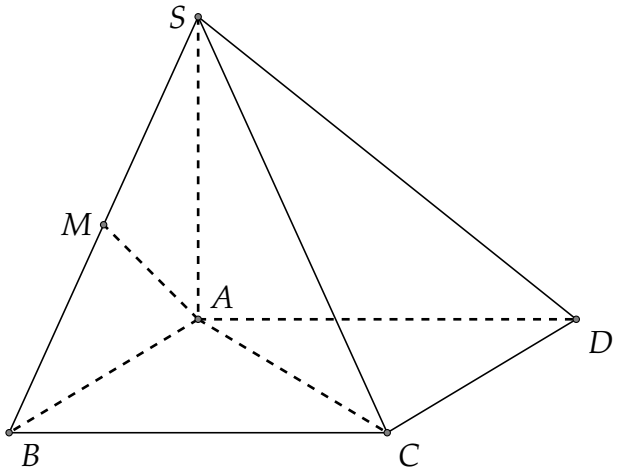
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, các tam giác SAB và SAD cùng vuông góc tại A. Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh SB.

① Tính góc tạo bởi hai vec-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.

② Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC.

Lời giải.



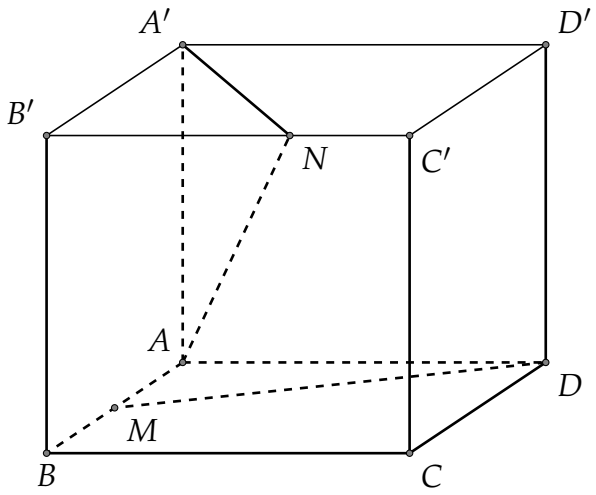
① Có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AS}=a^2$
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$, $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{3}$.
Vậy $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD})=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SD}}{AC\cdot SD}=\dfrac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD})\approx 65^\circ 54'$.

② $\triangle SAB$ vuông tại A nên $AM=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{\sqrt{AB^2+SA^2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Có $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$
Nên $SA\perp AC\Rightarrow SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a$.
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{SC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}^2)$
$=\dfrac{1}{2}\left(a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-0+0-2a^2\right)=-\dfrac{a^2}{2}$
$\cos(AM,SC)=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{SC}|}{AM\cdot SC}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 2a}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow(AM,SC)\approx 73^\circ 13'$.

□

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N=2C'N$. Tính cos của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0 + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0$

Vậy $AA' \perp A'N$ nên $AN = \sqrt{AA'^2 + A'N^2} = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + B'N^2} = \dfrac{a\sqrt{22}}{3}$.

$DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \dfrac{AB^2}{2} + 0 - 0 - 0 - \dfrac{2AD^2}{3} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{2a^2}{3} = -\dfrac{a^2}{6}$

Có $\cos(AN, DM) = \dfrac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM}|}{AN \cdot DM} = \dfrac{\dfrac{a^2}{6}}{\dfrac{a\sqrt{22}}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{110}}$ □

DẠNG 2.3. Sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

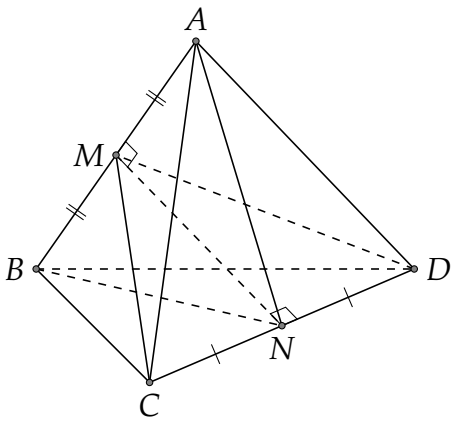
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.*
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*
- *Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.*
- *Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.*

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD, chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ABD đều nên $DM = CM$, do đó ΔMCD cân tại M.
Từ đó suy ra $MN \perp CD$.
Mặt khác $\Delta BCD = \Delta ACD$ nên $BN = AN$, do đó ΔNAB cân tại N.
Từ đó suy ra $NM \perp AB$.
Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng:

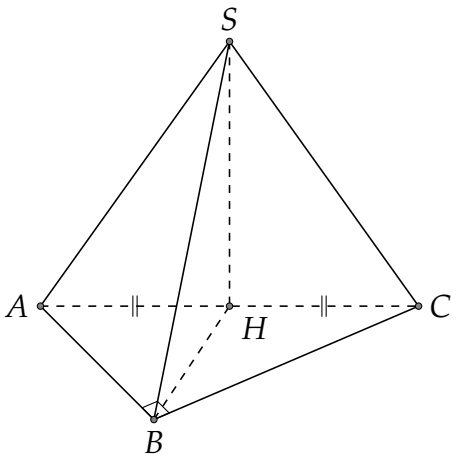
① $SH \perp AC$.

② $AB \perp BC$.

Lời giải

① Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

② Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên ΔSAB đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)
Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có
$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2.\cos 120^\circ = 3a^2$. (2)
Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC, ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.



□

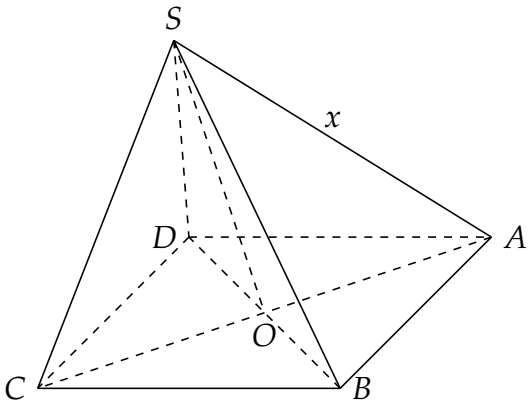
VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

Lời giải

Ta có $ABCD$ là hình thoi, gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra O là trung điểm của AC, BD.
Xét các tam giác SBD và CBD, ta có:

$$\begin{cases} SB = CB \\ SD = CD \\ BD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD = \Delta CBD.$$

Từ đó suy ra $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.
Vậy tam giác SAC vuông tại S hay $SA \perp SC$.



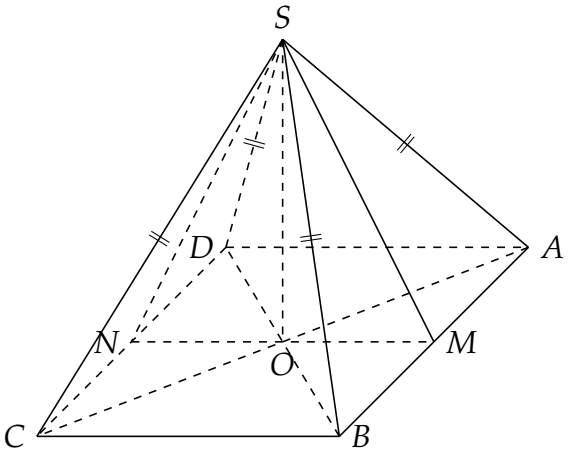
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Do $\Delta SAB = \Delta SCD$ nên ta suy ra $SM = SN$.
Xét tam giác cân SMN có O là trung điểm MN, suy ra $SO \perp MN$.
Mặt khác $AD \parallel MN$ nên $AD \perp SO$.
Tương tự ta chứng minh được $AB \perp SO$.



□

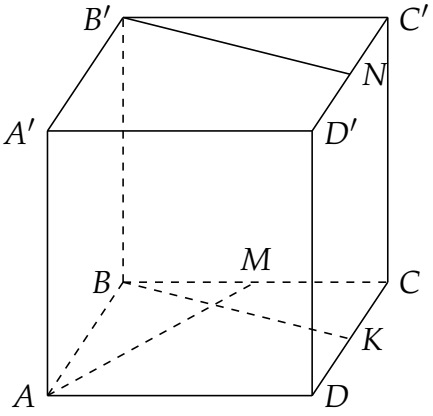
BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

Lời giải.

Gọi K là trung điểm CD, khi đó $BK \parallel B'N$. Ta sẽ chứng minh $BK \perp AM$.
Gọi I là giao điểm của BK và AM. Do $\Delta ABM = \Delta BCK$ nên:

$$\widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \widehat{ABI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ.$$

Do đó $BK \perp AM$ tại I.



□

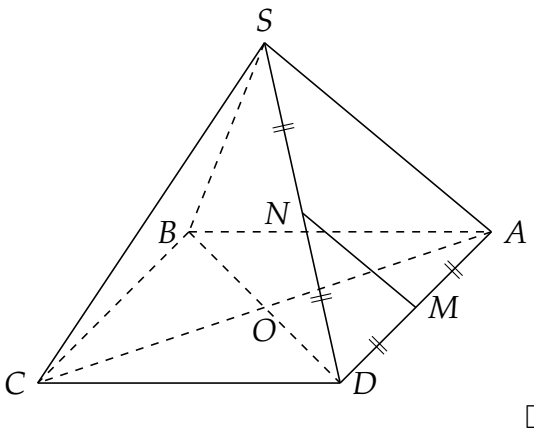
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD, chứng minh rằng $MN \perp SC$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\Delta SAC = \Delta DAC \Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow SA \perp SC.$$

Mặt khác $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp SC$.

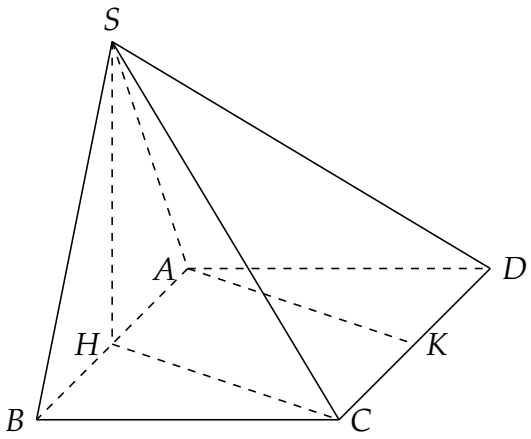


□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

Lời giải.

Ta có $AK \parallel HC$, do đó chỉ cần chứng minh $SH \perp HC$.
Do ΔSAB đều cạnh $2a$ nên $SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
Ta có $HC^2 = HB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$.
Từ đó suy ra $SH^2 + HC^2 = 3a^2 + 5a^2 = 8a^2 = SC^2$.
Theo định lý Pitago ta có $SH \perp HC$.

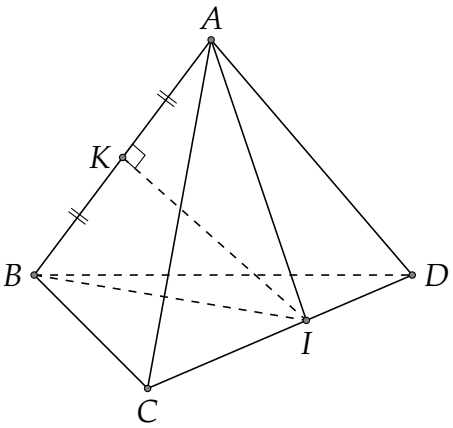


□

BÀI 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a. K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD, chứng minh rằng $IK \perp AB$.

Lời giải.

Xét các tam giác ACI và BCI, ta có:
$$\begin{cases} BC = AC \\ CI \text{ chung} \\ \widehat{BCI} = \widehat{ACI} = 60^\circ \end{cases}.$$
Từ đó suy ra $\Delta ACI = \Delta BCI \Rightarrow IB = IC$.
Xét tam giác cân IAB, ta có K là trung điểm AB nên $IK \perp AB$.



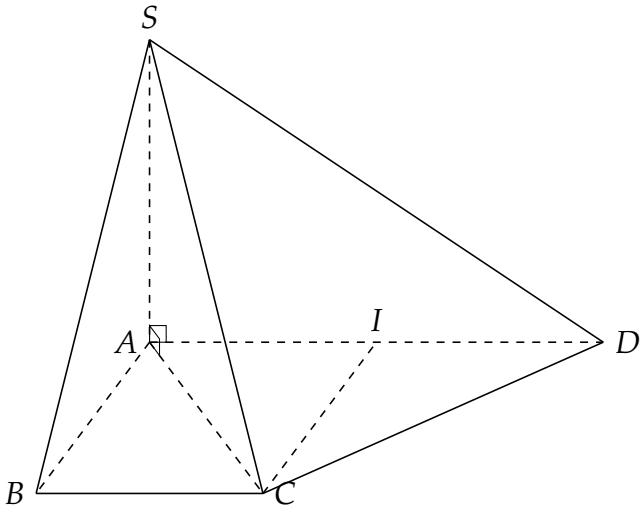
□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a, AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a, do đó ΔCID vuông cân tại I. Từ đó ta có $CD^2 = 2a^2$. (1)
Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác SAC, SAD ta có:
$SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + 4a^2$; (2)
$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + 2a^2$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$SD^2 = SC^2 + CD^2 \Rightarrow SC \perp CD.$$



□

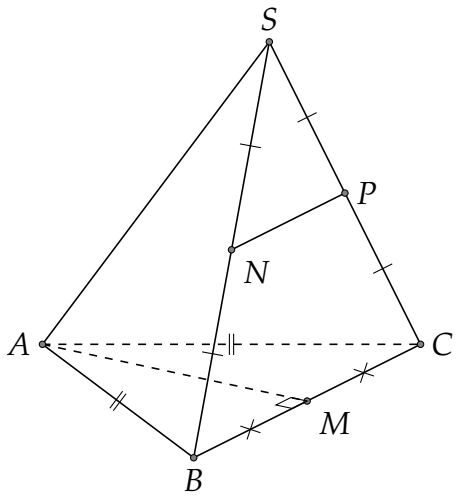
DẠNG 2.4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

Lời giải

Do N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC nên NP là đường trung bình của tam giác SBC, từ đó suy ra $NP \parallel BC$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A, suy ra trung tuyến $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp NP$.

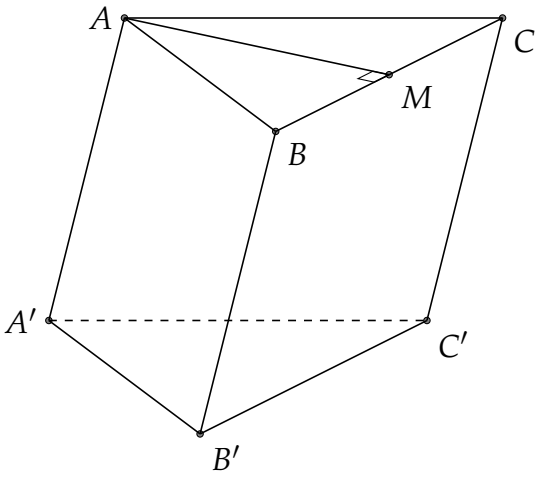


□

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

Lời giải

Do tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành nên $BC \parallel B'C'$. (1)
Mặt khác, do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $AM \perp B'C'$.

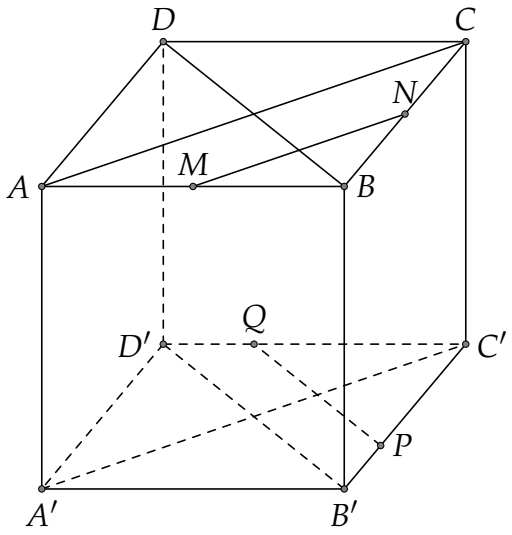


□

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

Lời giải

Do tứ giác $BB'D'D$ là hình chữ nhật, suy ra $BD \parallel B'D'$. (1)
Do $ABCD$ là hình vuông, suy ra $BD \perp AC$. (2)
Từ (1)(2) suy ra $B'D' \perp AC$. (3)
Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $MN \parallel AC$. (4)
Mặt khác, ta có $\dfrac{C'P}{C'B} = \dfrac{C'Q}{C'D'} = \dfrac{x}{a}$, suy ra $PQ \parallel B'D'$. (5)
Từ (3)(4)(5) ta có $MN \perp PQ$.

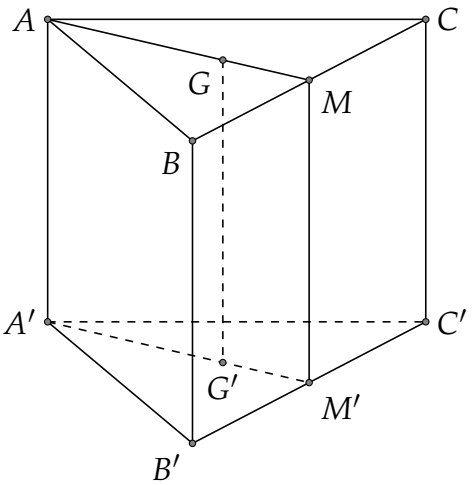


□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai đáy. Chứng minh rằng GG' vuông góc với BC.
Lời giải.

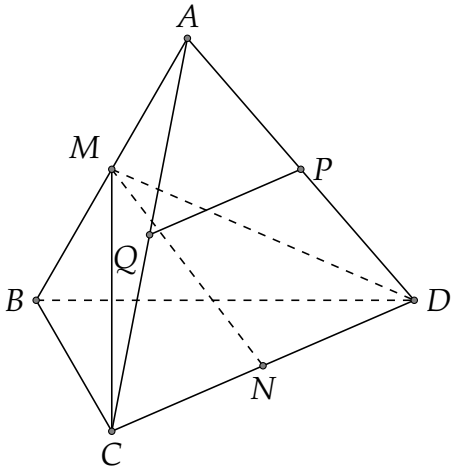
Dễ dàng chứng minh được $GG' \parallel MM'$ và $MM' \perp BC$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



□

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD và AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.
Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\triangle ABC = \triangle ABD$, từ đó ta có $MC = MD$, suy ra $\triangle MCD$ cân tại M, suy ra $MN \perp CD$. (1)
Cũng theo giả thiết ta có PQ là đường trung bình của tam giác ACD, suy ra $PQ \parallel CD$. (2)
Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh.



□

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ $(a > 0)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

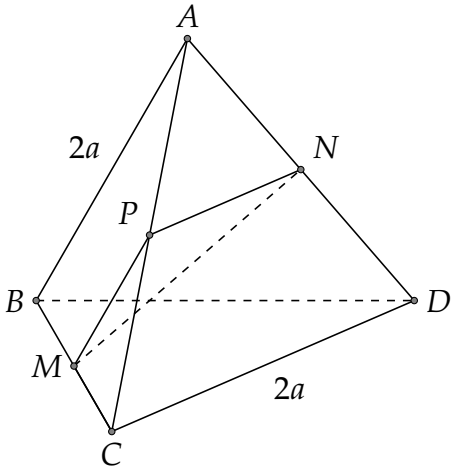
Lời giải.

Lấy P là trung điểm của AC.

Theo tính chất đường trung bình ta có $PN \parallel = \dfrac{1}{2}CD = a$ và $PM \parallel = \dfrac{1}{2}AB = a.$ $(*)$

Từ đó ta có $MP^2 + NP^2 = 2a^2 = MN^2$, vậy tam giác MNP vuông tại P suy ra $MP \perp NP$. $(**)$

Từ $(*)(**)$ ta có $AB \perp CD$.



□

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng MG vuông góc với NP.

Lời giải.

Lấy E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{AG}{AF} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $MG \parallel EF$. (1)

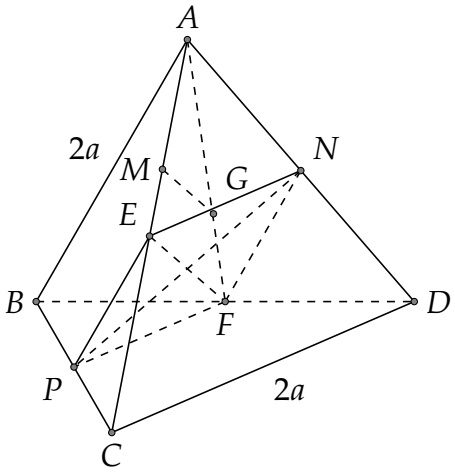
Mặt khác theo tính chất đường trung bình ta có

$$EN \parallel = FP = \frac{1}{2}CD = a$$

$$EP \parallel = FN = \frac{1}{2}AB = a.$$

Từ đó suy ra tứ giác $ENFP$ là hình thoi, suy ra $EF \perp NP$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MG \perp NP$.



□

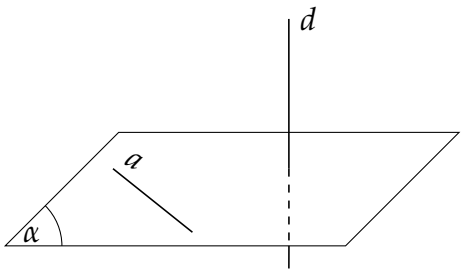
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1.

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).
Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

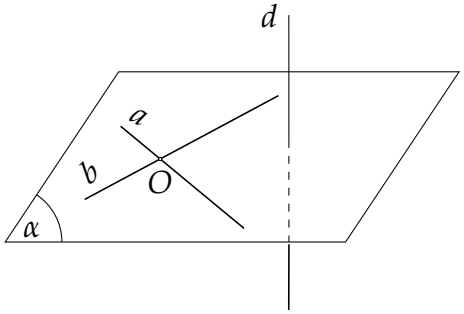


2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí 1. *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.*

⚠ *Tóm tắt định lí.*

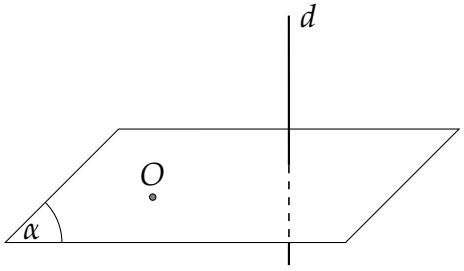
$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = O \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



Hệ quả 1. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

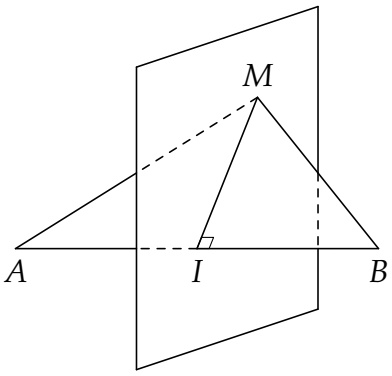
3 TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

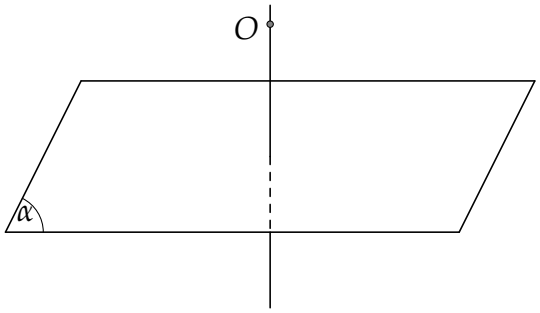


⚠ *Chú ý*

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.



Tính chất 2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



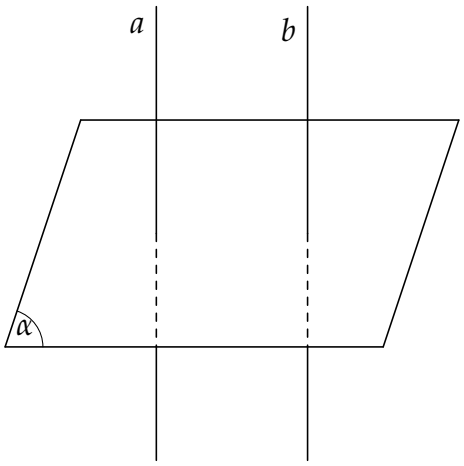
4 LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tính chất 3.

① Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

⚠ *Tóm tắt:*

$$\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$$



② Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

⚠ *Tóm tắt:*

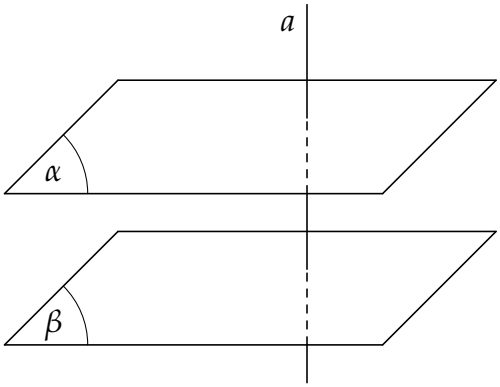
$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \not\equiv b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Tính chất 4.

① Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

⚠ *Tóm tắt:*

$$\begin{cases}(\alpha) \parallel (\beta)\\ a \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$



② Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

⚠ *Tóm tắt:*

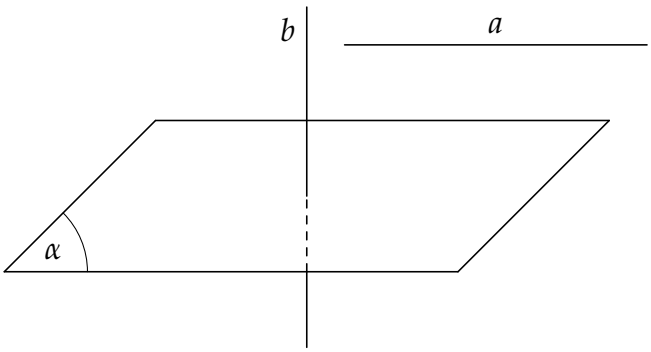
$$\begin{cases}(\alpha) \perp a\\ (\beta) \perp a\\ (\alpha) \not\equiv (\beta)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Tính chất 5.

① Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a.

⚠ *Tóm tắt:*

$$\begin{cases}a \parallel (\alpha)\\ b \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow b \perp a.$$



② Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

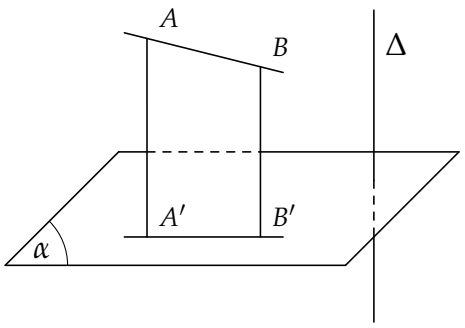
⚠ *Tóm tắt:*

$$\begin{cases}a \not\subset (\alpha)\\ a \perp b\\ (\alpha) \perp b\end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$$

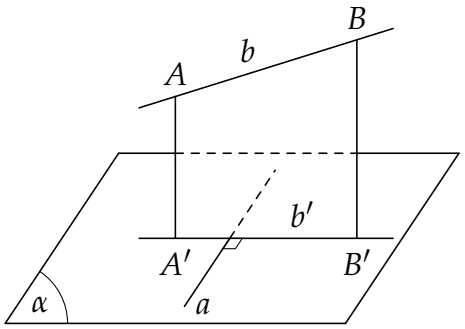
5 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α).



2. Định lí ba đường vuông góc

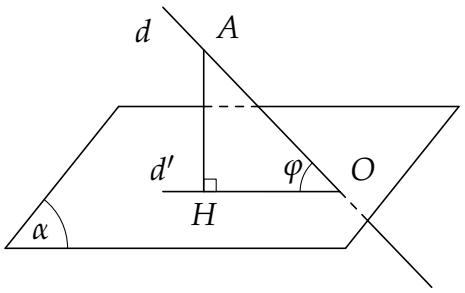


Định lí 2. *Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.*

⚠ *Tóm tắt:*

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \\ b \not\perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu vuông góc } b \text{ trên } (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'.$$

3. Góc Giữa đường thẳng và mặt phẳng



Định nghĩa 2. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).
Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.
Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

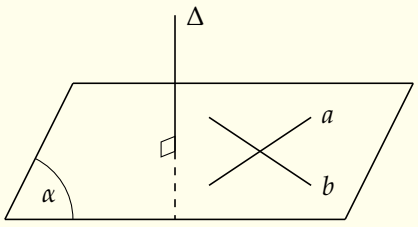
⚠ ***Chú ý:*** *Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.*

B CÁC DẠNG TOÁN

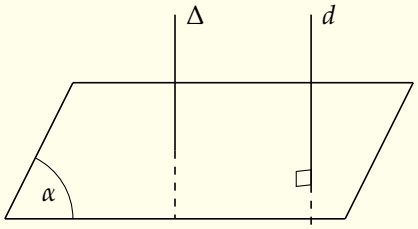
DẠNG 3.1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α), ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

① *Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (α).*

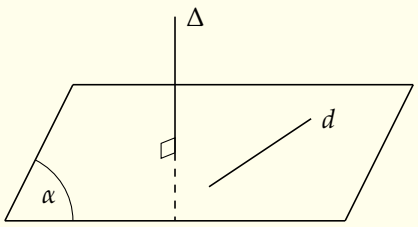


② *Chứng minh Δ song song với đường thẳng (d), trong đó (d) vuông góc với (α).*

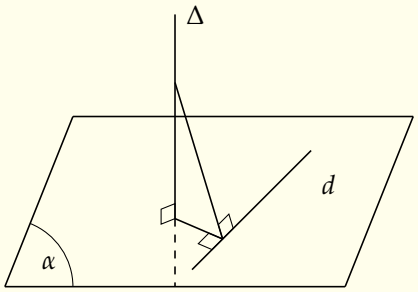


Để chứng minh đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng (d), ta thực hiện theo một trong các cách sau:

① *Chứng minh (Δ) vuông góc với mặt phẳng (α) chứa (d).*



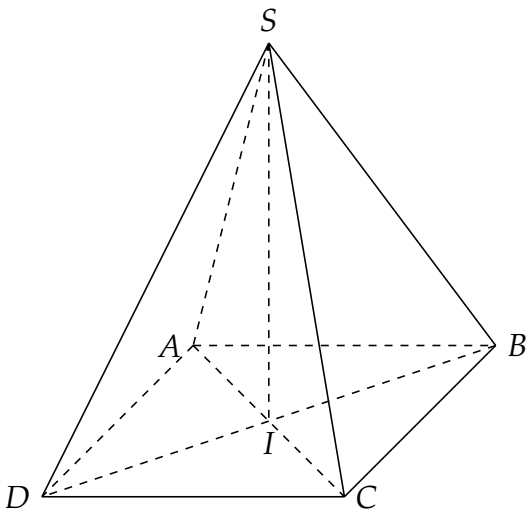
② *Sử dụng định lý ba đường vuông góc.*



③ *Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì ta có thể sử dụng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng.*

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

Lời giải



Để chứng minh SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ ta cần chứng minh SI vuông góc với hai cạnh cắt nhau trong mặt phẳng đó.
Theo giả thiết, $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là tam giác cân tại S. Hơn nữa $I = AC \cap BD$ là trung điểm của

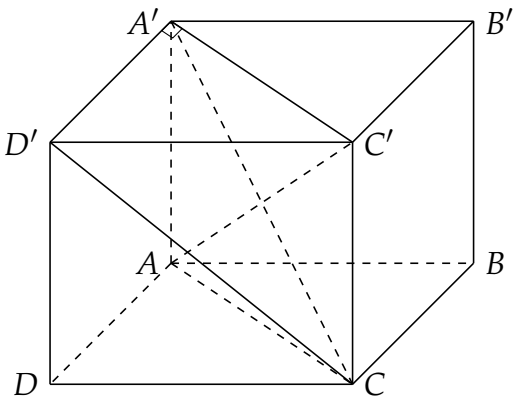
AC và BD (do $ABCD$ là hình vuông). Từ đó ta có:

$$\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \\ AC \cap BD = I \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Vậy $SI \perp (ABCD)$. □

VÍ DỤ 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A, $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.

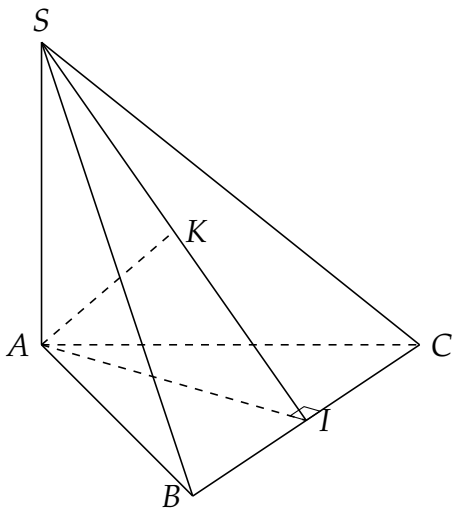
Lời giải



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AA'C'C \text{ là hình chữ nhật} \\ AA' = A'C' \end{cases}$
$\Rightarrow AA'C'C$ là hình vuông $\Rightarrow AC' \perp A'C$ (1)
Lại có $AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp A'D'$. Lại có $\triangle D'A'C'$ vuông tại A' nên $A'D' \perp A'C'$. Từ đó ta được
$A'D' \perp (AA'C'C) \Rightarrow A'D' \perp AC'$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $AC' \perp (A'D'C)$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI. Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

Lời giải



Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a,I là trung điểm BC suy ra $AI \perp BC$ (1) và $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$. (3)
Tam giác SAI có $SA = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SAI$ là tam giác cân tại A, hơn nữa K là trung điểm SI suy ra $AK \perp SI$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $AK \perp (SBC)$. □

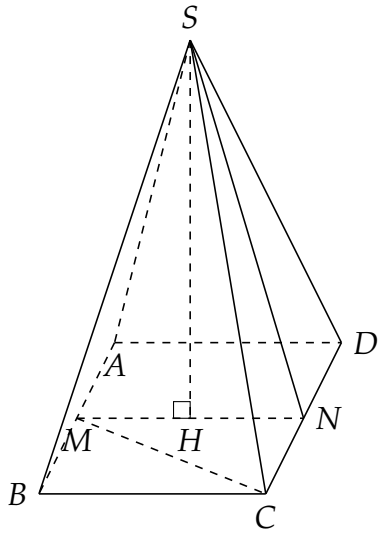
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

① Chứng minh $SM \perp (SCD)$, $SD \perp MC$.

② Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên MN. Chứng minh $SH \perp BN$. Tính SH.

Lời giải.



① ΔSAB đều cạnh a có M là trung điểm của AB nên $SM \perp AB$ và $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔSCD vuông cân tại S có $CD = a$, N là trung điểm CD suy ra $SN = \dfrac{a}{2}$.

Xét ΔSMN có $SM^2 + SN^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = a^2 = MN^2$.

Suy ra $SM \perp SN$. Mà $SM \perp CD$ (vì $CD \parallel AB$). Do đó $SM \perp (SCD)$.
Có $SD \perp SM$ và $SD \perp SC$ nên $SD \perp MC$.

② Có $CD \perp MN$, $CD \perp SN$ suy ra $CD \perp (SMN) \Rightarrow CD \perp SH$.
Mà $SH \perp MN$ nên $SH \perp (ABCD)$. Do đó $SH \perp MC$.

$$SH = \frac{SM.SN}{MN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

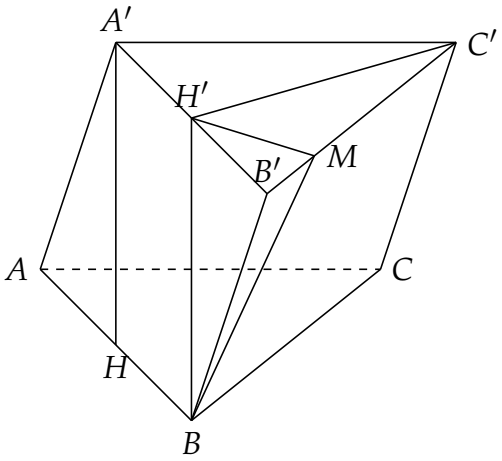
□

BÀI 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng $2a$. Biết hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm H của AB. Gọi H' là trung điểm của $A'B'$, M là điểm thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'C' = 4B'M$.

① Chứng minh $B'C' \perp (BMH')$.

② Tứ giác $CHH'C'$ là hình gì? Tại sao? Tính CH'.

Lời giải.



① $\Delta A'B'C'$ đều nên $H'M$ song song với đường cao kẻ từ A', do đó $H'M \perp B'C'$.
Lại có $BH' \parallel A'H$ mà $A'H \perp (ABC)$ nên $BH' \perp BC$. Suy ra $BH' \perp B'C'$.
Do đó $B'C' \perp (BMH')$.

② Có $CH \perp AB$; $CH \perp A'H$ nên $CH \perp (ABB'A')$, suy ra $CH \perp HH'$.
Hình bình hành $CHH'C'$ có $\widehat{H'HC} = 90^\circ$ nên $CHH'C'$ là hình chữ nhật.

$$CH' = \sqrt{HH'^2 + CH^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

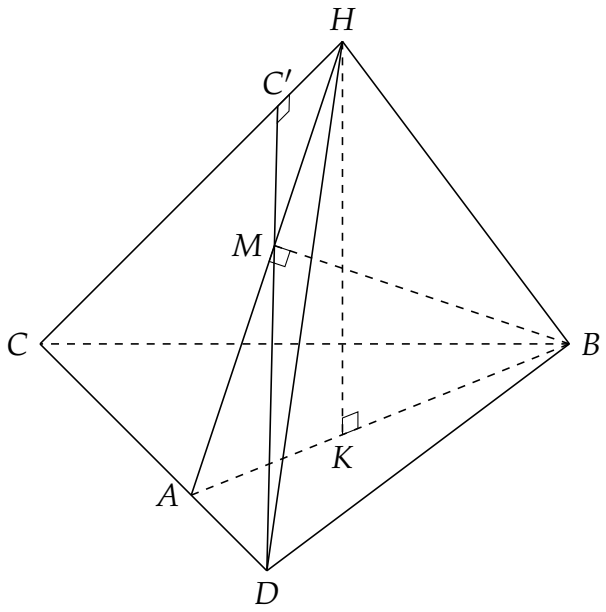
□

BÀI 3. Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác MAB vuông tại M . Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, ta lấy hai điểm C, D khác phía so với A. Gọi C' là hình chiếu của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC'.

① Chứng minh $CC' \perp (MBD)$.

② Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Chứng minh K là trực tâm tam giác BCD.

Lời giải.



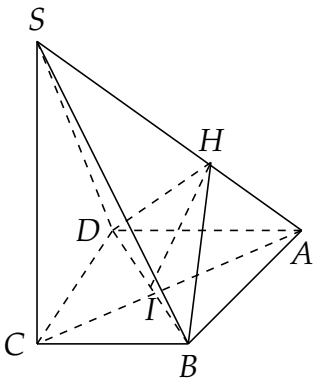
① Có $BM \perp AM$, $BM \perp CD \Rightarrow BM \perp (CC'D) \Rightarrow BM \perp CC'$.
Lại có $CC' \perp MD$, suy ra $CC' \perp (MBD)$.

② Có $HK \perp AB$, $HK \perp AD$, suy ra $HK \perp BD$.
Theo ý trên, lại có $CH \perp BD$. Do đó $CK \perp BD$.
ΔCBD có $BK \perp CD$, $CK \perp BD$ nên nhận K làm trực tâm.

□

BÀI 4. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm I, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$. Cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đoạn SA là hình gì?

Lời giải.



Vì $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$.
Vì $SC \perp (ABCD)$ nên $SC \perp BD$.
Suy ra $BD \perp (SAC)$, do đó $BD \perp SA$.
Trong mặt phẳng (SAC) hạ $IH \perp SA$ tại H, suy ra $SA \perp (BDH)$. Nối BH, DH, ta được mặt phẳng (α) chính là tam giác DHB.
Xét hai tam giác vuông AHI và ACS đồng dạng vì có chung góc nhọn A nên:

$$\frac{IH}{AI} = \frac{SC}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SC}{AS}. \ (*)$$

Vì $BD = a$ nên ΔABD là tam giác đều, do đó:

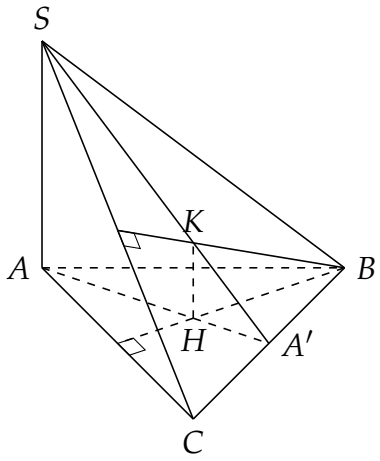
$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}.$$

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Từ $(*)$ ta có $IH = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BD}{2}$.
Tam giác BHD có trung tuyến IH ứng với cạnh BD bằng $\dfrac{BD}{2}$ nên đó là tam giác vuông tại H.
□

BÀI 5. Tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng $HK \perp (SBC)$.

Lời giải.



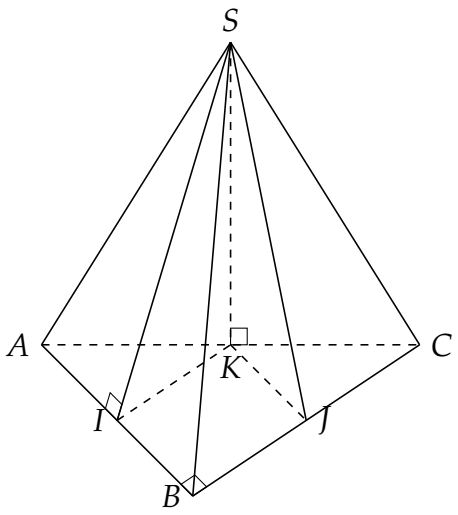
Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $BK \perp SC$.(1)
Có H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$ và $SA \perp (ABC)$ nên $BH \perp SA$. Do đó $BH \perp (SAC)$ nên $BH \perp SC$.(2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (BHK)$, nên $SC \perp HK$. (*)
Gọi A' là giao điểm của AH và BC.
Có $AA' \perp BC$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAA')$, suy ra $BC \perp SA'$.
Do đó có SA' là đường cao của tam giác SBC nên SA' đi qua K.
Vậy $BC \perp HK$ (**).
Từ (*) và (**) suy ra $HK \perp (SBC)$.
□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $\triangle SAB, \triangle SAC$ cân tại S. I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng:

① $SK \perp (ABC)$.

② $BC \perp (SKJ)$.

Lời giải.



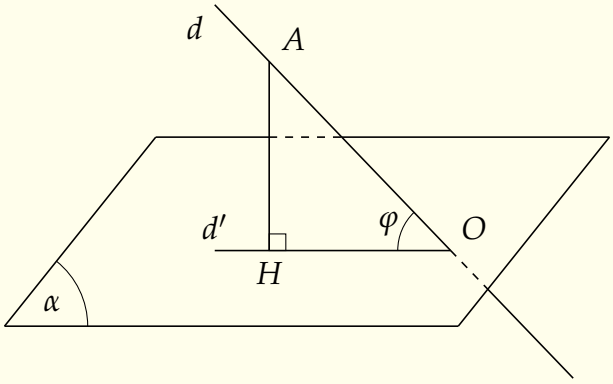
① Ta có $\triangle SAB$ cân tại S, I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. (1)
Lại có IK là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $IK \parallel BC \Rightarrow IK \perp AB$ (2) (do $\triangle ABC$ vuông tại B.)
Từ (1) và (2) ta có $AB \perp (SIK) \Rightarrow AB \perp SK$. (3)
Tam giác SAC cân tại S, K là trung điểm AC nên $SK \perp AC$. (4)
Từ (3) và (4) ta có $SK \perp (ABC)$.

② Theo (a) ta có $SK \perp (ABC) \Rightarrow SK \perp BC$.
Lại có KJ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $KJ \parallel AB \Rightarrow KJ \perp BC$.
Vậy ta được $BC \perp (SKJ)$.

□

DẠNG 3.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau

① *Xác định giao điểm O của d và (P).*

② *Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.*

⚠ $0^\circ \leq (d, (P)) \leq 90^\circ$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

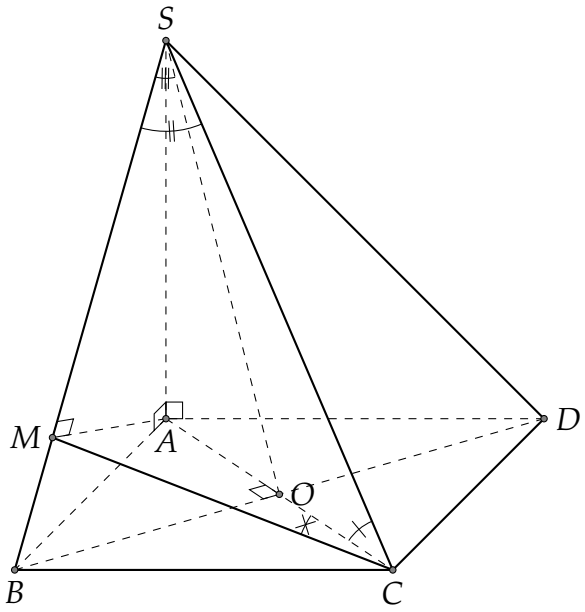
① SC và $(ABCD)$.

② SC và (SAB).

③ SB và (SAC).

④ AC và (SBC).

Lời giải



① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.
Trong tam giác SCA, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

② Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB)) = (SC,SB) = \widehat{CSB}$.
Trong tam giác SCB, ta có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC,(SAB)) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

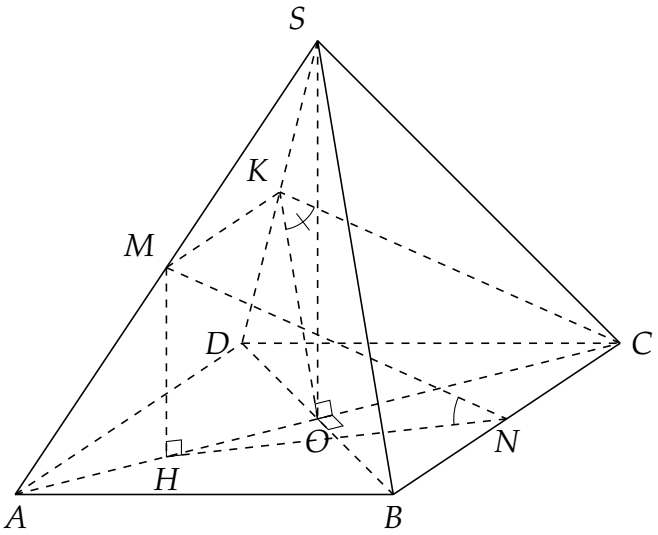
③ Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC).
Do đó $(SB,(SAC)) = (SB,SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác SBO, ta có $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB,(SAC)) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

④ Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M. Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC).
Suy ra $(AC,(SBC)) = (AC,MC) = \widehat{ACM}$.
Trong tam giác SAB, ta có $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM, ta có $\sin\widehat{ACM} = \dfrac{MA}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC,(SBC)) = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải



Gọi H là trung điểm AO. Ta có $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$, suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ABCD)$. Do đó $(MN, (ABCD)) = (MN, KN) = \widehat{MNK} = 60^\circ$.

Trong tam giác HCN, ta có $HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC.CN.\cos\widehat{HCN}$, suy ra $HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Mà trong tam giác MNH, ta có $\sqrt{3} = \tan\widehat{MNH} = \dfrac{MH}{HN}$ nên $MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi K là trung điểm SD.

Ta có $MKCN$ là hình bình hành nên MN song song KC. Do đó $(MN, (SBD)) = (KC, (SBD))$.

Mà $CO \perp (SBD)$ tại O (do $CO \perp DO$ và $CO \perp SO$) nên KO là hình chiếu vuông góc của KC lên (SBD). Suy ra $(KC, (SBD)) = (KC, KO) = \widehat{CKO}$.

Ta có $OK = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{OD^2 + OS^2} = a\sqrt{2}$.

Mặt khác, trong tam giác COK, ta có $\tan\widehat{CKO} = \dfrac{OC}{OK} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $(KC, (SBD)) = \arctan\widehat{CKO} = \arctan\dfrac{1}{2} \approx 26^\circ 33'$. □

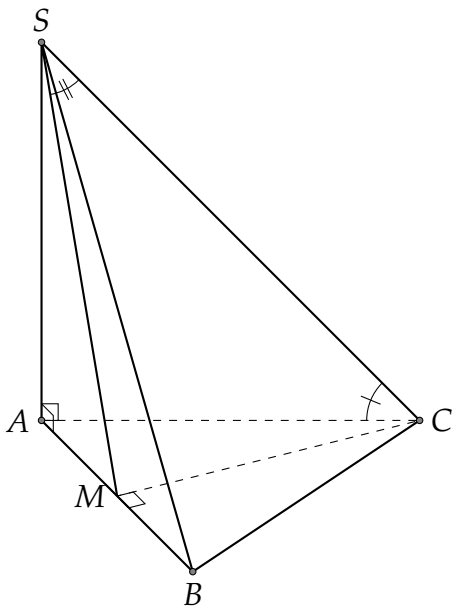
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

① SC và (ABC).

② SC và (SAB).

Lời giải.



① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) nên $(SC,(ABC))=(SC,AC)=\widehat{SCA}$.
Ta có $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=2$ nên $(SC,(ABC))=\arctan 2\approx 63^\circ$.

② Gọi M là trung điểm AB. Vì $\begin{cases}CM\perp AB\\ CM\perp SA\ (\text{vì } SA\perp(ABC))\end{cases}$ nên $CM\perp(SAB)$ tại M.
Suy ra SM là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
Do đó $(SC,(SAB))=(SC,SM)=\widehat{CSM}$.
Trong tam giác SMC, ta có $\tan\widehat{CSM}=\dfrac{MC}{SM}=\dfrac{MC}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2+\frac{a^2}{4}}}=\dfrac{\sqrt{51}}{17}$.
Vậy $(SC,(SAB))=\arctan\dfrac{\sqrt{51}}{17}\approx 23^\circ$.

□

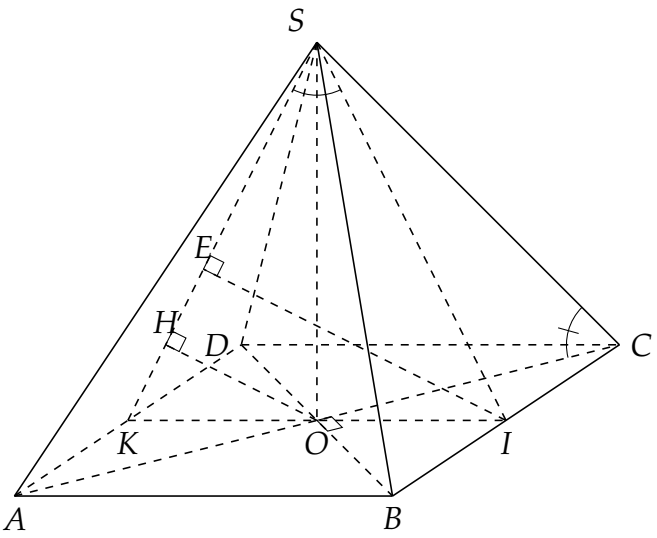
BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO=a\sqrt{6}$.

① Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.

② Tính góc giữa SO và (SAD).

③ Gọi I là trung điểm BC. Tính góc giữa SI và (SAD).

Lời giải.



① Vì OC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên $(SC,(ABCD)) = (SC,OC) = \widehat{SCO}$.
Trong tam giác SOC, ta có $\tan\widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} = 2\sqrt{3}$, do đó $(SC,(ABCD)) = \arctan 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$.

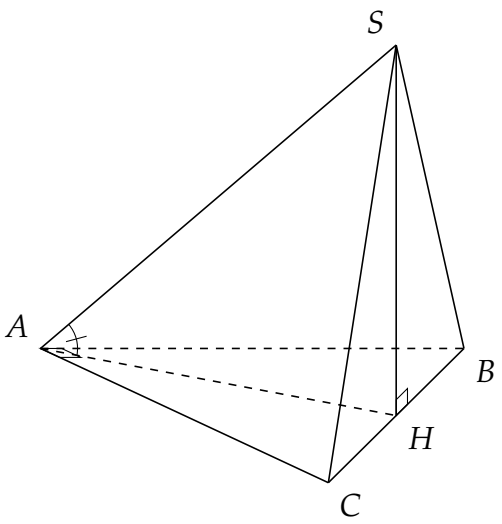
② Gọi K là trung điểm AD và H là hình chiếu vuông góc của O lên SK. Ta có $OH \perp SK$ và $OH \perp AD$ (vì $AD \perp (SKO)$) nên $OH \perp (SAD)$, do đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SAD), suy ra SH là hình chiếu vuông góc của SO lên (SAD).
Do đó $(SO,(SAD)) = (SO,SH) = \widehat{HSO}$.
Trong tam giác SOK, ta có $\tan\widehat{HSO} = \tan\widehat{KSO} = \dfrac{OK}{OS} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $(SO,(SAD)) = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{12} \approx 12^\circ$.

③ Trong tam giác SKI, kẻ IE vuông góc SK tại E. Lúc đó $IE \perp (SAD)$ (do $IE \parallel OH$). Suy ra SE là hình chiếu vuông góc của SI lên (SAD).
Do đó $(SI,(SAD)) = (SI,SE) = \widehat{ISE} = 2\widehat{HSO} \approx 24^\circ$.

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC).

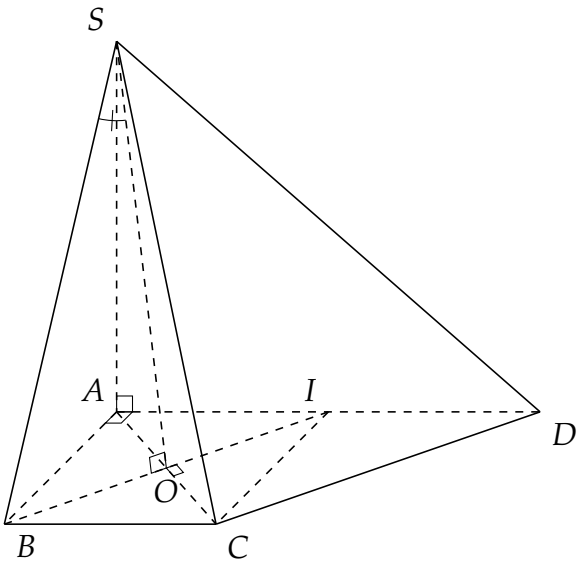
Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Lúc đó ba tam giác SAH, SBH và SCH bằng nhau (vì chúng là 3 tam giác vuông có chung cạnh SH và có ba cạnh SA, SB, SC bằng nhau).
Suy ra $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC, suy ra H là trung điểm BC.
Do đó HA là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC), suy ra $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.
Ta có $\cos SAH = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\frac{BC}{2}}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $(SA, (ABC)) = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 55°$. □

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải.



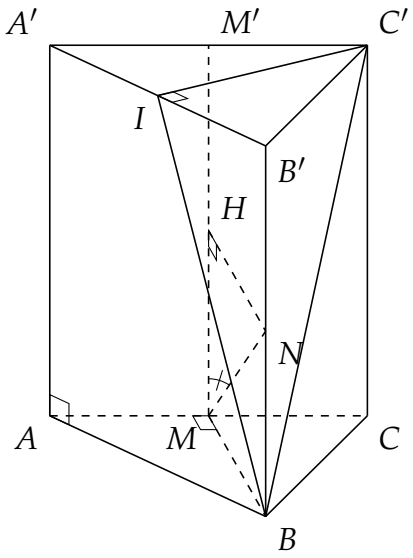
Gọi I là trung điểm AD. Lúc đó $ABCI$ là hình vuông, suy ra $BI \perp AC$ (tại O).
Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $BI \perp SA$. Do đó $BI \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC), suy ra $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.
Trong tam giác SBO, ta có $\sin \widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{BI}{2}}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, suy ra $(SB, (SAC)) = \arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{6} \approx 24°$. □

BÀI 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC). Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc $30°$.

① Tính AA'.

② Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB'. Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

Lời giải.



① Gọi I là trung điểm $A'B'$. Ta có $C'I \perp A'B'$ và $C'I \perp BB'$ nên $C'I \perp (ABB'A')$ tại I. Do đó IB là hình chiếu vuông góc của $C'B$ lên $(ABB'A')$. Suy ra $(BC', (ABB'A')) = \widehat{C'BI} = 30^\circ$.
Trong tam giác $C'IB$, ta có $\tan \widehat{C'BI} = \dfrac{IC'}{IB}$, suy ra $IB = \dfrac{3a}{2}$. Khi đó $AA' = BB' = \sqrt{IB^2 - IB'^2} = a\sqrt{2}$.

② Gọi M' là trung điểm $A'C'$ và H là trung điểm MM'.
Ta có $BM \perp (ACC'A')$ (vì $BM \perp AC$ và $BM \perp AA'$) mà $HN \parallel BM$ nên $HN \perp (ACC'A')$ tại H. Suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ACC'A')$.
Do đó $(MN, (ACC'A')) = (MN, MH) = \widehat{NMH}$. Mà trong tam giác NMH, ta có $\tan \widehat{NMH} = \dfrac{HN}{MH} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Vậy $(MN, (ACC'A')) = \arctan \dfrac{\sqrt{6}}{2} \approx 51^\circ$.

□

DẠNG 3.3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước

Để xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với Δ cho trước, ta thực hiện như sau:

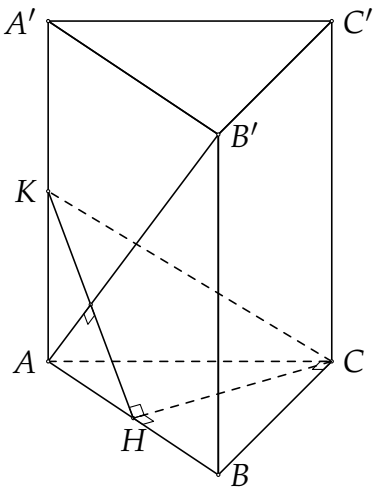
— *Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với Δ trong đó có ít nhất một đường thẳng đi qua M. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (α). Sau đó ta cần tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối đa diện.*

— *Nếu có sẵn hai đường thẳng chéo nhau hoặc cắt nhau a, b vuông góc với Δ thì ta dựng (α) đi qua M và song song với a, b.*

VÍ DỤ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C, $CA = 2a$ và mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp AB'$.
Dựng $HK \perp AB'$, với K thuộc cạnh AA'.
Suy ra thiết diện là tam giác CHK và tam giác CHK vuông tại H.
$S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH \cdot HK$.
Trong $\triangle ABC$, $CH = \dfrac{AB}{2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\triangle AHK$ vuông cân tại A và $HK = \dfrac{A'B \cdot \sqrt{2}}{2} = 2a$.
Vậy $S_{CHK} = \dfrac{1}{2}CH \cdot HK = \dfrac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2}$.

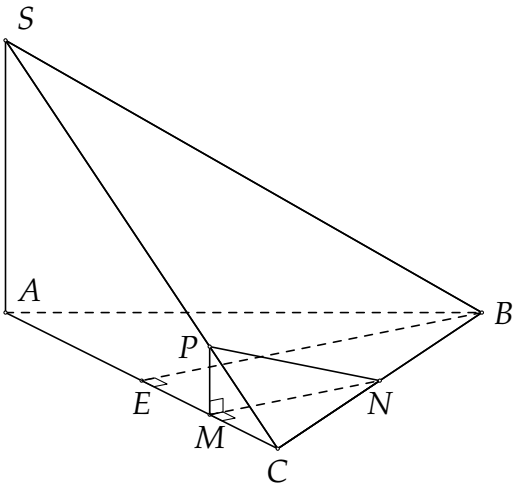


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow BE \perp AC$.
Trong (ABC), dựng $MN \perp AC$, với N thuộc cạnh $BC \Rightarrow MN \parallel EB$.
Trong (SAC), dựng $MP \perp AC$, với P thuộc cạnh $SC \Rightarrow MP \parallel SA$.
Suy ra thiết diện là tam giác MPN và tam giác MPN vuông tại M.
$S_{MPN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot PM$.
Ta có $\triangle SAC \backsim \triangle PMC \Rightarrow \dfrac{PM}{SA} = \dfrac{CM}{CA}$
$\Rightarrow PM = \dfrac{SA \cdot CM}{CA} = a \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{a}{4}$.
Ta có MN là đường trung bình của tam giác $\triangle BEC$
$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}EB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Vậy $S_{MPN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot PM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với cạnh SB. Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải.

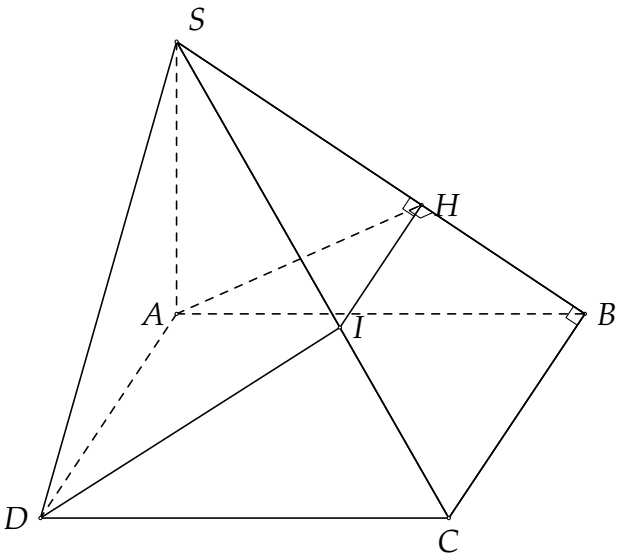
Trong (SBC), dựng $HI \perp SB$, với I thuộc cạnh $SC \Rightarrow HI \parallel BC$ (Do $BC \perp SB$).

Ta có $\begin{cases} HI \subset (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \\ HI \parallel BC \\ D \text{ là điểm chung của } (\alpha), (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = AD \parallel BC \parallel HI$.

Suy ra thiết diện là tứ giác $AHID$.

Ta có $\begin{cases} HI \parallel BC \parallel AD \\ DA \perp AH \end{cases}$ nên tứ giác $AHID$ là hình thang vuông tại A và H.



$S_{AHID} = \dfrac{1}{2}(AD + HI) \cdot AH$.

Trong $\triangle SAB$, ta có:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

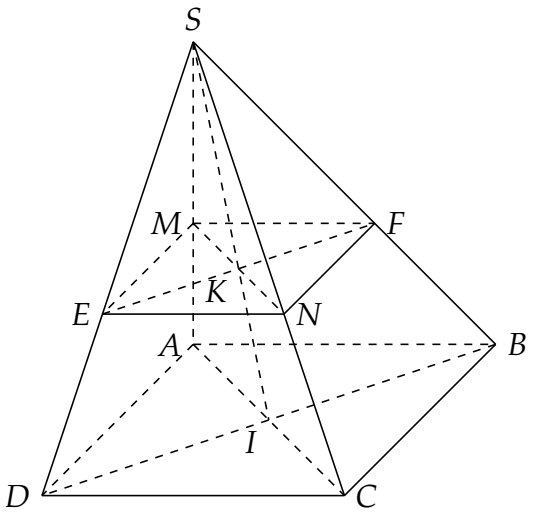
Ta có $\triangle SHI \backsim \triangle SBC \Rightarrow \dfrac{HI}{BC} = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SH \cdot SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{3a^2}{3a^2 + a^2} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow HI = \dfrac{3}{4} \cdot BC = \dfrac{3a}{4}$.

Vậy $S_{AHID} = \dfrac{1}{2}(AD + HI) \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot \left(a + \dfrac{3a}{4}\right) \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7a^2\sqrt{3}}{16}$. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $SA \perp (ABCD), M \in SA$. Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với SA. Xác định thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$. Trong mặt phẳng (SAD), qua $M \in SA$ kẻ $ME \parallel AD$ cắt SD tại E, khi đó $ME \perp SA$.

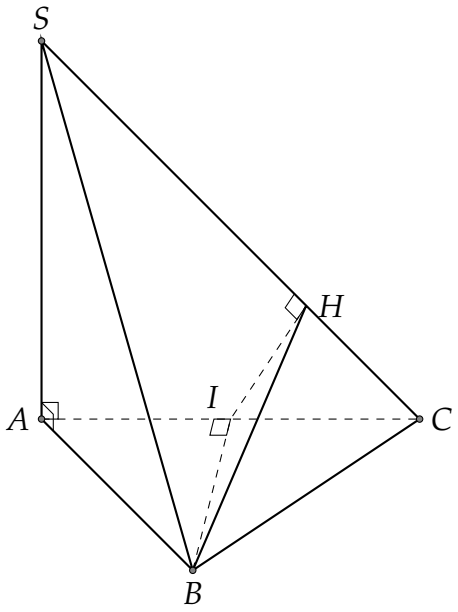
Tương tự trong mặt phẳng (SAB) kẻ $MF \parallel AB \Rightarrow MF \perp SA$.

Vì $E \in SD, F \in SB \Rightarrow EF \subset (SBD)$. Gọi K là giao của SI và EF, khi đó $K \in (SAC)$. Lại có $M \in SA \Rightarrow M \in (SAC)$. Từ đó ta có $MK \subset (SAC)$ suy ra $MK \cap SC = N$.

Ta thấy $M \in (MENF)$; $ME \perp SA, MF \perp SA \Rightarrow SA \perp (MENF)$, hơn nữa qua M có một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với SA do đó $(P) \equiv (MENF)$. Vậy $MENF$ là thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện đó.

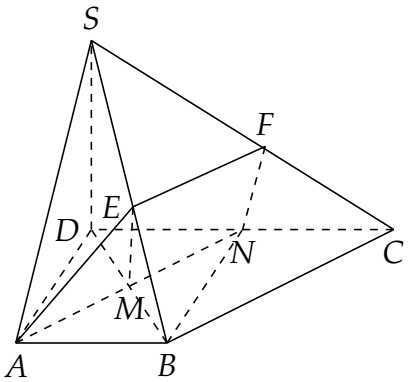
Lời giải.



Gọi I là trung điểm AC, ta có $BI \perp AC$. Mà $BI \perp SA$ nên $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SC. Lúc đó $SC \perp (BIH)$. Do đó tam giác BIH là thiết diện cần tìm.
Vì $BI \perp (SAC)$ nên $BI \perp IH$, suy ra tam giác IBH vuông tại I.
Ta có $\Delta CHI \backsim \Delta CAS$ nên $\dfrac{IH}{SA} = \dfrac{CI}{CS}$, suy ra $IH = \dfrac{CI.SA}{CS} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Do đó $S_{\Delta BIH} = \dfrac{1}{2}IH.IB = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$. □

C BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D và $AD = AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. M là trung điểm của BD. Tìm thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc SB với hình chóp $S.ABCD$.
Lời giải.

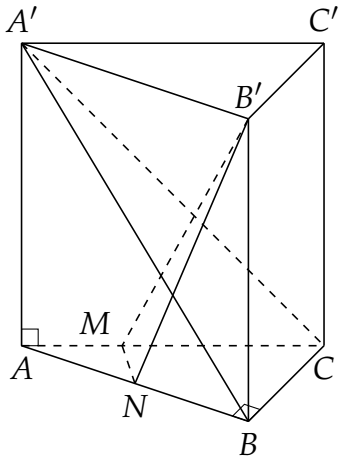


ΔABD vuông cân tại A nên $BD = a\sqrt{2}$.
ΔBDC có $BD = BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BDN} = 45^\circ$ nên ΔBDC vuông cân tại B.
Gọi N là trung điểm của CD. Vì ΔBDC vuông cân tại B nên $DN = BN = NC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a$.
Do đó $ABND$ là hình vuông. Suy ra $AN \perp BD$.
Ta có $SD \perp (ABCD)$ và $AN \perp BD$ nên $AN \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc).

Trong mặt phẳng (SBD), ta hạ $ME \perp SB$ tại E. Khi đó mặt phẳng (AEN) vuông góc với SB chính là mặt phẳng (α).
Ta có $AN \parallel BC$ (cùng vuông góc DB) nên $(AEN) \parallel BC$. Do đó (AEN) cắt (SBC) theo một giao tuyến song song với BC.
Trong mặt phẳng (SBC), kẻ đường thẳng qua E song song với BC và cắt SC tại F.
Thiết diện của hình chóp $(S.ABCD)$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình tứ giác $AEFN$.
□

BÀI 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = BC = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và ΔABC vuông tại B. Điểm M nằm trên cạnh AC sao cho $AM = \dfrac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng $B'M \perp A'C$.

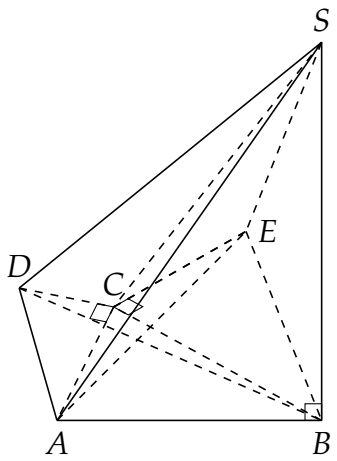
Lời giải.



Gọi N là trung điểm AB.
ΔABC vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{BB'}{A'B'} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Ta lại có $\widehat{NBB'} = \widehat{BB'A'}$ (cùng là góc vuông) nên $\Delta NBB' \sim \Delta BB'A'$.
Suy ra $\widehat{B'NB} = \widehat{A'BB'} \Rightarrow \widehat{B'NB} + \widehat{A'BB'} = \widehat{A'BB'} + \widehat{A'BB'} = 90^\circ$. Vì vậy $B'N \perp A'B$ (1).
Ta có $\begin{cases} BB' \perp BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABB'A')$ (2).
Từ $(1), (2)$ theo định lý ba đường vuông góc ta có $B'N \perp A'C$ (3).
Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AC}{3AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{2AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. Suy ra $\Delta AMN \sim \Delta ABC$.
Vì vậy $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ hay $MN \perp AC$.
Mặt khác $(ACC'A) \perp (ABC)$ nên suy ra $MN \perp (ACC'A') \Rightarrow MN \perp A'C$ (4).
Từ $(3), (4)$ ta suy ra $A'C \perp (B'MN) \Rightarrow A'C \perp B'M$. □

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB \perp (ABC)$. Trên mặt phẳng (ABC), dựng về phía ngoài ΔABC các điểm D, E sao cho ΔACD và ΔECB vuông cân tại C. Chứng minh rằng $SA \perp BD$.

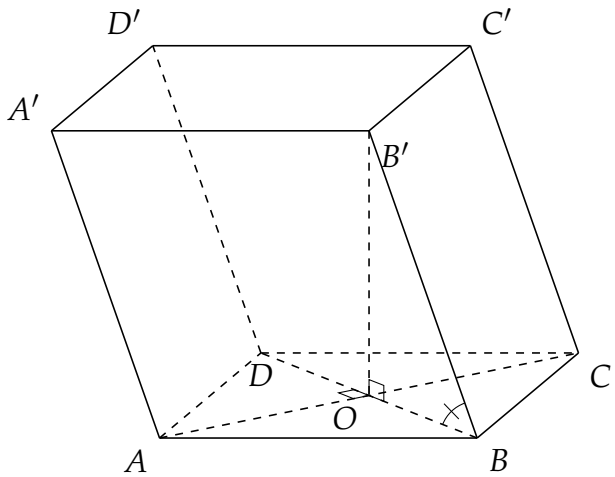
Lời giải.



Xét phép quay $Q_C^{\frac{\pi}{2}}$ biến D thành A, biến B thành E. Do đó phép quay $Q_C^{\frac{\pi}{2}}$ biến DB thành AE và vì vậy ta có $BD \perp AE$.
Ta có $SB \perp (ABC)$ và $BD \perp AE$ nên theo định lý ba đường vuông góc ta suy ra $SA \perp BD$. □

BÀI 7. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

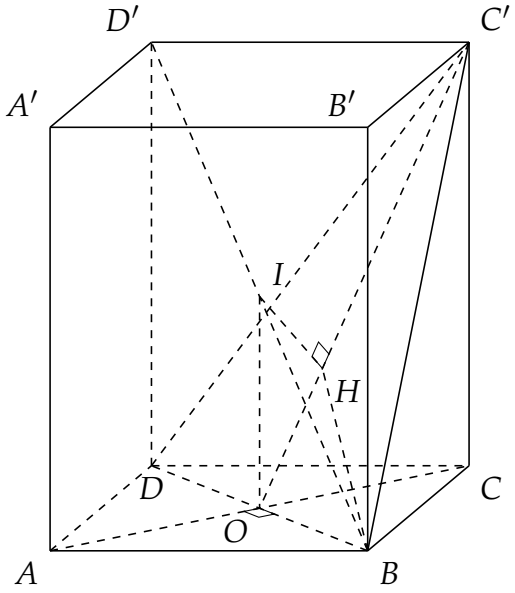
Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $B'O \perp (ABCD)$. Suy ra BO là hình chiếu vuông góc của BB' lên $(ABCD)$.
Do đó $(BB', (ABCD)) = (BB', BO) = \widehat{B'BO}$.
Ta có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều, suy ra $BD = a$ và $BO = \dfrac{a}{2}$.
Mà trong tam giác $B'BO$, ta có $\cos \widehat{B'BO} = \dfrac{BO}{BB} = \dfrac{1}{2}$ nên $(BB', (ABCD)) = 60^\circ$. □

BÀI 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng (BDC').

Lời giải.



Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm DD' và H là hình chiếu vuông góc của I lên OC'. Ta có $IH \perp OC'$ (1).
Mà $BD \perp AC$ và $BC \perp AA'$ nên $BD \perp (ACC'A')$, suy ra $BD \perp IH$ (2).
Từ (1) và (2), sy ra $IH \perp (BDC')$ tại H nên BH là hình chiếu vuông góc của BI lên (BDC'). Suy ra $(D'B, (BDC')) = (BI, BH) = \widehat{IBH}$.

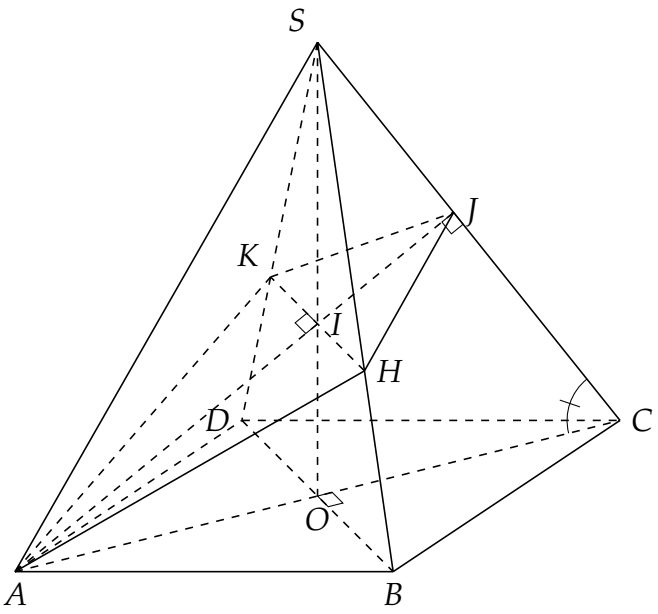
Đặt $AB = a, AA' = b$. Ta có $BD' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$, suy ra $IB = \dfrac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.
Ta có $\Delta OHI \sim \Delta C'CO$ nên $HI = \dfrac{OI.CO}{C'O} = \dfrac{ab}{2\sqrt{2b^2 + a^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}$. Từ đó suy ra

$$\sin \widehat{IBH} = \frac{IH}{BI} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right) + 5}} \leq \frac{1}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.
Khi đó góc lớn nhất cần tìm có số đó là $\arcsin \dfrac{1}{3} \approx 19°28'$. □

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{a^2}{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

Lời giải.



Gọi J là hình chiếu vuông góc của A lên SC (1), I là giao điểm của SO và AJ.
Qua I kẻ đường thẳng song song BD cắt SB, SD lần lượt tại H và K.
Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp SC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHJK)$ nên tứ giác $AHJK$ là thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P).
Vì $HK \perp (SAC)$ nên $HK \perp AI$, do đó $S_{AHIK} = \dfrac{1}{2}AJ.KH = \dfrac{a^2}{2}$.
Nhận thấy rằng OC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCO} = \widehat{SAC} = \alpha$.
Lúc đó $AJ = AC\sin\alpha = a\sqrt{2}\sin\alpha, SO = OC.\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\alpha$.
Ta có $\Delta SOC \sim \Delta SJI$ nên $\widehat{SIJ} = \widehat{SCO} = \alpha$, suy ra $\widehat{AIO} = \widehat{SIJ} = \alpha$, từ đó ta có $OI = OA.\cot\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cot\alpha$.
Trong tam giác SBD, ta có $\dfrac{HK}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = 1 - \dfrac{OI}{SO} = 1 - \cot^2\alpha$, suy ra $KH = DB\left(1 - \cot^2\alpha\right) = a\sqrt{2}\left(1 - \cot^2\alpha\right)$.
Vậy

$$S_{AHJK} = \frac{1}{2}a^2 = a^2\sin\alpha\left(1 - \cot^2\alpha\right) \Leftrightarrow 4\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \Rightarrow \alpha \approx 57,5^\circ.$$

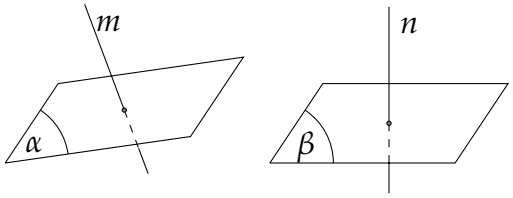
□

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Định nghĩa 1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

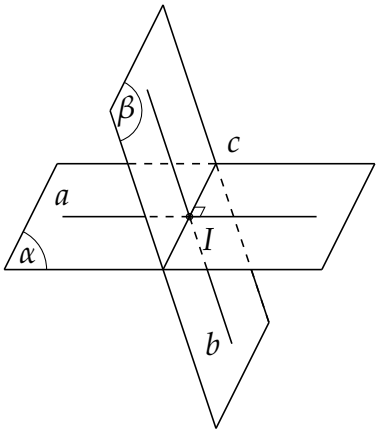


2 CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI MẶT PHẲNG CẮT NHAU

① Tìm giao tuyến c của (α) và (β).

② Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.

③ Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b.



3 DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐA GIÁC

Định nghĩa 2. Cho đa giác $\mathscr{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của hình $\mathscr{H}$ được tính theo công thức như sau:

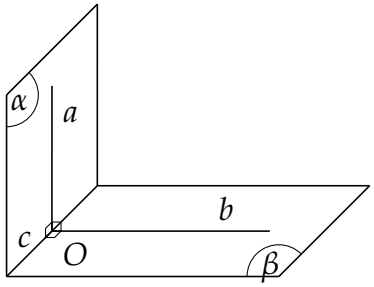
$$S' = S \cdot \cos\varphi$$

với φ là góc giữa (α) và (β).

4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 3. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Định lí 1. *Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

Định lí 2. *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.*

5 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa 4. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 5. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 6. Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Nhận xét: Trong hình hộp đứng 4 mặt bên đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 7. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 8. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

6 HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa 9. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét: Hình chóp đều có:

① Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

② Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa 10. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Nhận xét: Hình chóp cụt đều có:

① Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

② Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng qui tại một điểm.

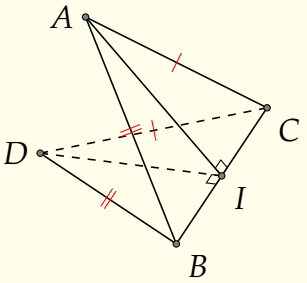
③ Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN

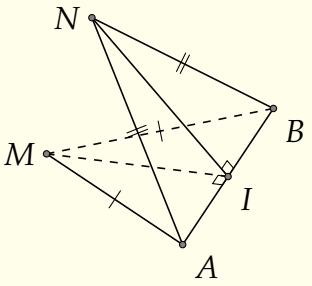
DẠNG 4.1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.
Một số trường hợp thường gặp:

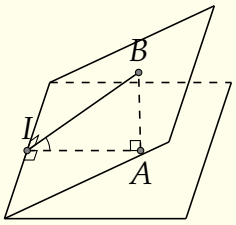
TH1: *$\Delta ABC = \Delta DBC$. Gọi I là chân đường cao của ΔABC.*
Nối DI. Vì $\Delta ABC = \Delta DBC$ nên $DI \perp BC$.
$\Rightarrow ((ABC),(DBC)) = \widehat{AID}$.



TH2: *Xét góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (NAB) với $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ cân có cạnh đáy AB.*
Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $NI \perp AB$ và $MI \perp AB$.
$\Rightarrow ((MAB),(NAB)) = \widehat{MIN}$.



TH3: *Hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.*
Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.
Dựng AB có hai đầu mút nằm ở trên hai mặt phẳng và vuông góc với một mặt. (giả sử là (β)).
Chiếu vuông góc của A hoặc B lên Δ là điểm I.
$\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc giữa hai mặt phẳng.

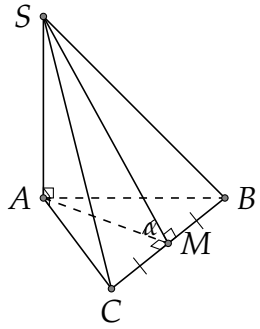


TH4: *Nếu $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$ thì $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(a,b)}$.*
TH5: *Trường hợp khó vẽ được góc giữa hai mặt phẳng thì có thể dùng công thức phép chiếu diện tích đa giác.*

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Lời giải

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α.
Gọi M là trung điểm của BC. Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. (1)
Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$. (2)
Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.



Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có:
$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, suy ra $\alpha = 60^\circ$.

□

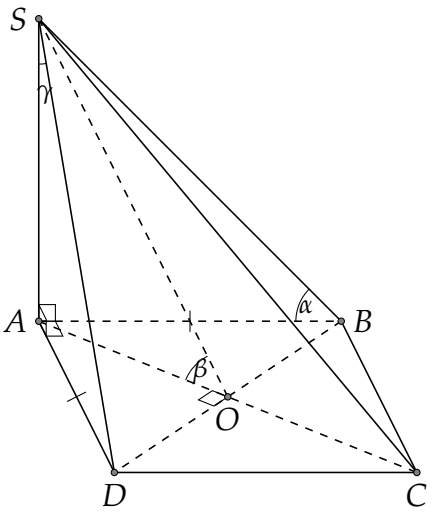
VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

a. $((SBC),(ABC)) = ?$

b. $((SBD),(ABD)) = ?$

c. $((SAB),(SCD)) = ?$

Lời giải



a. Gọi $\alpha = (S, BC, A)$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Trong $\triangle SAB$ có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

b. Gọi $\beta = (S, BD, A)$ và $AC \cap BD = O$, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ SO \perp BD (\text{ Do } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{SOA}$.

Mà $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan\beta = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \beta = \arctan(\sqrt{6})$.

c. Gọi $\gamma = ((SAB),(SCD))$.

Khi đó ta có $\gamma = \widehat{ASD}$ và $\tan\gamma = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \gamma = 30^\circ$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

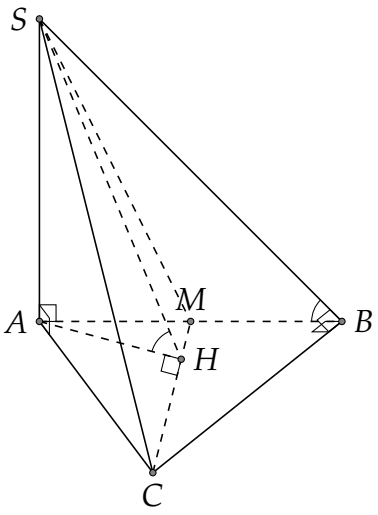
BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có $\widehat{ABC} = 90^\circ, AB = 2a; BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABC); SA = 2a$. Gọi M là trung điểm AB. Hãy tính:

a. $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)$.

b. Đường cao AH của $\triangle AMC$.

c. $\varphi = \left(\widehat{(SMC),(ABC)}\right)$.

Lời giải.



a. Gọi $\alpha = \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)$
Trong tam giác ABC ta có $AB \perp BC$ và $SB \perp BC$, suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.
Ta có $AB = SA = 2a$ nên suy ra $\alpha = 45^\circ$.

b. Đường cao AH của ΔAMC.
Ta có $CM = \sqrt{MB^2 + BC^2} = 2a$ và
$S_{AMC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC - \dfrac{1}{2}MB \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $AH = \dfrac{2S_{AMC}}{MC} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c. Gọi $\varphi = \left(\widehat{(SMC),(ABC)}\right)$?
Do $\begin{cases} AH \perp CM \\ SH \perp CM \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{SHA}$.
Trong $\triangle SHA$ có $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{4a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

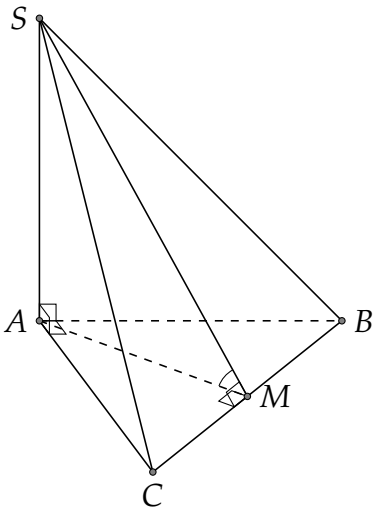
□

BÀI 2. Trong mặt phẳng (P) cho một $\triangle ABC$ vuông cân, cạnh huyền $BC = a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$.

b. Tính SA để góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$ có số đo 30°.

Lời giải.



a. Dễ thấy $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \perp (SAC), (ABC) \perp (SAC)$, do đó các góc giữa các mặt phẳng $((SAB),(CAB))$ và $((SAC),(BAC))$ và $((CSA),(BSA))$ đều bằng 90°.

b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $((SBC),(ABC))$.
Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó ta có
$\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{SMA}$.
Ta có $AM = \dfrac{a}{2}$, theo đề thì $\tan 30^\circ = \dfrac{SA}{AM}$
$\Rightarrow SA = AM \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

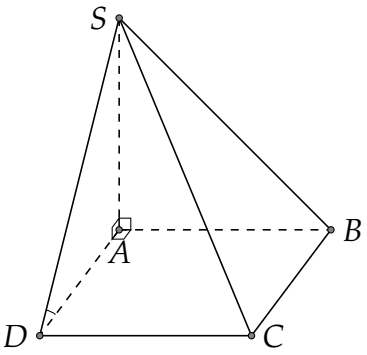
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ với $SA = a$.

b) Tìm $x = SA$ để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

Lời giải.



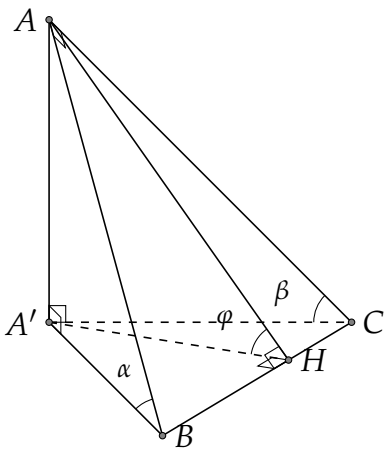
a) Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$, theo giả thiết $CD \perp AD$ và $(SCD) \cap (ABCD) = CD$, suy ra $\Rightarrow \alpha = ((SCD),(ABCD)) = \widehat{SDA}$.
Xét tam giác SAD vuông tại A ta có:
$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

b) Theo kết quả câu a ta có: $\tan 60^\circ = \dfrac{x}{a\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow x = a\sqrt{3}\tan 60^\circ = 3a$.

□

BÀI 4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC nằm trên mặt phẳng (P). Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC và mặt phẳng (P). Gọi φ là hợp bởi (ABC) và (P). Chứng minh rằng $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

Lời giải.



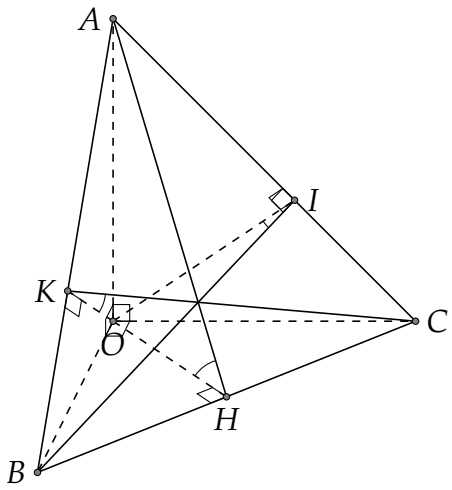
Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), AH là đường cao của tam giác ABC.
Suy ra $A'B$ và $A'C$ lần lượt là hình chiếu của AB và AC lên mặt phẳng (P). Do đó $\alpha = \widehat{ABA'}$ và $\beta = \widehat{ACA'}$.
Lại có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp HA' \\ (ABC) \cap (P) = BC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{AHA'}$.
Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
$\Leftrightarrow \dfrac{AA'^2}{AH^2} = \dfrac{AA'^2}{AB^2} + \dfrac{AA'^2}{AC^2} \Leftrightarrow \sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

□

BÀI 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi α, β, φ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi = 1$.

Lời giải.

Gọi OH, OK, OI lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OAB, OAC.



Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ OH \perp BC \\ (OBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{AHO}.$

Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ OK \perp AB \\ (OAB) \cap (ABC) = AC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{CKO}.$

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ OI \perp AC \\ (OAC) \cap (ABC) = AC \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{AHO}.$

$\cos\alpha = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}}; \cos\beta = \dfrac{S_{OAC}}{S_{ABC}}; \cos\varphi = \dfrac{S_{OAB}}{S_{ABC}}.$

Do đó:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\varphi &= \left(\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}\right)^2 + \left(\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}\right)^2 + \left(\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{OB \cdot OC}{2S_{ABC}}\right)^2 + \left(\frac{OI \cdot AC}{2S_{ABC}}\right)^2 + \left(\frac{OA \cdot OB}{2S_{ABC}}\right)^2 \\ &= \frac{OB^2(OA^2 + OC^2) + OI^2 \cdot AC^2}{4S_{ABC}} = \frac{OB^2 \cdot AC^2 + OI^2 \cdot AC^2}{4S_{ABC}} \\ &= \frac{AC^2(OB^2 + OI^2)}{4S_{ABC}} = \frac{AC^2 \cdot BI^2}{4S_{ABC}} = \frac{4S_{ABC}}{4S_{ABC}} = 1. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

□

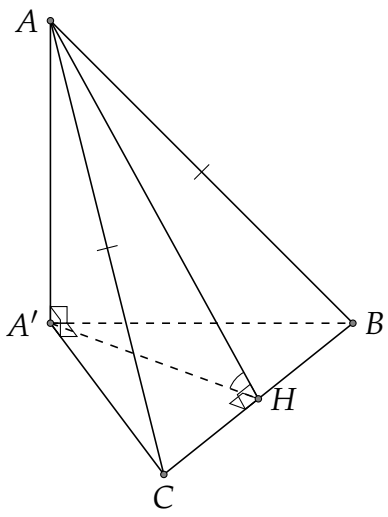
DẠNG 4.2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P), S' là diện tích của hình chiếu H' của H trên (Q), và $\varphi = \left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: $S' = S.\cos\varphi$.

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}, BC = 3a$ có BC nằm trong (P). Gọi A' là hình chiếu của A lên (P). Khi $\triangle A'BC$ vuông tại A', tính $\left(\widehat{(P);(ABC)}\right)$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$.
Mặt khác $AA' \perp (P) \Rightarrow A'H \perp BC$.
Do đó $\alpha = \left(\widehat{(P);(ABC)}\right) = ((ABC),(A'BC)) = \widehat{AHA'}$.
Theo đề ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
Lại có $A'H = \dfrac{1}{2} \cdot BC = \dfrac{3a}{2}$. Suy ra $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot 3a = \dfrac{9a^2}{4}$
Khi đó ta có:
$S_{A'BC} = S_{ABC} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Suy ra $\alpha = 30^\circ$.



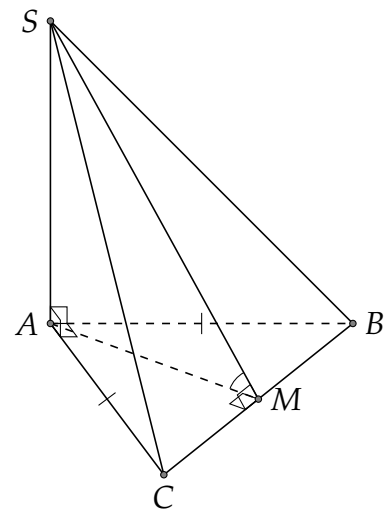
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA = \dfrac{a}{2}$ và $SA \perp (ABC)$. Tính diện tích tam giác SBC.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC. Dễ dàng chứng minh được $\widehat{SMA} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).
Mặt khác $SA \perp (ABC)$, suy ra $\triangle ABC$ là hình chiếu của $\triangle SBC$ lên mặt phẳng (ABC).
Do đó $S_{ABC} = S_{SBC} \cdot \cos\alpha \Rightarrow S_{SBC} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha}$. (1)
Lại có $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có
$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.
Thay vào (1) ta được $S_{SBC} = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{a^2}{2}$.



□

BÀI 2. Cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh A nằm trong (P) các đỉnh còn lại không nằm trong (P), $BD = a, AC = a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi $ABCD$ lên (P), ta được hình vuông $AB'C'D'$.

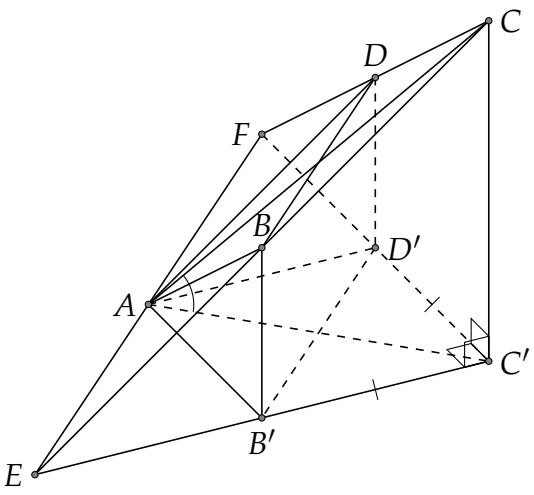
a. Tính S_{ABCD} và $S_{AB'C'D'}$ từ đó suy ra $\varphi = \widehat{((P);(Q))}$.

b. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CB và CD với (P). Tính $S_{EFDB}; S_{EFD'B'}$.

Lời giải.

a.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Do $AB'C'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ lên (P) và $BD \parallel B'D'$ nên $BD = B'D' = a$. Mà $AB'C'D'$ là hình vuông nên suy ra $AB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Do đó $S_{AB'C'D'} = AB' \cdot AD' = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$.
Mặt khác $S_{AB'C'D'} = S_{ABCD} \cdot \cos\varphi$
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{2a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.



b. Trong mặt phẳng $(CC'D'D)$ gọi F là giao điểm của CD và $C'D'$, trong mặt phẳng $(BB'C'C)$ gọi E là giao điểm của BC và $B'C'$.
Dễ thấy $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ BD \subset (ABCD); B'D' \subset (P) \Rightarrow FE \parallel BD \parallel B'D' \\ (P) \cap (ABCD) = FE \end{cases}$, suy ra $BDFE$ và $B'D'FE$ là các hình thang cân.
Lại có $AD \parallel BE \Rightarrow ADBE$ là hình bình hành, tương tự cũng có $ABDF$ cũng là hình hình hành.
Suy ra $EF = 2B'D' = 2a$. Do đó $S_{EFD'B'} = \dfrac{1}{2}(B'D' + EF) \cdot \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$.
Mà $S_{EFD'B'} = S_{EFDB} \cdot \cos\varphi \Rightarrow S_{EFDB} = \dfrac{S_{EFD'B'}}{\cos\varphi} = \dfrac{3a^2}{4\cos 45^\circ} = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

□

DẠNG 4.3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1: *Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.* ***Cách 2:*** *Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng* 90°.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

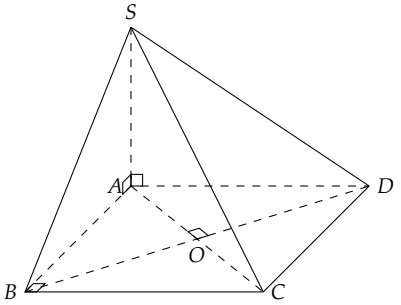
① $(SAC) \perp (SBD)$.

② $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

① Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

② Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAB)$.

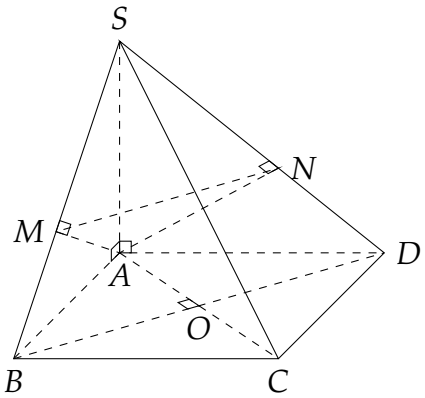


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

Lời giải

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BD \perp (SAC)$.
Mà $MN \parallel BD$ (do $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.
Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

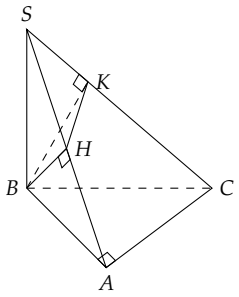
① $(SAC) \perp (SAB)$.

② $(SAC) \perp (BHK)$.

Lời giải

① Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$).
Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.

② Ta có $SC \perp BK$.
Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$).
Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$.
Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.

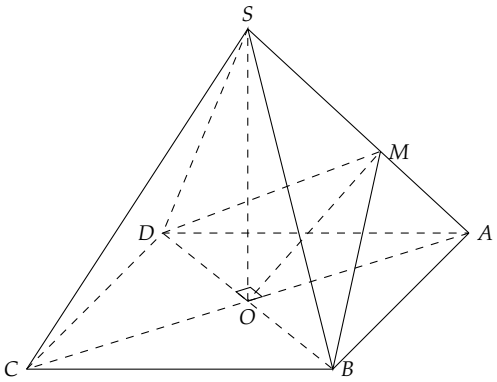


□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

Lời giải

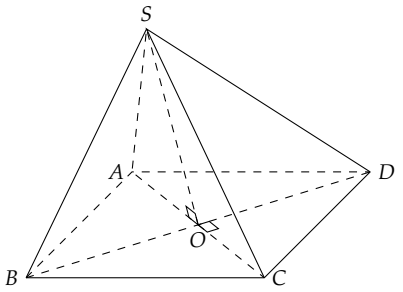
Gọi M là hình chiếu của O lên SA.
Khi đó $SA \perp (MBD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD.
Ta có $BD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Suy ra $OM = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}BD$.
Vì thế tam giác MBD vuông cân tại M,
từ đó $\widehat{BMD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.



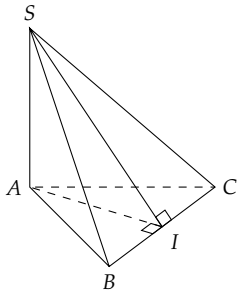
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

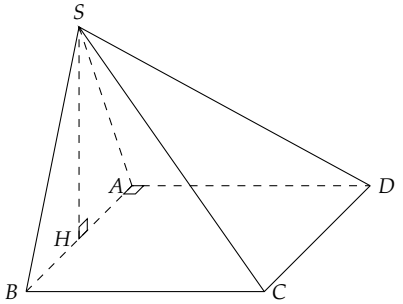
BÀI 1.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.
Lời giải.
Ta có $AC \perp BD$.
Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.
Vì $SA = SC$ nên $AC \perp SO$.
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(ABCD) \perp (SBD)$. □



BÀI 2.
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.
Lời giải.
Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.
Vì $AB = AC$ nên $BC \perp AI$.
Do đó $BC \perp (SAI)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAI)$. □



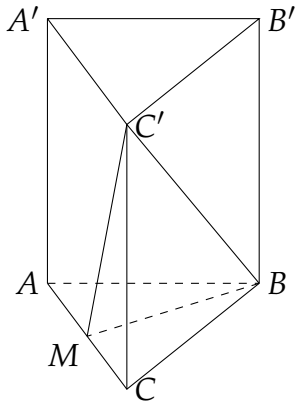
BÀI 3. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.
Lời giải.
Gọi H là trung điểm AB.
Ta có SAB là tam giác đều nên $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$,
suy ra $AD \perp SH$.
Mặt khác $AD \perp AB$. Do đó $AD \perp (SAB)$.
Từ đó $(SAD) \perp (SAB)$.



□

BÀI 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.
Lời giải.

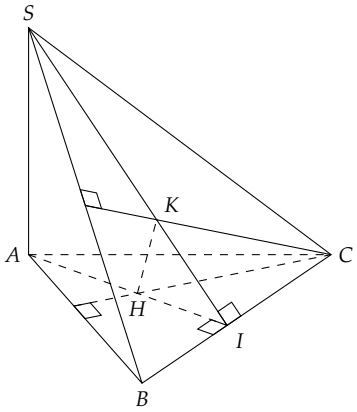
Vì $AB = AC$ nên $BM \perp AC$.
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BM \perp AA'$.
Do đó $BM \perp (ACC'A')$.
Vì vậy $(BC'M) \perp (ACC'A')$.



□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.

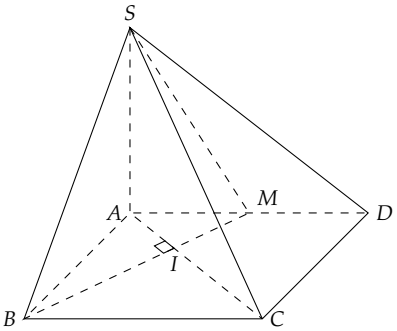
Lời giải.
Gọi $I = AH \cap BC$. Khi đó $BC \perp (SAI)$,
suy ra $BC \perp SI$. Do đó S, K, I thẳng hàng.
Ta có $SB \perp CK$.
Mặt khác $CH \perp AB$, $CH \perp SA$ suy ra $CS \perp (SAB)$.
Từ đó $SB \perp SH$.
Do đó $SB \perp (CHK)$. Vì vậy $(SBC) \perp (CHK)$.



□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

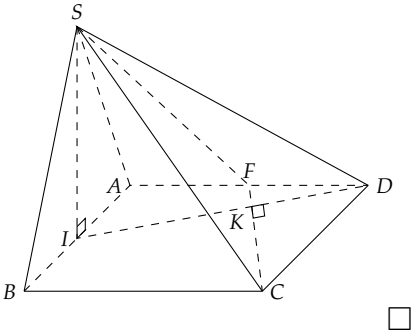
Lời giải.
Gọi $I = AC \cap BM$.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $BM \perp SA$.
Theo giả thiết ta suy ra $AC^2 = 3a^2$, $AI^2 = \dfrac{a^2}{3}$.
$MI^2 = \dfrac{1}{9}MB^2 = \dfrac{a^2}{6}$ Do đó $AI^2 + MI^2 = MA^2$.
Từ đó $BM \perp AC$.
Suy ra $BM \perp (SAC)$. Vì vậy $(SBM) \perp (SAC)$.



□

BÀI 7. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD. Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

Lời giải.
Gọi $K = CF \cap ID$.
Tam giác SAB đều nên $SI \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$,
suy ra $CF \perp SI$.
Mặt khác $\widehat{KFD} + \widehat{KDF} = \widehat{KFD} + \widehat{KCD} = 90^\circ$.
Suy ra $CF \perp ID$. Do đó $CF \perp (SID)$.
Vì vậy $(SFC) \perp (SID)$.



□

DẠNG 4.4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng

Xác định mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước bằng cách:

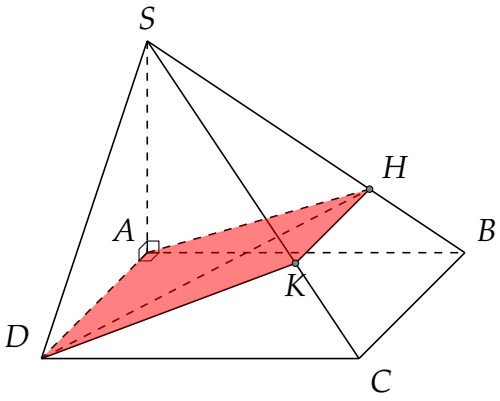
① *Từ điểm A bất kì thuộc đường thẳng d dựng $AH \perp (\alpha)$. Mặt phẳng (AH, d) là mặt phẳng (β).*

② *Tìm giao điểm của mặt phẳng (β) và các cạnh của hình chóp, hình lăng trụ ... Từ đó suy ra thiết diện.*

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình chóp.

Lời giải

Kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.
Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \ (SA \perp (ABCD)) \\ AD \perp AB \end{cases}$
$\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.
Ta có $AD \perp SB$ và $AH \perp SB$ nên $SB \perp (ADH)$, suy ra $(SBC) \perp (ADH)$.
Do đó, mặt phẳng (P) chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC) là (ADH).
Trong mặt phẳng (SBC) dựng $HK \parallel BC (K \in BC)$, suy ra $HK \parallel AD$ (do cùng song song với AD).
Vậy thiết diện là hình thang $ADKH$ có hai đáy là AD và HK.

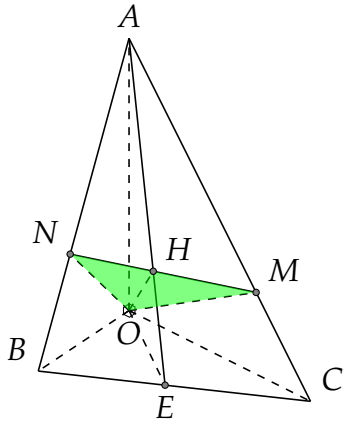


□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Gọi (α) là mặt phẳng chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện.

Lời giải

Ta có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$.
Vì $OH \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) và $OA \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) nên $BC \perp (OAH)$, suy ra $BC \perp AH (1)$.
Tương tự ta có $AC \perp BH (2)$.
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$.
Ta có $OH \perp (ABC)$ nên mặt phẳng (α) chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là (OHM).
Trong mặt phẳng (ABC) gọi N là giao điểm của HM và AB, suy ra thiết diện của mặt phẳng (OHM) và tứ diện là $\triangle OMN$.
Do $OA = OB = OC = a$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau nên $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, suy ra $\triangle ABC$ đều.



□

Mà H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH cắt BC tại trung điểm của đoạn BC.
Gọi E là trung điểm BC.

Ta có H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $3HE = AE$. Do đó, $MN \parallel BC$, suy ra $MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\triangle AOE$ vuông tại A nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{3}{4a^2}$, suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

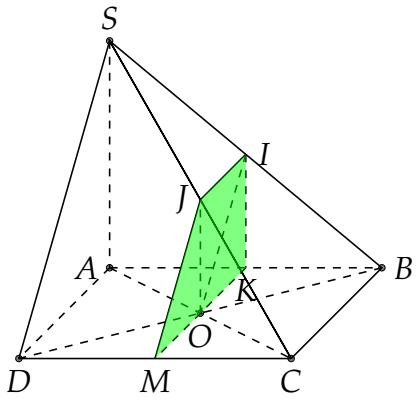
Vậy $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot OH = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O, cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SB, (α) là mặt phẳng chứa OI và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình chóp.

Lời giải.

Trong (SAC) kẻ $OJ \parallel SA (J \in SC) \Rightarrow J$ là trung điểm SC.
Ta có $OJ \perp (ABCD)$. Mp (α) là (OIJ).
Gọi K là trung điểm AB. Trong $(ABCD)$ gọi M là giao điểm của OK và CD.
Thiết diện là hình thang $IJMK$ vuông tại I và K.
$IK = a, IJ = \frac{a}{2}, KM = a$.
$S_{IJMK} = \frac{3a^2}{4}$.

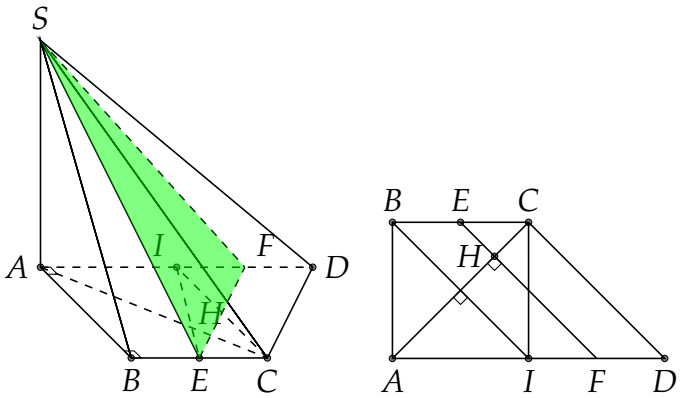


□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm BC. Xác định và tính diện tích thiết diện của mặt phẳng chứa SE và vuông góc với mặt phẳng (SAC) với hình chóp.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BI(1)$. Ta có $BCDI$ là hình bình hành $\Rightarrow BI \parallel CD(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp CD$. Ta có $CD \perp (SAC)$.
Kẻ $EF \parallel CD (F \in AD)$. Suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (SEF) \perp (SAC)$.
Mp chứa SE và vuông góc (SAC) là mặt phẳng (SEF).
Thiết diện của mp(SEF) với hình chóp là tam giác SEF.
Gọi $H = AC \cap EF$.



Ta có $EF \perp SH$.
Ta có $EFDC$ là hình bình hành $\Rightarrow EF = CD = a\sqrt{2}$.
$AH = AF \cdot \cos 45^0 = \frac{5\sqrt{2}a}{4}$. Vậy $S_{\triangle SEF} = \frac{1}{2}SH \cdot EF = \frac{5a^2}{4}$.

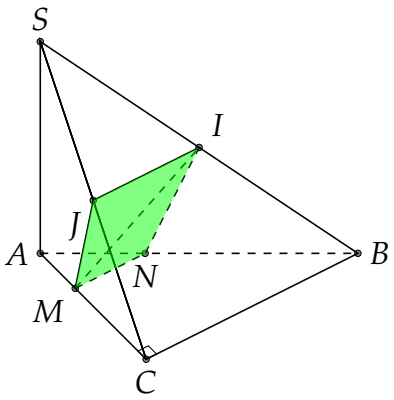
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $SA \perp (ABC)$, $SA = AC = a$. Gọi I lần lượt là trung điểm của SB. Lấy điểm M trên cạnh AC sao cho $3AM = AC$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa IM và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Xác định và tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) và hình chóp.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $MN \parallel BC$ $(N \in AB)$. Ta có $BC \perp (SAC)$. Mà $MN \parallel BC$ nên $MN \perp (SAC)$. Suy ra $(IMN) \perp (SAC)$.

Mặt phẳng chứa IM và vuông góc với mặt phẳng (SAC) là mặt phẳng (IMN).
Gọi J là trung điểm SC. Ta có $IJ \parallel MN$. Suy ra thiết diện cắt bởi (IMN) và hình chóp là hình thang $IJMN$ vuông tại M và J.
Ta có $MN = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{a}{3}$, $IJ = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$,
$OM^2 = \sqrt{JC^2 + MC^2 - 2JC \cdot MC \cdot \cos \widehat{JCM}}$
$= \dfrac{20a^2}{36} \Rightarrow JM = \dfrac{2a\sqrt{5}}{6} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.
Vậy $S_{MNJI} = \dfrac{1}{2}(MN + IJ)MJ = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{2}\right) \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{3} = \dfrac{5\sqrt{5}a^3}{36}$.

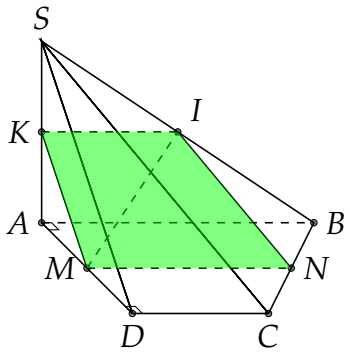


□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = SA = a$, SA vuông góc với đáy. Gọi I, M lần lượt là trung điểm SB, AD. Gọi (P) là mặt phẳng chứa IM và vuông góc $(SAD$. Tính diện tích thiết diện do (P) cắt hình chóp.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm BC. Ta có $MN \parallel AB \parallel CD$ và $MN \perp AD$.
Ta có $MN \perp (SAD) \Rightarrow (IMN) \perp (SAD)$.
Mặt phẳng (P) là (IMN).
Kẻ $IK \parallel AB (K \in SA)$. Thiết diện là hình thang $IKMN$ vuông tại K và M.
$MN = \dfrac{3a}{2}, IK = a, KM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra $S_{IKMN} = \dfrac{5\sqrt{2}a^2}{8}$.



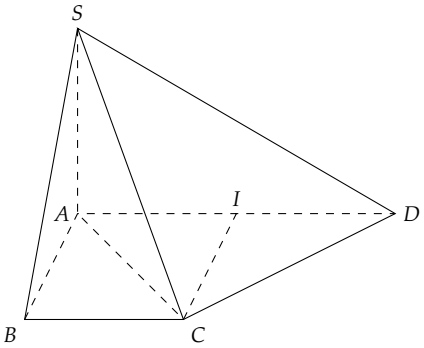
□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SCD)$.

Lời giải.

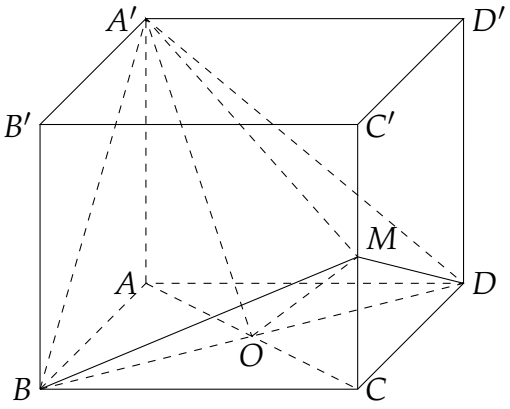
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $CD \perp SA$.
Gọi I là trung điểm AD.
Khi đó $ABCI$ là hình vuông và tam giác ICD vuông cân tại I.
Từ đó $\widehat{ACD} = 90^\circ$ hay $CD \perp AC$.
Do đó $CD \perp (SAC)$. Vì vậy $(SCD) \perp (SAC)$.



□

BÀI 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải.



Gọi O là tâm $ABCD$.
Vì $A'B = A'D$ nên $A'O \perp BD$.
Vì $MB = MD$ nên $MO \perp BD$.
Suy ra góc giữa $(A'BD)$ và (MBD) là góc giữa $A'O$ và MO.
Do đó $(A'BD) \perp (MBD)$ khi
$\widehat{A'OM} = 90^\circ \Leftrightarrow A'O^2 + OM^2 = A'M^2$.
Ta có: $A'O^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{2}$.
$OM^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2}{2}$.
$A'M^2 = 2a^2 + \dfrac{b^2}{4}$.
Vì vậy để $(A'BD) \perp (MBD)$ thì
$\dfrac{5b^2}{4} + a^2 = 2a^2 + \dfrac{b^2}{4} \Leftrightarrow b = a$.
Vậy $\dfrac{b}{a} = 1$ thì $(A'BD) \perp (MBD)$.

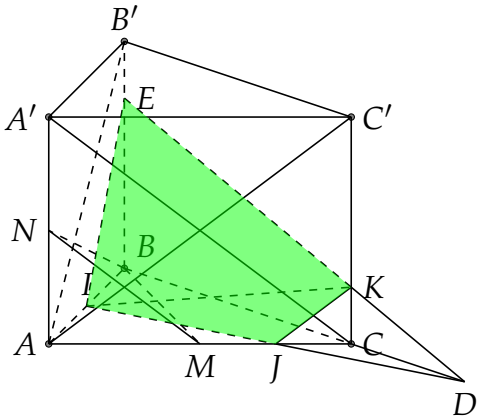
□

BÀI 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $BB' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AA'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CM.

① Chứng minh $(AC'B) \perp (BMN)$.

② Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) chứa IJ và vuông góc (BMN) với hình lăng trụ.

Lời giải.



① Ta có $AC = a\sqrt{2}$ và $AA' = a\sqrt{2}$, Suy ra $AA'C'C$ là hình vuông. Do đó $AC' \perp A'C$. Mà $MN \parallel A'C$ nên $MN \perp AC'$ (1)
Ta có $BM \perp AC$ (do $\triangle ABC$ vuông cân tại B và M là trung điểm AC) và $BM \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$). Suy ra $BM \perp (AA'C'C)$. Do đó $BM \perp AC'$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (BMN)$. Vậy $(AC'B') \perp (BMN)$.

② Kẻ $JK \parallel AC' (K \in CC')$. Ta có $JK \perp (BMN)$. Suy ra $(IJK) \perp (BMN)$. Mp (α) là (IJK).

Trong (ABC) gọi $D = IJ \cap BC$, trong $(BB'C'C)$ gọi $E = DK \cap BB'$. Thiết diện là tứ giác $IJKE$.

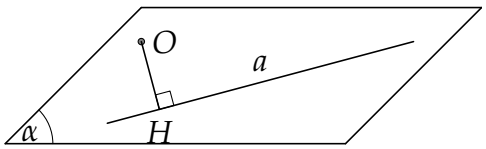
□

BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

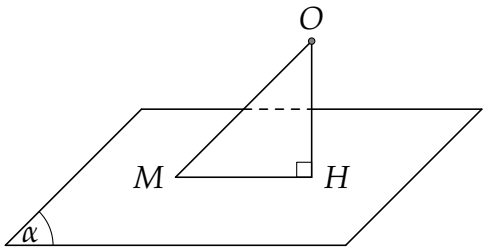
1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm O và một đường thẳng a. Trong (O,a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a, kí hiệu $d(O,a)=OH$.



2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

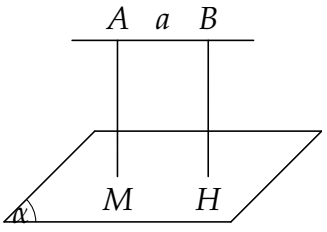
Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $d(O,(\alpha))=OH$



⚠ $OH \le MO, \forall M \in (\alpha)$

3 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐƯỜNG THẲNG TỚI MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG

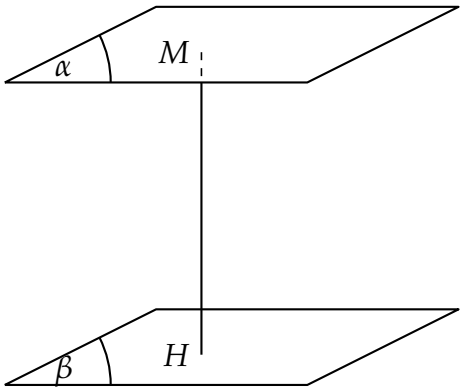
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu $d(a,(\alpha))$.



⚠ $d(a,(\alpha))=d(A,(\alpha)), \forall A \in a.$

4 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).
$d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta)) = d(N,(\alpha)), M \in (\alpha), N \in (\beta)$.

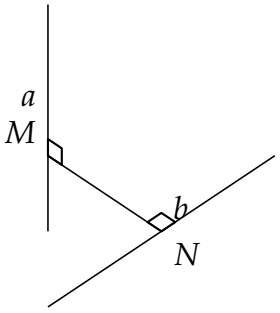


5 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa 1.

a Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



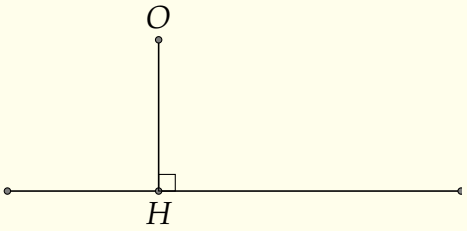
B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 5.1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d), ta thực hiện các bước sau:

— *Trong mặt phẳng $(O;d)$, hạ $OH \perp (d)$ tại H.*

— *Tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.*



VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Lời giải

Ta có $\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'AC = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ chung đáy AC' nên khoảng cách từ B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.

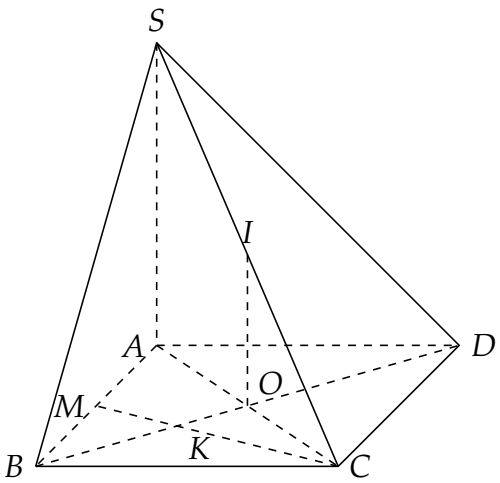
Hạ $CH \perp AC'$, ta được $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. □

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

① Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

② Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

Lời giải



① Trong $\triangle SAC$, OI là đường trung bình nên $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

② Hạ $IH \perp CM$ tại H. Ta có $CM \perp (IOH)$ suy ra $CM \perp OH$.

Gọi K là trọng tâm tam giác ABC, ta có $OB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; OK = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Trong $\triangle OCK$: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} + \dfrac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{20}}$.

Trong $\triangle OIH$: $IH^2 = OI^2 + OH^2 \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

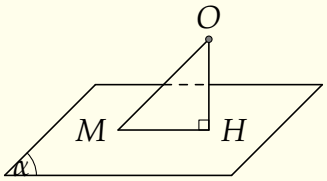
Ta có $SI \cap CM = C$ suy ra $\dfrac{\mathrm{d}(S,CM)}{\mathrm{d}(I,CM)} = \dfrac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(S,CM) = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

□

DẠNG 5.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α), kí hiệu $d(O,(\alpha)) = OH$



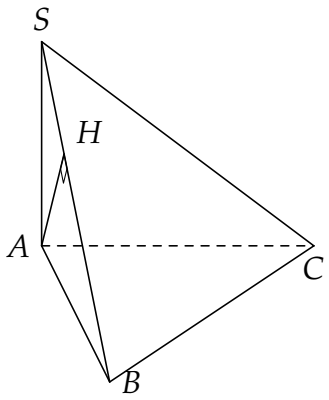
Tính chất 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là như nhau.

Tính chất 2. Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $d(A,(P)) = |k|d(B,(P))$, trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.
Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$
nên $BC \perp (SAB)$. Do $BC \subset (SBC)$
nên $(SBC) \perp (SAB)$.
Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$.
Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.
Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$
nên
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$
Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

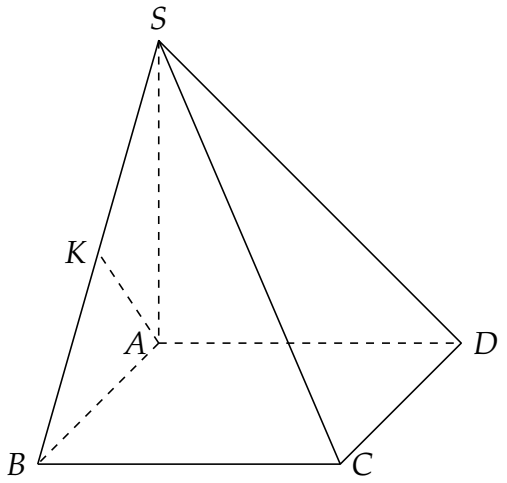


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Do $AD \parallel BC$ nên $d(D,(SBC)) = d(A,(SBC))$.
Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK \perp SB$.
Khi $d[A,(SBC)] = AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



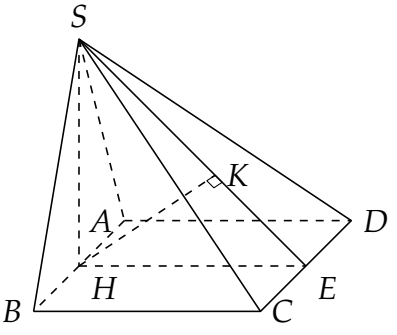
□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$.
Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$.
Vậy $CD \perp (SHE)$.
Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.
Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.
Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.

Khi đó $d(H,(SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.
Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$.
Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.



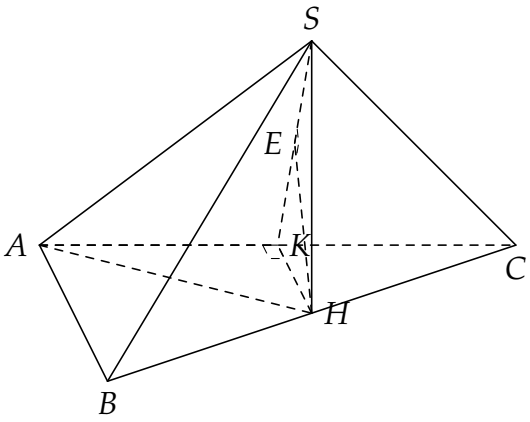
Khi đó $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{7}{3a^2}$. Nên $HK=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=1, AC=\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

Gọi H là trung điểm của BC,
suy ra $SH\perp BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$.
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK\perp AC$.
Kẻ $HE\perp SK\,(E\in SK)$.
Khi đó $d\left(B,(SAC)\right)=2d\left(H,(SAC)\right)$
$=2HE=2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

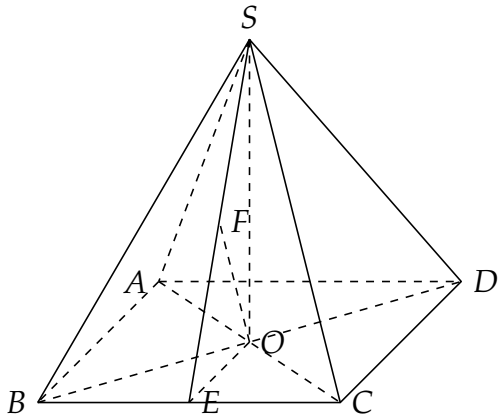


□

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.
Ta có $d\left(A,(SBC)\right)=2d\left[O,(SBC)\right]$.
Kẻ $OE\perp BC, OF\perp SE$ ta có
$\begin{cases}BC\perp OE\\BC\perp SO\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOE)\,.\Rightarrow BC\perp OF$ mà $OF\perp SE\Rightarrow OF\perp(SBC)$.
Ta có $S_{ABCD}=AB^2=4a^2\Rightarrow AB=2a\Rightarrow OE=a$.
Ta có $AC=2a\sqrt{2}\Rightarrow OA=a\sqrt{2}\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=a\sqrt{2}$.
Ta có $\dfrac{1}{OF^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OE^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow OF=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
$\Rightarrow d\left(O,(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

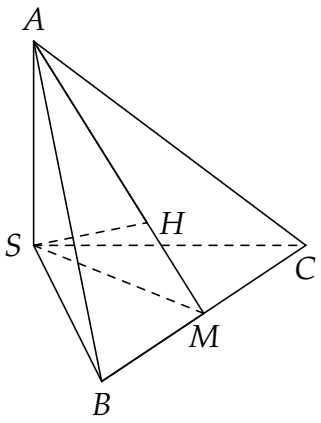


□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA=SB=SC=a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) và $M = AH \cap BC$.
Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow BC \perp SH$.
Lại có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SA$.
Như vậy $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.
Từ $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp SM$
Do đó $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SM^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

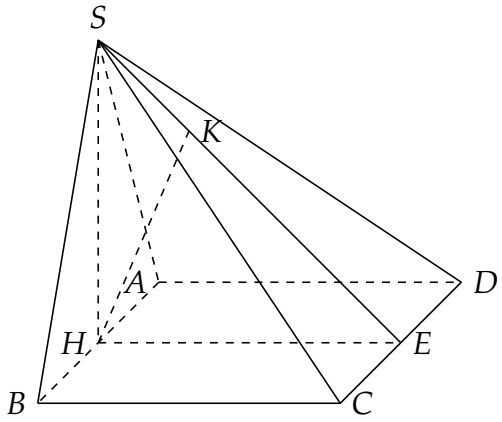


□

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB$.
Do đó $SH \perp (ABCD)$.
Do $AH \parallel CD$ nên $d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$.
Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.
Khi đó $d(H,(SCD)) = HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.
Vậy $d(A,(SCD)) = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



□

VÍ DỤ 8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A cạnh $AB = 3a, BC = 5a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải

Gọi H, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AB, ta có $B'H \perp (ABC)$ và $HN \perp AB$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{B'NH} = 60^\circ$.

Ta có $HN = \dfrac{AC}{2} = 2a$.

Gọi E là giao điểm của $B'H$ và CC' nên H là trung điểm của $B'E$.

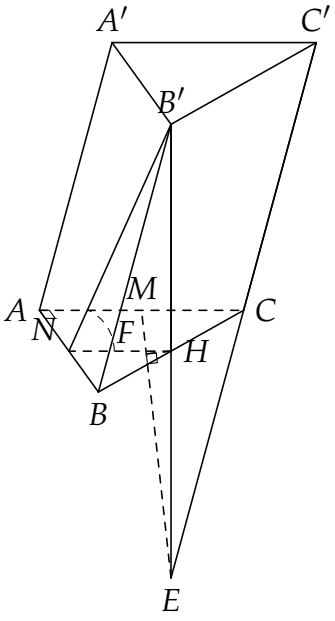
Gọi M là trung điểm của AC, F là hình chiếu của H lên ME.

Ta chứng minh được $HF \perp (ACC'A') \Rightarrow d(H,(ACC'A') = HF = \dfrac{1}{2}d(B',(ACC'A'))$.

Ta có $HM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{3a}{2}; HE = B'H = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác MHE vuông tại H có đường cao HF

Do đó $d(B'(ACC'A')) = 2HF = \dfrac{12a\sqrt{19}}{19}$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ là vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

Tam giác ABC đều, kẻ $AM \perp BC\,(M \in BC) \Rightarrow M$ là trung điểm của cạnh BC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó kẻ

$AH \perp SM\,(H \in SM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Như vậy

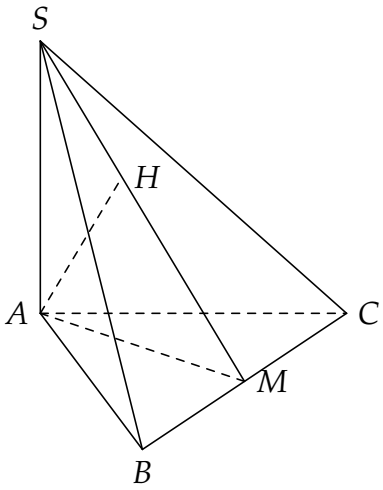
$\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d = d\,(A;(SBC)) = AH$.

Ta có

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{25}{36a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6}{5}a \Rightarrow d = \frac{6}{5}a.$$



□

BÀI 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

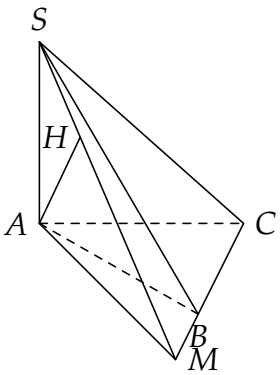
Lời giải.

Kẻ $AM \perp BC\,(M \in BC)$, ta có

$\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AM \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAM) \Rightarrow CM \perp AM$.

Ta có $AM = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$

Xét $\triangle SAM$ ta có $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow d = \dfrac{3a}{2}$



□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với đáy; SB hợp với đáy góc 45°. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

Lời giải.

Ta có $45^\circ = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SBA} \Rightarrow SA = AB = a$.

Gọi O là giao điểm của AC với BD.

Ta có $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

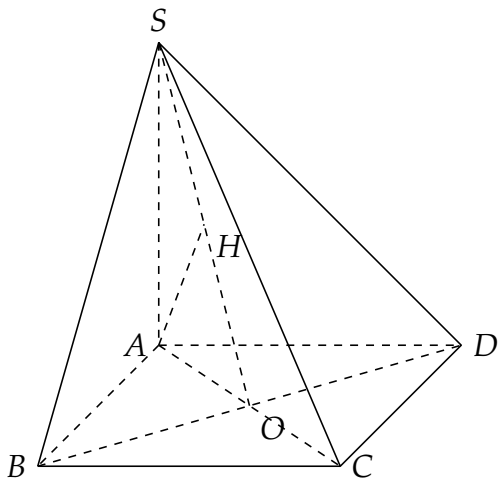
Kẻ $AH \perp SO$ ta có

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH$

mà $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow d(C,(SBD)) = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow \widehat{AIS} = 60^\circ$.

Trong (SBC)kẻ $AH \perp SI$. Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

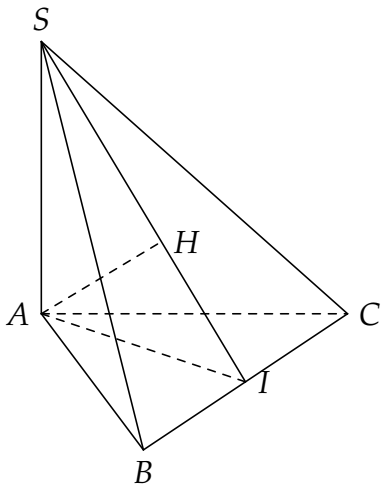
Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4h^2+3a^2}{3a^2h^2}$$

$\Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

Hay $d(A,(SBC)) = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.



□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

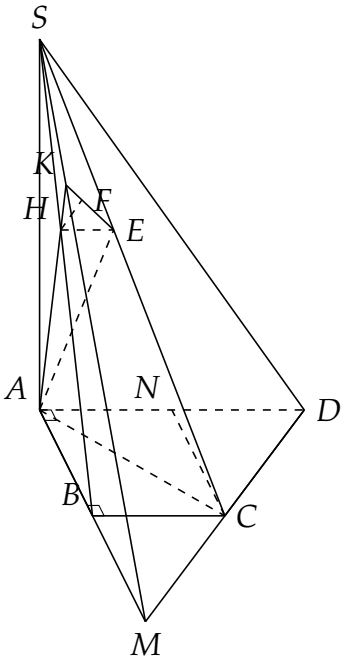
Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.

Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$. Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD)$



Trong (AKE) kẻ $HF \parallel AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$
$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF$.
Do $BC \parallel AD \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a$
Suy ra B là trung điểm của MA.
Lại có $\dfrac{BH}{BS} = \dfrac{BH.BS}{BS^2} = \dfrac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \dfrac{a^2}{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó

$$\frac{HF}{AE} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}AE.$$

Tứ diện $ADMS$ có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và $AE \perp (SMD)$ nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{AE^2} &= \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \Rightarrow AE = a. \end{aligned}$$

Vậy $d(H,(SCD)) = HF = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a}{3}$.

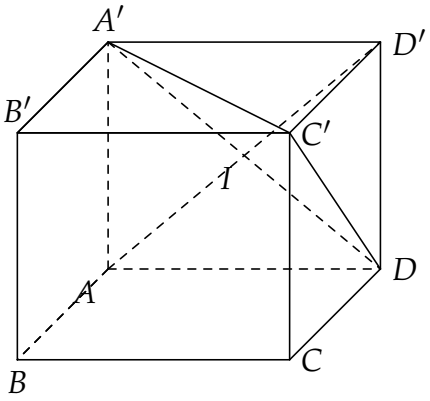
⚠ *Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì* $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))} = \dfrac{IA}{IB}$.

□

BÀI 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD'.
Ta có $\dfrac{d\left(A,(DA'C')\right)}{d\left(D',(DA'C')\right)}=\dfrac{IA}{ID'}=1$
$\Rightarrow d\left(A,(DA'C')\right)=d\left(D',(DA'C')\right)$.
Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D, D'A', D'C'$ đôi một vuông góc nên



$$\begin{aligned}\frac{1}{d^2\left(D',(DA'C')\right)}&=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}\\&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\\&=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}\end{aligned}$$

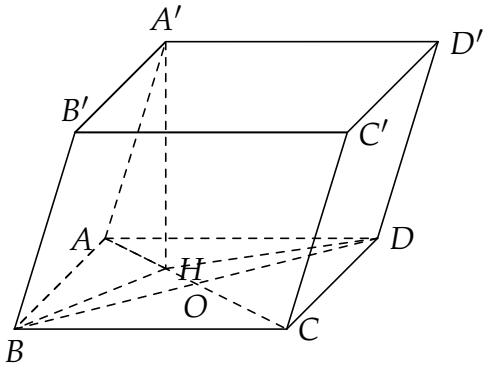
.
Vậy $d\left(A,(DA'C')\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

□

BÀI 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $\widehat{BAA'}=\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=60^\circ$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAA'}=\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=60^\circ$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh a
$\Rightarrow A'A=A'B=A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của $\triangle ABD$).



Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ thì các tam giác vuông $A'HA, A'HB, A'HD$ bằng nhau nên

$$HA=HB=HD.$$

Do đó H là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.
Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} A'H &= \sqrt{AA'^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= a\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Vậy $d\,(A', (ABCD)) = A'H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. □

DẠNG 5.3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song

① *Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện*

— *Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.*

— *Kết luận* $\mathrm{d}(d;(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha))$.

② *Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước*

— *Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.*

— *Kết luận* $\mathrm{d}((\beta);(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\beta))$.

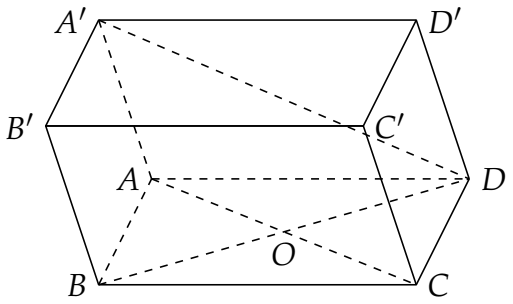
VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

Lời giải

Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.

$A'.ABD$ là hình chóp đều nên $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

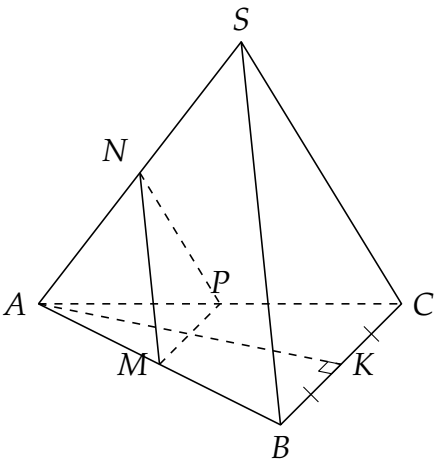


□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Lời giải

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.
Suy ra $\mathrm{d}((MNP);(SBC)) = \mathrm{d}(P;(SBC))$.
$AP \cap (SBC) = C$ suy ra $\mathrm{d}(P;(SBC)) = \dfrac{AP}{AC}\mathrm{d}(A;(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A;(SBC))$.
Gọi K là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.
Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A;(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}((MNP);(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

① Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD).

② Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

③ Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

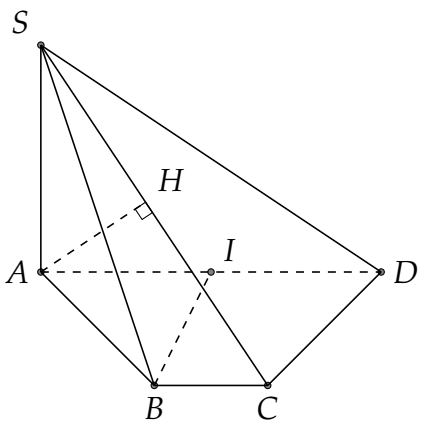
Lời giải

①

Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD).
Xét $\triangle SAB$: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.
Gọi I là trung điểm của AD, suy ra

$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(I,(SCD))$.

Mặt khác, $AI \cap (SCD) = D$, nên $\dfrac{\mathrm{d}(I,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \dfrac{ID}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\mathrm{d}(I,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



② Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC))$.
Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.
Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.
Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

③ Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E, khi đó

$$\mathrm{d}((\alpha),(SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK. Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD).
Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M, N, Q, P là trung điểm của AB, CD, SB, SC. Ta tính được $\mathcal{S}_{MNPQ} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$.

① Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

② Tính khoảng cách từ A tới $(A'BC)$.

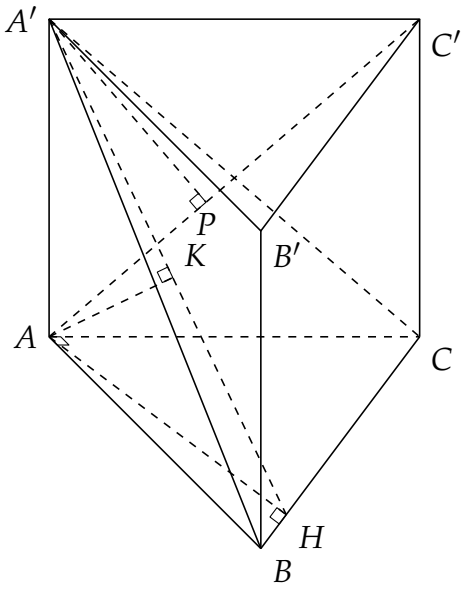
③ Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Lời giải.

① Hạ $AH \perp BC$ suy ra $AH \perp (BCB'C')$.
Ta có $\mathrm{d}(AA';(BCB'C')) = \mathrm{d}(A;(BCB'C')) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

② Hạ $AK \perp A'H$. Ta có $\mathrm{d}(A;(A'BC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

③ Hạ $A'P \perp AC'$. Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') là $A'P = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



□

BÀI 2. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

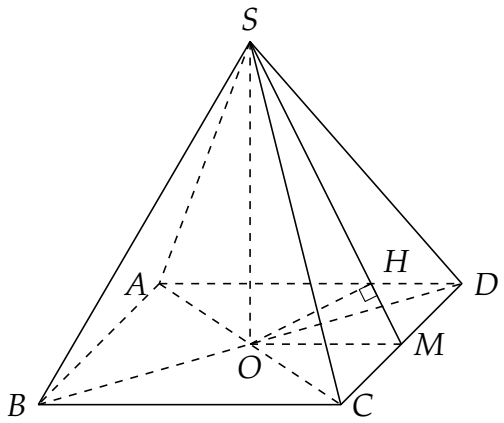
① Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.

② Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD).

Lời giải.

① Gọi $AC \cap BD = O$ suy ra $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\mathrm{d}(S;(ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$.
Vậy $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

② Ta có $\mathrm{d}(AB;(SCD)) = \mathrm{d}(A;(SCD)) = 2\mathrm{d}(O;(SCD)) = OH$. Tính được $OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.



□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

① Tính khoảng cách từ A tới (SBC) và khoảng cách từ C tới (SBD).

② M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính khoảng cách từ MN tới (SBD).

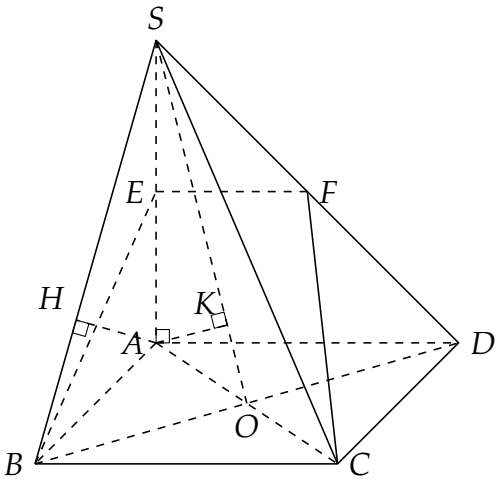
③ Mặt phẳng (P) qua BC cắt SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S tới (P) và diện tích tứ giác $BCFE$.

Lời giải.

① Hạ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.
Ta có $\mathrm{d}(A;(SBC)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

② $AC \cap BD = O$ suy ra $BD \perp (SAC)$. Hạ $AK \perp SO$ thì $AK \perp (SBD)$. Ta có $\mathrm{d}(C;(SBD)) = \mathrm{d}(A;(SBD)) = AK = \dfrac{2a}{3}$.

③ Hạ $AQ \perp BE$ suy ra $AQ \perp (P)$.
Ta có $\dfrac{1}{AQ^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AE^2}$ suy ra $AE = a$.
Do đó E là trung điểm của SA. $EF \parallel AD$ nên F là trung điểm SD.
$\mathrm{d}(S;(P)) = \mathrm{d}(A;(P)) = \mathrm{d}(AD;(P)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$BCFE$ là hình thang vuông tại E, B.
$\mathcal{S}_{BCFE} = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.



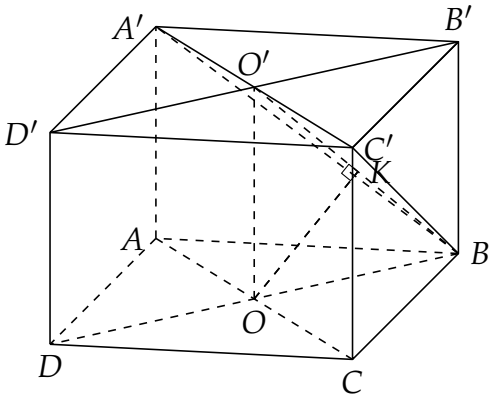
□

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

① Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.

② Tính khoảng cách giữa mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

Lời giải.



Ta có $A'C' \perp (BDB'D')$ suy ra $(BA'C') \perp (BDB'D)$ theo giao tuyến BO'.
Hạ $OK \perp BO'$ thì $OK \perp (BA'C')$. Ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OO'^2} \Rightarrow OK = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Khoảng cách giữa mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD') bằng khoảng cách từ O tới $(BA'C')$. □

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$.

① Tính khoảng cách từ A, B tới mặt phẳng (SCD).

② Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

③ Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng song song với (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a}{3}$.

Lời giải.

① Đáp số: $d(A;(SCD)) = \frac{2a}{\sqrt{3}}; d(B;(SCD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

② $d(AD;(SBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

③ $\mathcal{S}_{EFGH} = \frac{4a^2}{3}$.

□

DẠNG 5.4. Đoạn vuông góc chung, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

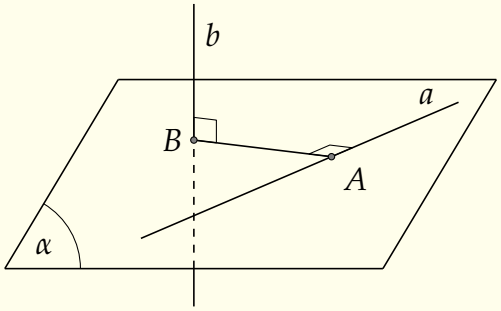
Phương pháp. *Ta có các trường hợp sau:*

1) ***Trường hợp 1***

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

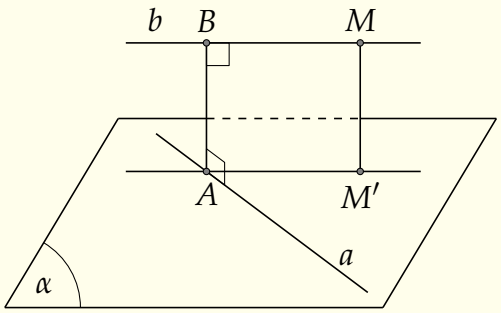
— *Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.*

— *Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*



2) *Trường hợp 2*

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.



— *Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.*

— *Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M'.*

— *Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A.*

— *Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*

Nhận xét

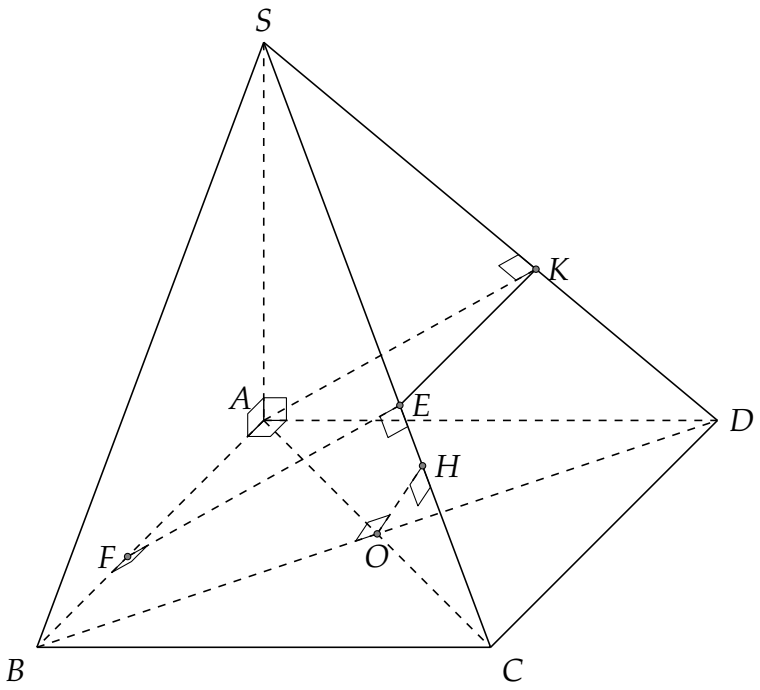
a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

a) SB và CD. b) SC và BD. c) SC và AB.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Mặt khác $BC \perp CD$. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD.
Suy ra $d(SB, CD) = BC = a$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.
Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}$.
Vậy $d(SC, BD) = OH = \dfrac{ah\sqrt{2}}{2\sqrt{h^2 + 2a^2}}$.

c) Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.
Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD.
Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AK \perp SD$ tại K, ta có: $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.
Trong mặt phẳng (SCD), kẻ $KE \parallel CD$ $(E \in SC)$.
Trong mặt phẳng (AB, KE), kẻ $EF \parallel AK$ $(F \in AB) \Rightarrow EF \perp SC$.
Lại có $AB \parallel CD$ và $CD \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow AB \perp EF$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB.
Ta có $EF = AK = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.
Vậy $d(SC, AB) = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

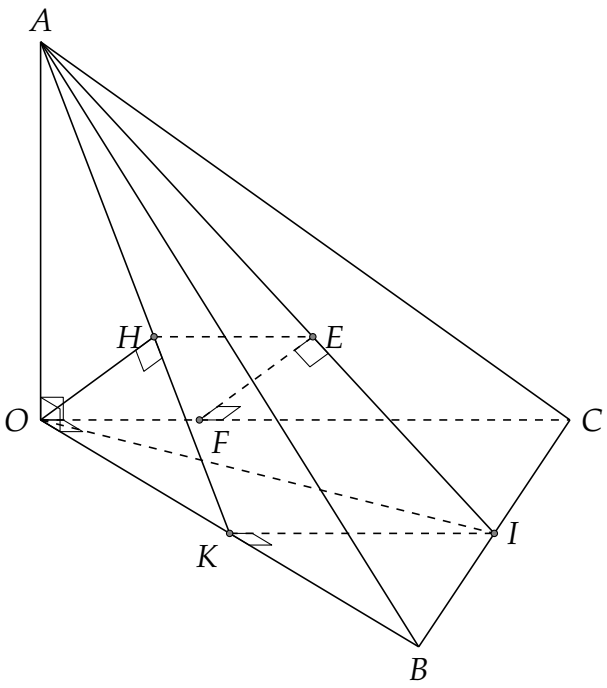
□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC.

b) AI và OC.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(OA, BC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi K là trung điểm của OB, ta có $IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$.

Ta có $\begin{cases} IK \perp OB \\ IK \perp OA \end{cases} \Rightarrow IK \perp (OAB) \Rightarrow (AIK) \perp (OAB)$ theo giao tuyến AK.

Trong mặt phẳng (OAB), kẻ $OH \perp AK$ tại H, ta có: $OH \perp (AIK) \Rightarrow OH \perp AI$.
Trong mặt phẳng (AIK), kẻ $HE \parallel IK$ $(E \in SI)$.
Trong mặt phẳng (HE, OC), kẻ $EF \parallel OH$ $(F \in OC) \Rightarrow EF \perp AI$.
Lại có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH \Rightarrow OC \perp EF$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của OC và AI.

Trong tam giác vuông OAK ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.

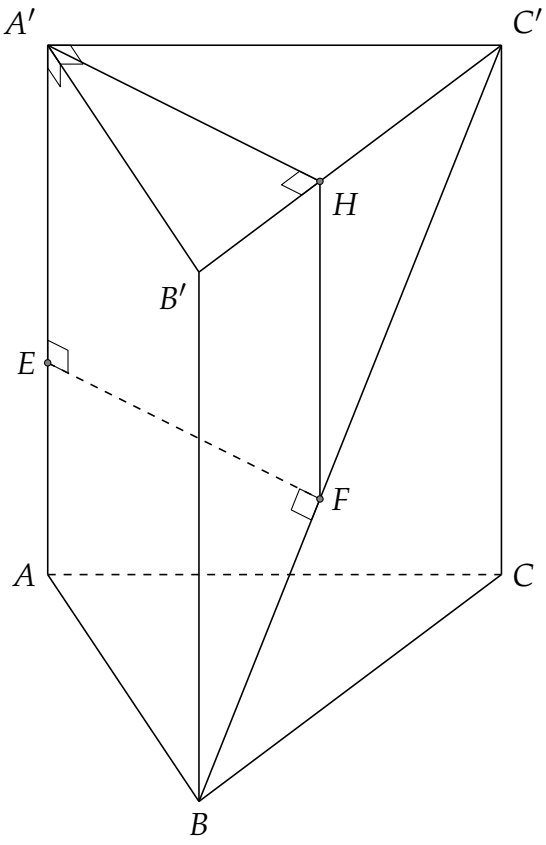
Suy ra $EF = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AI, OC) = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

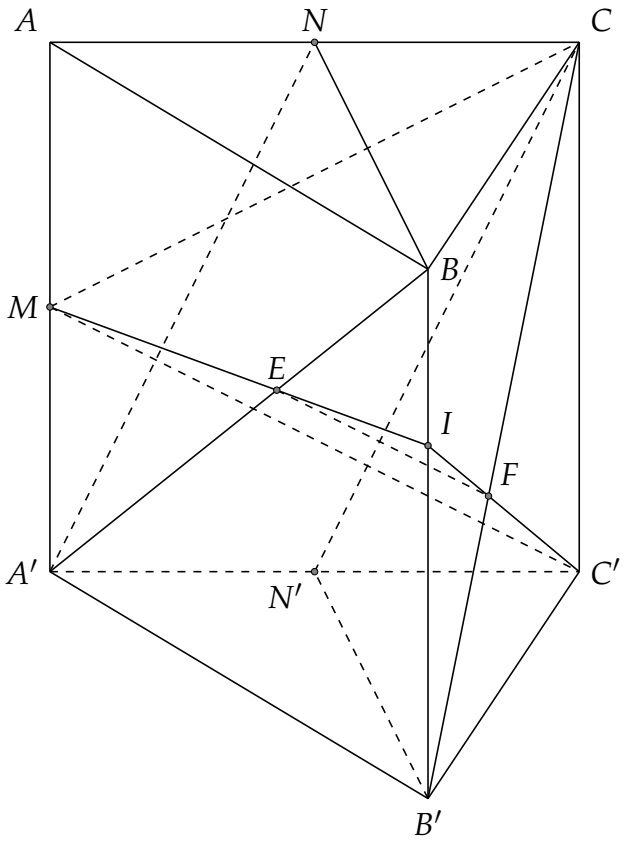
Lời giải



Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.
Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H, ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.
Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ $(F \in BC')$. Trong mặt phẳng (HF, AA'), kẻ $FE \parallel A'H$ $(E \in AA') \Rightarrow FE \perp BC'$.
Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC'.
Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'B'^2} + \dfrac{1}{A'C'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2}$.
Suy ra $EF = A'H = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $d(AA', BC') = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. □

VÍ DỤ 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.

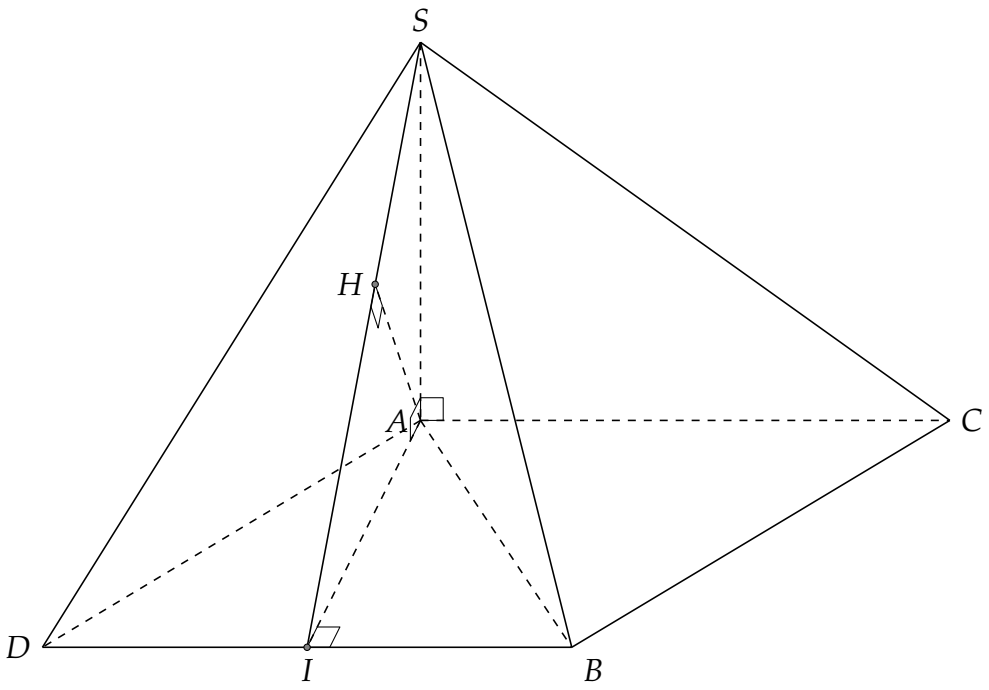
Lời giải



Gọi M, N, N' lần lượt là trung điểm của AA', AC, $A'C'$.
Ta có $\begin{cases} BN \perp AC \\ BN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BN \perp (ACC'A') \Rightarrow BN \perp C'M$.
Mà $C'M \perp A'N$ nên $C'M \perp (A'BN)$. Do đó $C'M \perp A'B$.
Tương tự ta có $C'M \perp (B'N'C) \Rightarrow C'M \perp CB'$.
Vậy ta có đường thẳng $C'M$ vuông góc với cả hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.
Lấy điểm I thuộc BB'. Gọi E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$.
Ta cần tìm vị trí của I để $EF \parallel C'M$.
Ta có $EF \parallel C'M \Leftrightarrow \dfrac{IE}{ME} = \dfrac{FI}{FC'} \Leftrightarrow \dfrac{BI}{MA'} = \dfrac{IB'}{CC'}$.
Do $CC' = 2MA'$ nên $\dfrac{BI}{MA'} = \dfrac{IB'}{CC'} \Leftrightarrow IB' = 2BI$.
Vậy I là điểm thuộc đoạn BB' sao cho $IB' = 2BI$ thì EE là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ với E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$. □

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Lời giải

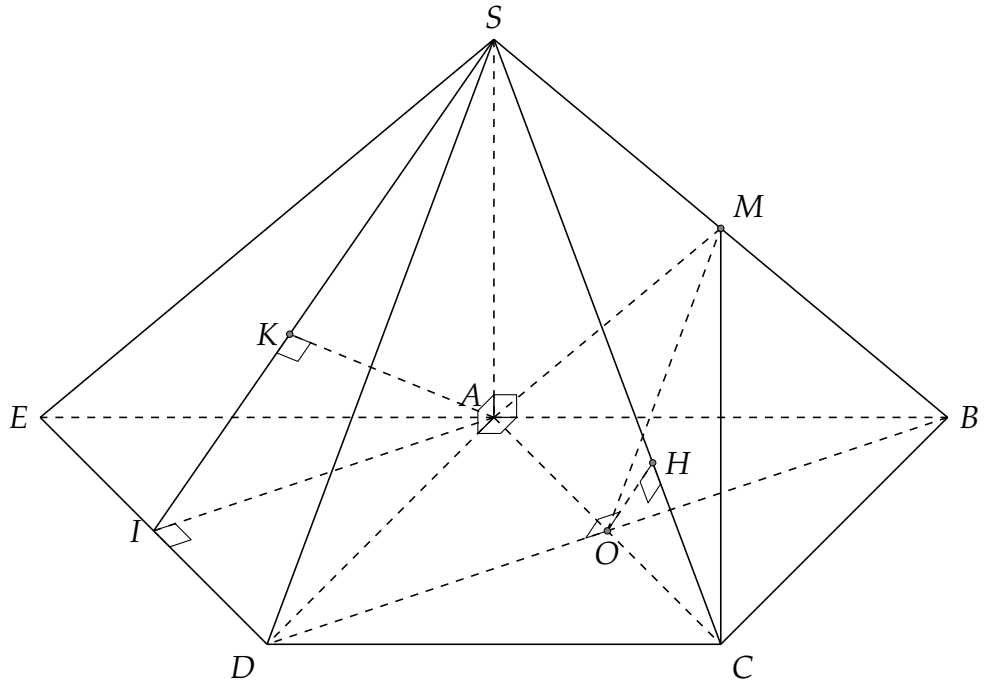


Trong mặt phẳng (ABC), dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.
$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.
Gọi I là trung điểm của BD, ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.
$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H, ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.
Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH.
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2}$.
$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{12a^2}{19}$ hay $AH = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.
Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$. □

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD. c) SD và AM.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Ta có $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \dfrac{OC.SA}{SC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d(SC, BD) = OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
$\Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I, ta có $\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AK \perp SI$ tại K, ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = d(A, (SDE))$.

Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.

Suy ra $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

c) Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.

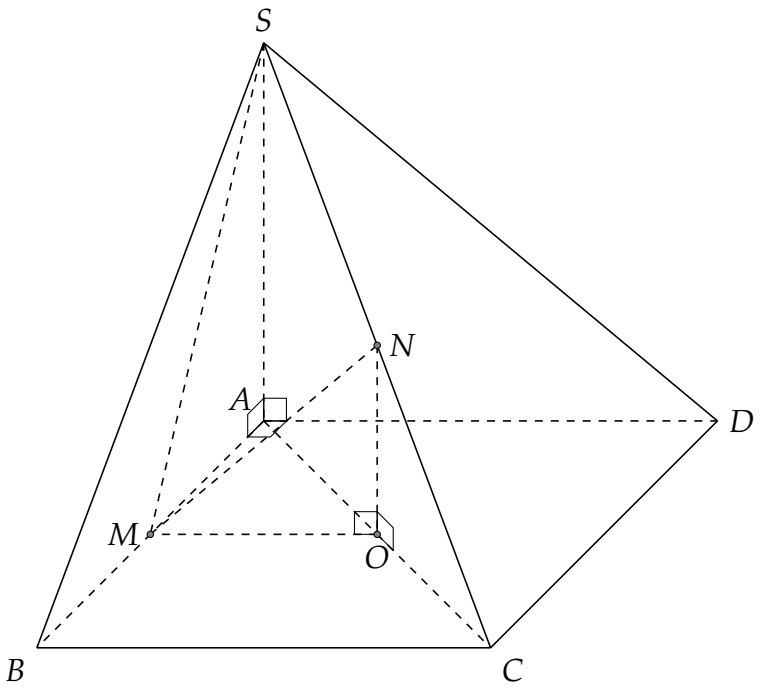
Suy ra $d(SD, AM) = d((AMC), (SDE)) = d(A, (SDE)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có ON là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow ON \parallel SA$ $\Rightarrow ON \perp (ABCD)$.
Suy ra MO là hình chiếu của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Mà $MO \perp AB$ nên $MN \perp AB$ (định lí ba đường vuông góc.

Tam giác MON vuông tại $O \Rightarrow MN^2 = MO^2 + ON^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2a^2}{4}$.

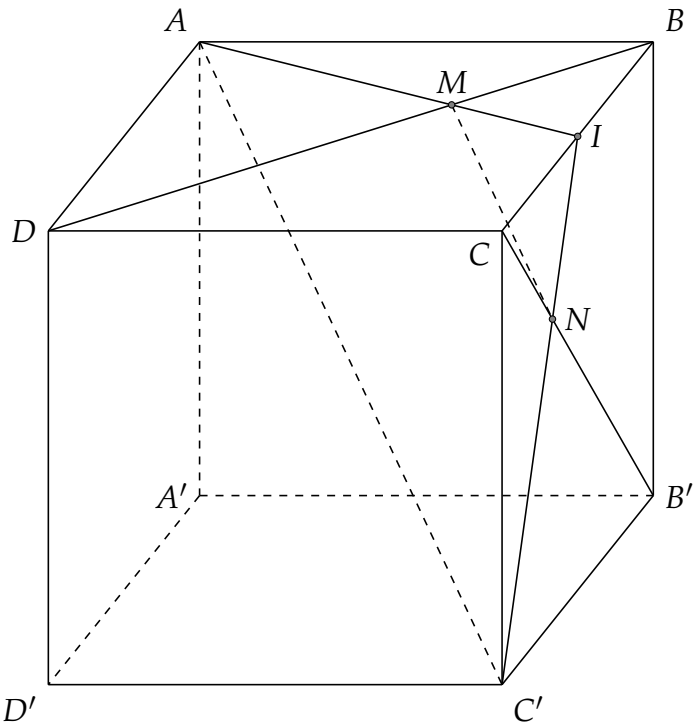
Tam giác SAM vuông tại $M \Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$.

Ta có $SN^2 = \left(\dfrac{SC}{2}\right)^2 = \dfrac{SA^2 + AC^2}{4} = \dfrac{a^2 + 2a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.
Suy ra $SM^2 = SN^2 + MN^2$ hay tam giác SMN vuông tại $N \Rightarrow MN \perp SC$.
Do đó MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Vậy $d(AB, SC) = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. □

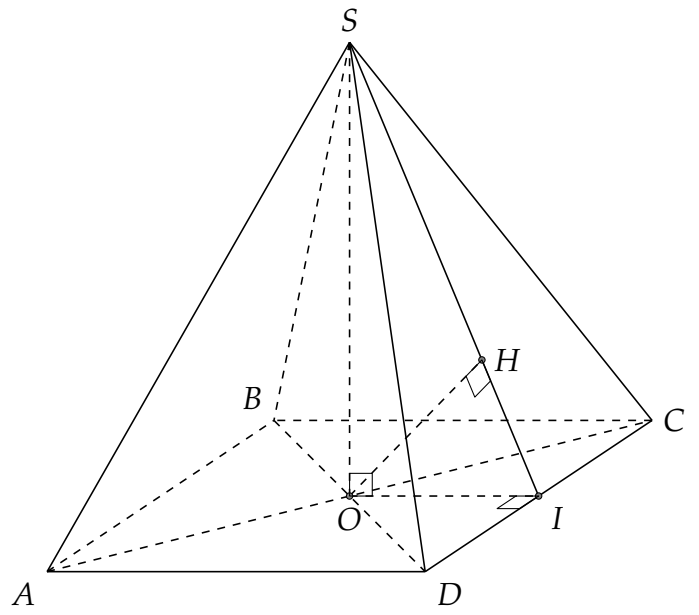
BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$.

Lời giải.



Ta có $BD \perp (ACC'A'') \Rightarrow BD \perp AC'$.
Lại có $B'C \perp (ABC') \Rightarrow B'C \perp AC'$.
Vậy ta có đường thẳng AC' vuông góc với cả hai đường thẳng $B'C$ và BD.
Lấy điểm I thuộc BC. Gọi M là giao điểm của AI và BD; N là giao điểm của IC' và $B'C$.
Ta cần tìm vị trí của I để $MN \parallel AC'$.
Ta có $MN \parallel AC' \Leftrightarrow \dfrac{IM}{MA} = \dfrac{IN}{NC'} \Leftrightarrow \dfrac{IB}{AD} = \dfrac{IC}{B'C'} \Leftrightarrow IB = IC$.
Vậy khi I là trung điểm của BC thì MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$ với M là giao điểm của AI và BD; N là giao điểm của IC' và $B'C$. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = a$. Tính Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.
Lời giải.



Ta có: $DC \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD))$.
Gọi I là trung điểm của CD, ta có $CD \perp OI$.
Mà $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow (SCD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI.

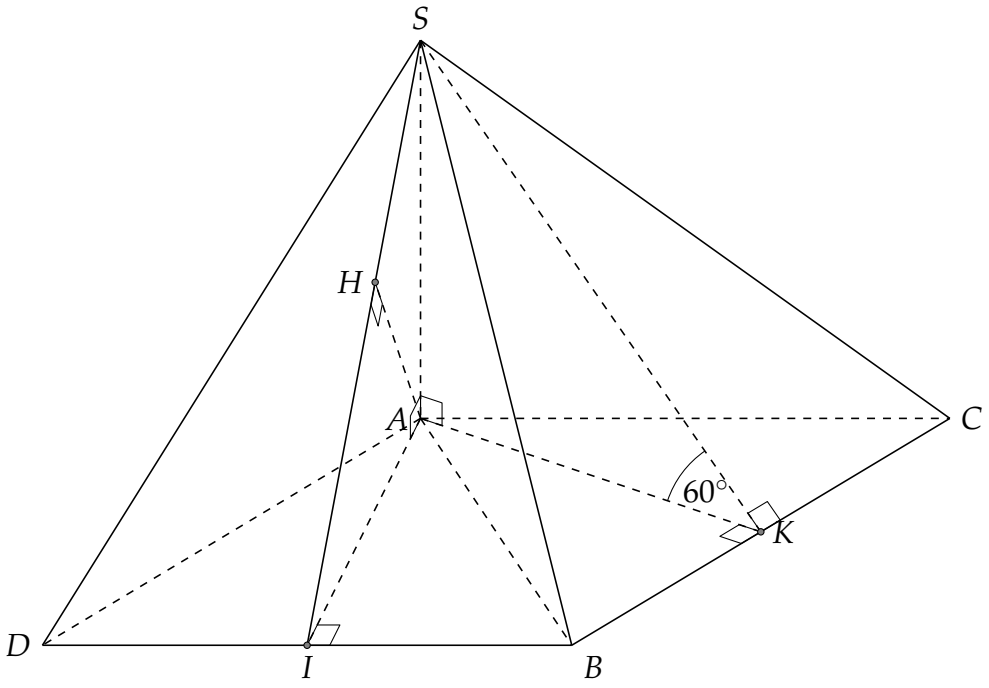
Trong mặt phẳng (SOI), kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SOI)$.
Trong tam giác vuông SOI ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2}$.
Suy ra $d\,(O;(SCD)) = OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.
Vậy $d\,(AB;(SCD)) = d\,(A;(SCD)) = 2d\,(O;(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. □

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, mặt bên SBC tạo với đáy một góc 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BC.

b) SB và AC.

Lời giải.



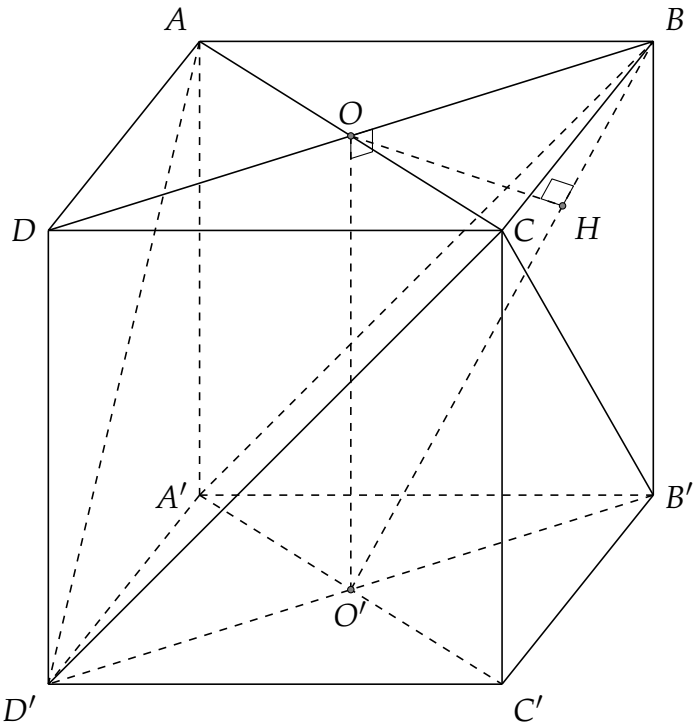
a) Gọi K là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SA \end{cases}$.
Do đó AK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.
Vậy $d(SA, BC) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SA \perp (ABC) \\ AK \perp BC. \end{cases}$
$\Rightarrow SK \perp BC \Rightarrow \widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Do đó $\widehat{SKA} = 60^\circ$.
Tam giác SAK vuông tại A có $\widehat{SKA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AK.\tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$.
Trong mặt phẳng (ABC), dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.
$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.
Gọi I là trung điểm của BD, ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.
$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI.
Trong mặt phẳng (SAI), kẻ $AH \perp SI$ tại H, ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.
Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH.
$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{9a^2}$.

$\Rightarrow AH^2 = \dfrac{9a^2}{16}$ hay $AH = \dfrac{3a}{4}$.
Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{3a}{4}$.

□

BÀI 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.
Lời giải.

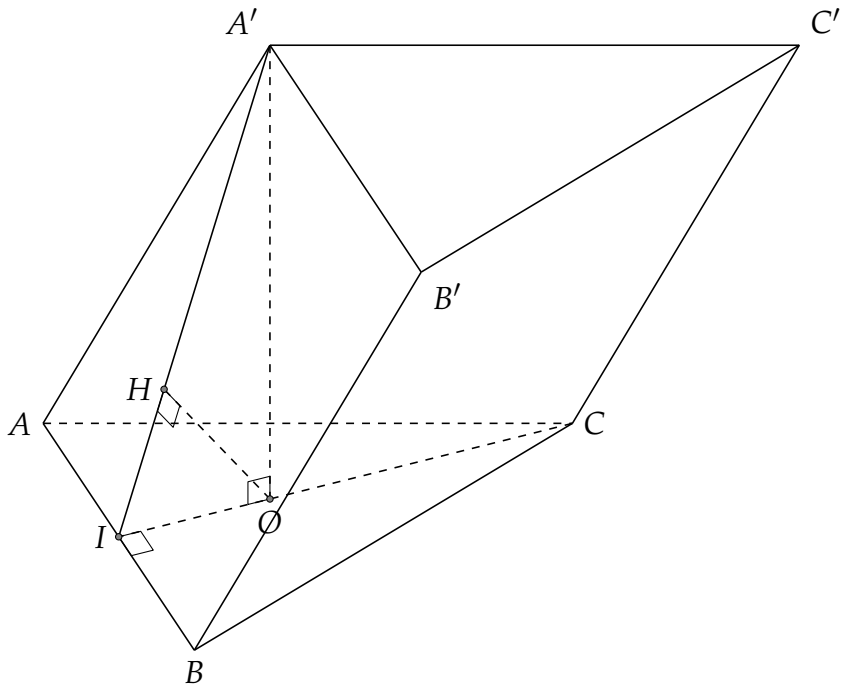


Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Ta có $(ACD') \parallel (BA'C') \Rightarrow d(BC', CD') = d\left((ACD'), (BA'C')\right) = d(O, (BA'C'))$.
Ta có $A'C' \perp (OBB'O') \Rightarrow (BA'C') \perp (OBB'O')$ theo giao tuyến BO'.
Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, kẻ $OH \perp BO'$ tại H, ta có $OH \perp (BA'C') \Rightarrow d\left(O, (BA'C')\right) = OH$.
Tam giác OBO' vuông tại O có OH là đường cao.
$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OO'^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$.
$\Rightarrow OH^2 = \dfrac{a^2}{3}$ hay $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy $d(BC', CD') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O, $A'A = A'B = A'C = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$, khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ đã cho.
Lời giải.



Ta có O là tâm của tam giác đều ABC và $A'A = A'B = A'C$ nên $A'O$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.
$\Rightarrow A'O \perp (ABC)$.
Gọi I là trung điểm của AB, ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ A'O \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'OI)$.
$\Rightarrow (A'OI) \perp (ABB'A')$ theo giao tuyến $A'I$.
Trong mặt phẳng $(A'OI)$, kẻ $OH \perp A'I$ tại H, ta có $OH \perp (ABB'A')$
$\Rightarrow OH = d(O,(ABB'A') = \dfrac{a}{2}$.

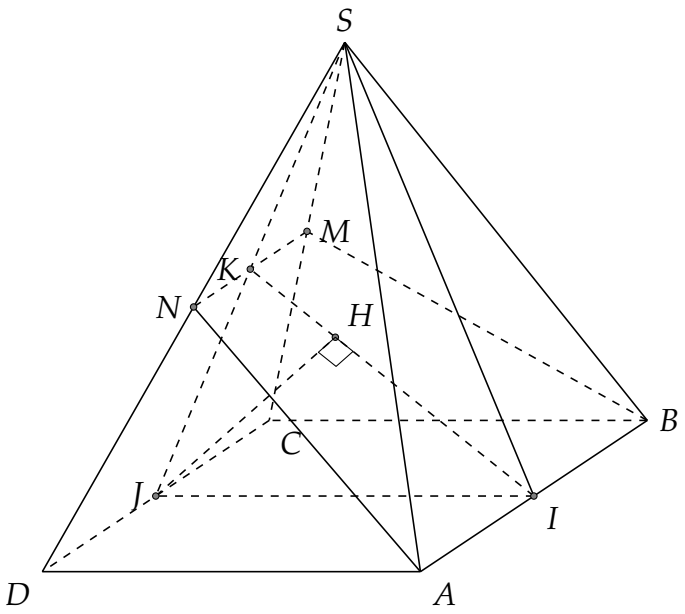
Gọi độ dài cạnh đáy là x $(x > 0)$ thì ta có $OI = \dfrac{1}{3}CI = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.
Tam giác $A'OI$ vuông tại O có OH là đường cao.
$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OA'^2} \Rightarrow \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{12}{x^2} \Rightarrow OA'^2 = \frac{a^2x^2}{4x^2 - 12a^2}. \quad (1)$$
Ta lại có tam giác $A'OA$ vuông tại O.
$$\Rightarrow OA'^2 = AA'^2 - OA^2 = \frac{7a^2}{3} - \frac{x^2}{3} = \frac{7a^2 - x^2}{3}. \quad (2)$$
Từ (1) & (2), ta có:
$$\frac{a^2x^2}{4x^2 - 12a^2} = \frac{7a^2 - x^2}{3} \Leftrightarrow 3a^2x^2 = 28a^2x^2 - 4x^4 - 84a^4 + 12a^2x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 - 37^2x^2 + 84a^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4a^2 \\ x^2 = \dfrac{21a^2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2a \\ x = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$
Vậy độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ đã cho là $2a$ hoặc $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$. □

BÀI 7. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AB và khoảng cách giữa CD và (P) bằng a.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P). Tính diện tích của thiết diện này.

Lời giải.



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Ta có $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp IJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow (P) \perp (SIJ)$.
Lại có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (P) \Rightarrow (SCD) \cap (P) = MN \parallel CD$ $(M \in SC, N \in SD)$.
Trong mặt phẳng (SCD), gọi K là giao điểm của SJ và MN, ta có $(P) \cap (SIJ) = IK$.
Trong mặt phẳng (SIJ), kẻ $JH \perp IK$ tại H, ta có $JH \perp (P) \Rightarrow JH = d(J, (P))$.
Vì $CD \parallel (P)$ nên $d(CD, (P)) = d(J, (P))$. Do đó, ta có $JH = a$.
Ta có $\begin{cases} (P) \cap (ABCD) = AB \\ AB \perp IJ \\ AB \perp IK \end{cases} \Rightarrow \widehat{JIH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.
Tam giác IHJ vuông tại H nên $\tan \widehat{JIH} = \dfrac{JH}{IJ} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{JIH} = 30^\circ$.

b) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang $ABMN$.
Tam giác SIA vuông tại I nên $SI^2 = SA^2 - IA^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow SI = 2a$.
$\Rightarrow SJ = SI = IJ = 2a \Rightarrow$ tam giác SIJ đều cạnh $2a$.
$\Rightarrow IK$ là đường phân giác của tam giác SIJ nên IK cũng là đường trung tuyến, đường cao của tam giác SIJ.
$\Rightarrow K$ là trung điểm của SJ hay MN là đường trung bình của tam giác $SCD \Rightarrow MN = a$.
Hình thang $ABMN$ có hai đáy MN, AB và đường cao IK nên có diện tích là:
$S_{ABMN} = \dfrac{1}{2}(AB + MN).IK = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

□

BÀI 6. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

A ĐỀ SỐ 1A

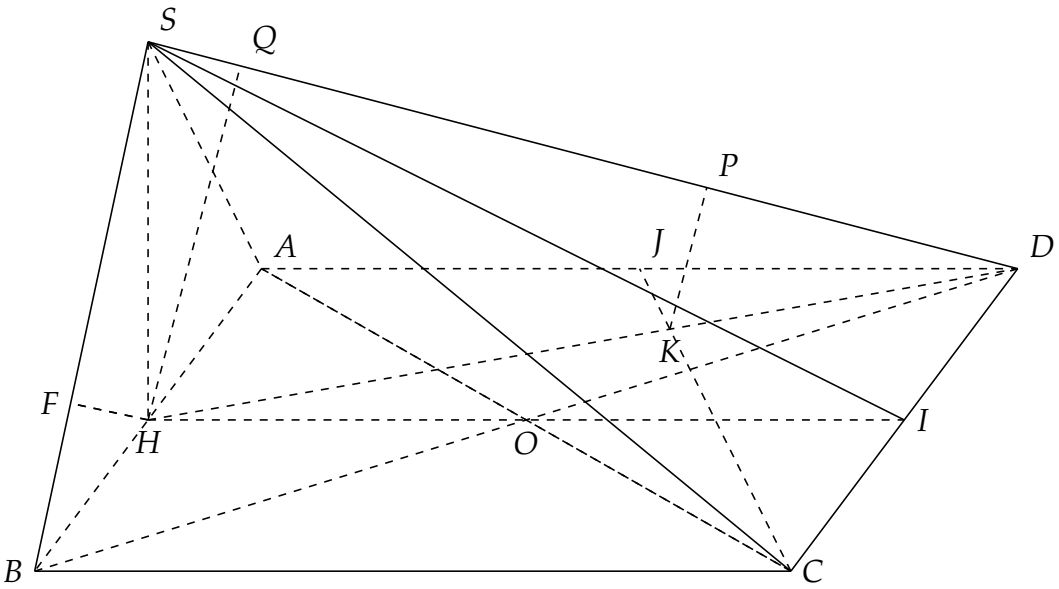
Câu 1. (6 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $AB = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi H, J lần lượt là trung điểm AB, AD.

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$; $(SBC) \perp (SAB)$

b) Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) và khoảng cách giữa hai đường thẳng CJ và SD.

Lời giải.



a) Ta có tam giác SAB đều và có H là trung điểm AB nên $SH \perp AB$.

Mà $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \end{cases}$ ..... (0.5)

Ta có $BC \perp SH$ (vì tam giác SAB là tam giác đều vuông góc với mặt đáy) và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ ..... (0.5)

b) Gọi I là trung điểm CD. Ta có: $\begin{cases} IH \perp CD \\ SH \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI$ ..... (0.5).

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(SI,HI)}$ ..... (0.5)

Ta có tam giác SHI vuông tại H, có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH = a$, $\tan \widehat{SIH} = \dfrac{SH}{IH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{SIH} \approx 41^\circ$.

Vậy $\widehat{((SCD),(ABCD))} = 41^\circ$ ..... (0.5)

c) Ta có $OH \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow OH \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SBC)) = \mathrm{d}(H,(SBC))$ ..... (0.5)

$(SAB) \perp (SBC)$, $(SAB) \cap (SBC) = SB$, trong (SAB) kẻ $HF \perp SB$ tại F.

$\Rightarrow HF \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBC)) = HF$ ..... (0.5)

Tam giác SHB vuông tại H có HF là đường cao nên $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{16}{3a^2}$
$\Rightarrow HF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ ..... (0.5).
Ta có $\Delta CDJ = \Delta DAH \Rightarrow \widehat{DCJ} = \widehat{ADH}$, mà $\widehat{DCJ} + \widehat{DJC} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{DJC} = 90^\circ \Rightarrow JC \perp DH$ và $CJ \perp SH \Rightarrow CJ \perp (SDH)$ ..... (1.0)
Gọi $K = CJ \cap DH$.
Trong (SDH) kẻ $KP \perp SD$ tại P. Ta có $\mathrm{d}(CJ,SD) = KP$ ..... (0.5).
$\dfrac{DK}{DH} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow KP = \dfrac{a\sqrt{30}}{20}$. Vậy $\mathrm{d}(CJ,SD) = \dfrac{a\sqrt{30}}{20}$ ..... (0.5).

□

Câu 2. (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A. Cạnh $SA \perp (ABC)$ biết $SA = AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$.

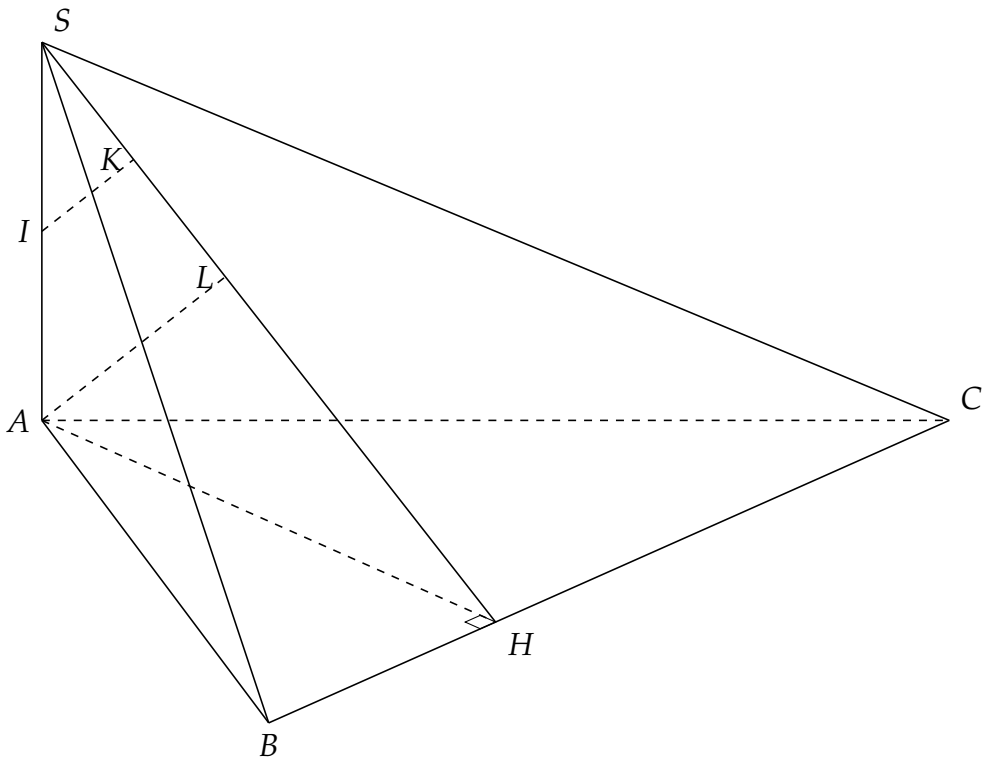
a) Tính góc hợp bởi cạnh SB với mp(SAC)

b) Dựng $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh rằng $(SAH) \perp (SBC)$.

c) Tính góc hợp bởi (SBC) và (ABC)

d) Gọi I là trung điểm của SA. Tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC).

Lời giải.



a) Ta có $BA \perp AC$ và $BA \perp SA \Rightarrow BA \perp (ABC)$
$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC)
$\Rightarrow \widehat{(SB,(SAC))} = \widehat{(SB,AS)} = \widehat{BSA}$ ..... (0.5)
Ta có $\tan BSA = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\Rightarrow BSA = 30^\circ$ ..... (0.5)

b) Ta có $SA \perp BC$
Mà $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$ ..... (0.5)

c) Ta có $BC \perp (SAH)$
$\Rightarrow BC \perp AH$ và $BC \perp SH$
$\Rightarrow ((SCB),(ABC)) = (SH, AH) = \widehat{SHA}$
(0.5) Trong tam giác SAH vuông tai A ta có:
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} = 2 \Rightarrow \widehat{SHA} = \arctan 2$ ..... (0.5)

d) Từ I dựng $IK \perp SH$. Ta có $(SBC) \perp (SAH)$
$\Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK$ là khoảng cách từ A đến (SBC)..... (0.5)
Gọi AL là đường cao của tam giác SAH ta có
$\dfrac{1}{AL^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} \Rightarrow AL = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
$\Rightarrow IK = \dfrac{AL}{2} \Rightarrow IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ ..... (0.5)

□

B ĐỀ SỐ 1B

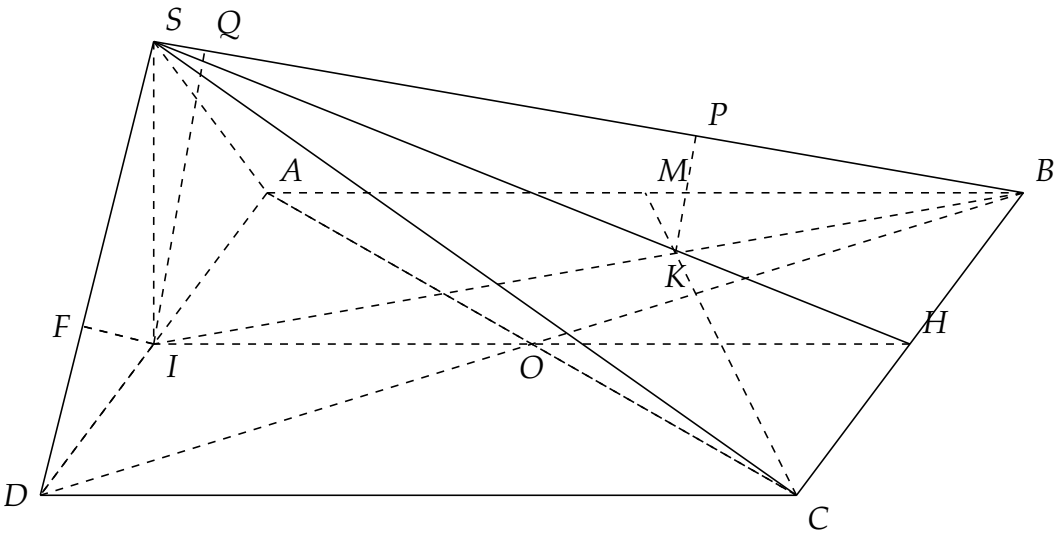
Câu 1. (6 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $AB = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi I, M lần lượt là trung điểm AD, AB.

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$; $(SAD) \perp (SCD)$.

b) Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB.

Lời giải.



a) Ta có tam giác SAD đều và có I là trung điểm AD
Nên $SI \perp AD$ và $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SI \perp (ABCD) \\ SI \subset (SAD) \end{cases}$ ..... (0.5)
Ta có $CD \perp SI$ và $AD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$ ..... (0.5)

b) Gọi H là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} HI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI) \Rightarrow BC \perp SH$ ..... (0.5)

Mà $(SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{(SH,HI)}$ ..... (0.5)

Ta có tam giác SHI vuông tại I, có $SI = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $IH = a$, $\tan \widehat{SHI} = \dfrac{SI}{HI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{SHI} \approx 41^\circ$ ..... (0.5)

Vậy $\widehat{((SBC),(ABCD))} \approx 41^\circ$

c) Ta có: $OI \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow OI \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = \mathrm{d}(I,(SCD))$ ..... (0.5)

$(SAD) \perp (SCD), (SAD) \cap (SCD) = SD$, trong (SAD) kẻ $IF \perp SD$tại $F \Rightarrow IF \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(I,(SCD)) = IF$ ..... (0.5)

Tam giác SID vuông tại I có IF là đường cao nên $\dfrac{1}{IF^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{ID^2} = \dfrac{16}{3a^2}$

$\Rightarrow IF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ ..... (0.5).

Vậy $d\,(O,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $\Delta CBM = \Delta BAI \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{ABI}$ Mà $\widehat{BCM} + \widehat{BMC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABI} + \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp BI$ và $CM \perp SI \Rightarrow CM \perp (SBI)$ ..... (1.0)

Gọi $K = CM \cap BI$. Trong (SBI) kẻ $KP \perp SB$ tại P. Ta có $\mathrm{d}(CM,SB) = KP$ ..... (0.5)

$\dfrac{DK}{DI} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow KP = \dfrac{a\sqrt{30}}{20}$.

Vậy $d\,(CM,SB) = \dfrac{a\sqrt{30}}{20}$ ..... (0.5)

□

Câu 2. (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a. Cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

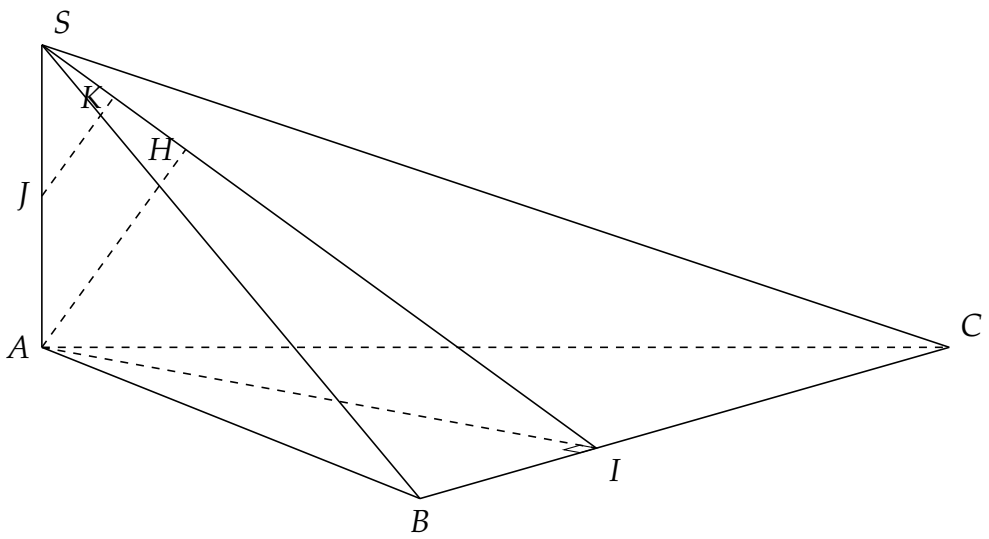
a) Tính góc hợp bởi cạnh SC với (ABC)

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

c) Tính góc hợp bởi (SBC) và (ABC)

d) Gọi J là trung điểm của SA Tính khoảng cách từ điểm J đến (SBC).

Lời giải.



a) Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên (ABC)
$\Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC,AC)} = \widehat{SCA}$ ..... (0.5)
Ta có $\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^\circ$ ..... (0.5)

b) Ta có $BC \perp AI$ (vì ΔABC đều)
Mặt khác $SA \perp BC$ (Vì $SA \perp (ABC)$)
$\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$ ..... (1.0)

c) Ta có $BC \perp (SAI)$
$\Rightarrow BC \perp AI$ và $BC \perp SI$
$\Rightarrow \widehat{((SCB),(ABC))} = \widehat{(SI,AI)} = \widehat{SIA}$ ..... (0.5)
Trong tam giác SAI vuông tai A ta có $\tan \widehat{SIA} = \dfrac{SA}{AI} = 2 \Rightarrow \widehat{SIA} = \arctan 2$ ..... (0.5)

d) Từ J dựng $JK \perp SI$
Ta có $(SBC) \perp (SAH)$
$\Rightarrow JK \perp (SBC) \Rightarrow JK$ là khoảng cách từ A đến (SBC) ..... (0.5)
Gọi AH là đường cao của tam giác SAI ta có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow JK = \dfrac{AH}{2} \Rightarrow IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ ..... (0.5)

□

ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A ($AB \parallel CD$), $AB = AD = a$, $CD = 2a$ và O là trung điểm CD. Trên đường thẳng đi qua O và vuông góc với $(ABCD)$, lấy điểm S sao cho SA tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 45°.

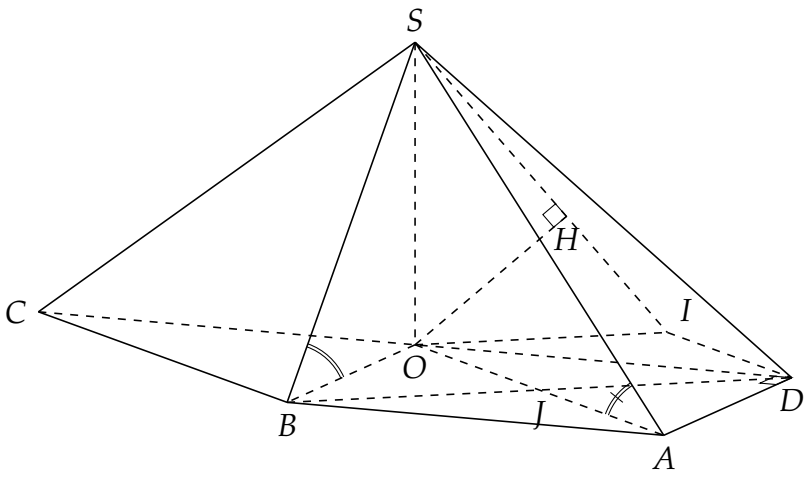
① Chứng minh BD vuông góc với mặt phẳng (SAO).

② Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAO).

③ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

④ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC.

Lời giải.
Vẽ hình đúng ..... **[1 điểm]**



① Vì O là trung điểm $CD \Rightarrow CO = DO = a = AB \Rightarrow ABOD$ là hình vuông ($\widehat{BAD} = 90^\circ$) $\Rightarrow AO \perp BD$ tại J. ..... **[1 điểm]**.
Vì $BD \perp AO, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAO)$ ..... **[1 điểm]**.

② Vì $BD \perp (SAO)$ và $BD \in (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$ ..... **[1 điểm]**.

③ Vì $ABOD$ là hình vuông nên $AB \perp OB$. Mà $AB \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên $AB \perp (SBO) \Rightarrow AB \perp SB$ ..... **[0,5 điểm]**.
Lại có $(SAB) \cap (ABCD) = AB, AB \perp SB, AB \perp OB, SB \subset (SAB), OB \subset (ABCD)$ nên góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBO}$ ..... **[1 điểm]**.
Vì $ABOD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$. Do SA tạo với $(ABCD)$ một góc 45° nên $\widehat{SAO} = 45^\circ \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$ ..... **[0,5 điểm]**.
Xét tam giác SOB vuông tại O có $\tan \widehat{SBO} = \dfrac{SO}{OB} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SBO} \approx 54,76^\circ$ ..... **[1 điểm]**.

④ Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng d đi qua $D, d \parallel BC \Rightarrow d \perp BD$. Từ O kẻ $OI \perp d$ $(I \in d) \Rightarrow$ $DJOI$ là hình vuông và $DI \perp (SOI) \Rightarrow OI = DJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ ..... **[1 điểm]**.
Kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI) \Rightarrow OH \perp (SID) \Rightarrow OH = \mathrm{d}(O;(SID))$ ..... **[0,5 điểm]**.
Xét ΔSOI vuông tại O có
$SO = a\sqrt{2}, OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ..... **[1 điểm]**.
Có CO cắt (SDI) tại $D \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(C,(SDI))}{\mathrm{d}(O,(SDI))} = \dfrac{CD}{OD} = 2$
$\Rightarrow \mathrm{d}(BC,SD) = \mathrm{d}(C,(SDI)) = 2OH = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ ..... **[0,5 điểm]**.

□

D ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A ($AB \parallel CD$), $AB = AD = a, CD = 2a, SD \perp (ABCD)$ và SA tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°.

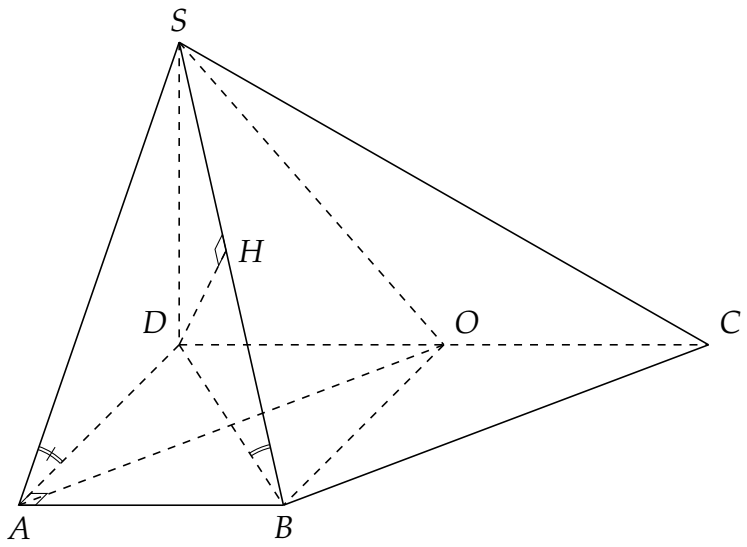
① Chứng minh BC vuông góc với mặt phẳng (SBD).

② Gọi O là trung điểm CD. Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAO).

③ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

④ Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải.
Vẽ hình đúng ..... **[1 điểm]**



① Vì O là trung điểm $CD \Rightarrow CO = DO = a = AB \Rightarrow ABOD$ là hình vuông ($\widehat{BAD} = 90^\circ$). **[0,5 điểm]**
$\Rightarrow AO \perp BD \Rightarrow AO \perp (SBD)$ (vì $SD \perp (ABCD)$) ..... **[0,5 điểm]**.
Vì $AB = OC$, $AB \parallel OC \Rightarrow ABCO$ là hình bình hành $\Rightarrow AO \parallel BC$
$\Rightarrow BC \perp (SBD)$ ..... **[1 điểm]**.

② Vì $BD \perp AO, SD \perp AO \Rightarrow AO \perp (SBD)$.
Mà $AO \subset (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$ ..... **[1 điểm]**.

③ Vì $BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp SB$. Lại có $BC \parallel AO$, $AO \perp BD \Rightarrow BC \perp BD \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBD}$ ..... **[1 điểm]**.
Xét hình vuông $ABOD$ cạnh a có $BD = a\sqrt{2}$ ..... **[0,5 điểm]**.
Xét tam giác SDA vuông tại D có $\widehat{SAD} = 60^\circ \Rightarrow SD = AD \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ ..... **[1 điểm]**.
Xét tam giác SDB vuông tại D có $\tan \widehat{SBD} = \dfrac{SD}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SBD} \approx 50,79^\circ$ ..... **[1 điểm]**.

④ Vì $BC \perp (SBD) \Rightarrow (SBC) \perp (SBD)$ ..... **[0,5 điểm]**.
Trong mặt phẳng (SBD), kẻ $DH \perp SB \Rightarrow DH = \mathrm{d}(D;(SBC))$ ..... **[1 điểm]**.
Xét tam giác SDB vuông tại D có $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{5}{6a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ ..... **[1 điểm]**.

□

E ĐỀ SỐ 3A

Câu 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC; H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên trên các đường thẳng AB và AC.

① Chứng minh rằng $BC \perp (OAI)$.

② Chứng minh rằng $(AOI) \perp (OHK)$.

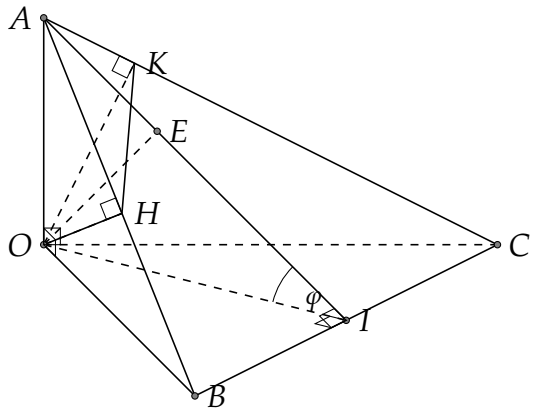
③ Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng ABC.

④ Tính cosin của góc α giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC).

⑤ Tính tang góc φ giữa hai mặt phẳng (OBC) và (ABC).

⑥ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và OI.

Lời giải.



① Ta có $OA \perp (OBC)$; suy ra $OA \perp BC$ (1) ..... 0,75 điểm
Ta có $OB = OC$ và I là trung điểm BC nên $BC \perp OI$ (2) ..... 0,75 điểm
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAI)$ ..... 0,5 điểm

② Vì H, K lần lượt là trung điểm AB, AC nên $HK \parallel BC$ ..... 0,5 điểm
Theo ý a) $BC \perp (OAI)$ nên $HK \perp (OAI)$ ..... 0,5 điểm

③ Từ O kẻ $OE \perp AI$ (1). Ta có $BC \perp (OAI)$ nên $BC \perp OE$ (2) ..... 0,5 điểm
Từ (1) và (2) suy ra $OE \perp (ABC)$, suy $\mathrm{d}(O,(ABC)) = OE$ ..... 0,5 điểm
xét tam giác AOI vuông tại O, ta có $\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$ suy ra $OE = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$
..... 0,5 điểm

④ Ta có $OE \perp (ABC)$ nên hình chiếu của OA lên mặt phẳng (ABC) là AE, góc $\alpha = \widehat{OAE}$
..... 0,75 điểm
Ta có tam giác OAE vuông tại E và $OE = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ nên $\cos\alpha = \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ..... 0,75 điểm

⑤ Góc $\varphi = \widehat{OIA}$ ..... 0,75 điểm
Ta có $\tan\varphi = \dfrac{OA}{OI} = \sqrt{2}$ ..... 0,75 điểm

⑥ Ta gọi F là giao điểm của HK và AI,từ F kẻ $FG \perp OI$, mặt khác $HK \perp (OAI)$(cmt) suy ra $FG \perp HK$, khi đó ta có FG là đoạn vuông góc chung của HK và OI..... 0,75 điểm
Xét tam giác OAI vuông tại O, ta có F là trung điểm của AI và $FG \parallel OA$ suy ra $FG = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{a}{2}$. ..... 0,75 điểm.
Hình vẽ đúng ..... 1,0 điểm

□

F ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

① Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

② Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

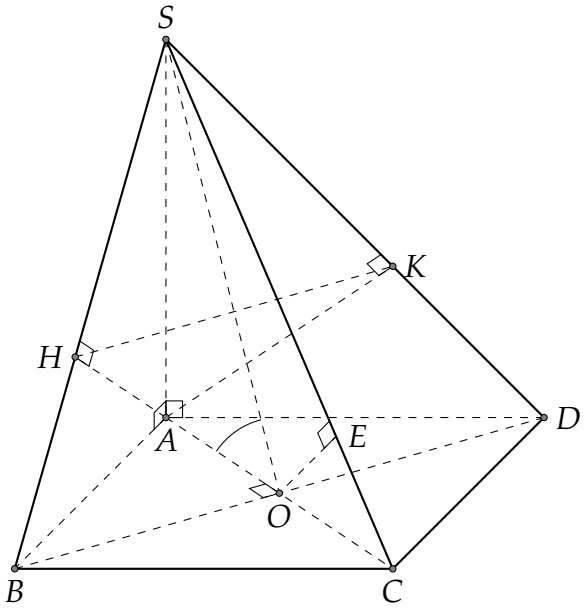
③ Tính góc α giữa SC và mặt phẳng đáy, góc β giữa SC và mặt phẳng (SAB).

④ Tính tang của góc φ giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

⑤ Tính khoảng cách từ điểm A đến SBC, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng SCD.

⑥ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD.

Lời giải.



① Ta có tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông vì $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$ ..... 0,5 điểm
Ta có $SA \perp CD$ và $CD \perp AD$ suy ra $CD \perp (SAD)$, suy ra $CD \perp SD$, do đó tam giác SDC vuông tại D. ..... 0,5 điểm
Ta có $SA \perp BC$ và $BC \perp AB$ suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$, do đó tam giác SBC vuông tại B. ..... 0,5 điểm

② Ta có $BD \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$
và $BD \perp AC$ và suy ra $BD \perp (SAC)$ ..... 0,5 điểm
Do đó $(SAC) \perp (SBD)$ ..... 0,5 điểm

③ Ta có CA là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ do đó góc $\alpha = \widehat{SCA}$. ..... 0,5 điểm
Vì tam giác SAC có $SA = AC = a\sqrt{2}$ suy ra $\alpha = 45^\circ$ ..... 0,5 điểm
Ta có $BC \perp (SAB)$ suy ra hình chiếu của SC lên mặt (SAB) là SB, do đó góc $\beta = \widehat{BSC}$ . . 0,5 điểm
Vì tam giác SBC vuông tại B, ta có $\tan\beta = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\beta = 30^\circ$ ..... 0,5 điểm.

④ Gọi O là giao điểm AC và BD. Ta có $AC \perp BD$ và $SO \perp BD$ do đó góc φ giữa (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SOA}$ ..... 0,75 điểm
Tam giác SAO vuông tại A, ta có $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AO} = 2$ ..... 0,75 điểm

⑤ Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$, do đó $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$ ..... 0,5 điểm
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$ suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ ..... 0,5 điểm
Kẻ $AK \perp SD$ suy ra $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ ..... 1,0 điểm

⑥ Từ O kẻ $OE \perp SC$, do $BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp OE$, do đó $\mathrm{d}(SC, BD) = OE$ . . . . 0,75 điểm
Xét tam giác vuông OEC ta có $\sin \widehat{SCA} = \dfrac{OE}{OC}$ suy ra $OE = \dfrac{a}{2}$ . . . . . 0,75 điểm
Hình vẽ đúng . . . . . 0,5 điểm

□