HỆ THỐNG LÍ THUYẾT TOÁN 10

A. ĐẠI SỐ.

I. TẬP HỢP VÀ MỆNH ĐỀ.

1. MỆNH ĐỀ.

1.1. Định nghĩa.

Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai.

Một khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**.

Một khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

1.2. Mệnh đề chứa biến.

Kí hiệu P(n), trong đó n là biến.

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.

1.3. Phủ định của một mệnh đề.

Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\overline{P}$.

Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là:

- $\overline{P}$ đúng khi P sai.
- $\overline{P}$ sai khi P đúng.

1.4. Mệnh đề kéo theo.

Cho hai mệnh đề P và Q.

Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là **mệnh đề kéo theo**, và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Như vậy, ta chỉ xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ khi P đúng. Khi đó, nếu Q đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng, nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai.

Các định lí, toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q.$

Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lý, ta nói

P là giả thiết, Q là kết luận của định lí;

P là **điều kiện đủ** để có Q ;

Q là **điều kiện cần** để có P .

1.5. Mệnh đề đảo, hai mệnh đề tương đương.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q.$

Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là **hai mệnh đề tương đương**.

Khi đó ta có kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là P tương đương $Q,$ hoặc P là điều kiện cần và đủ để có $Q,$ hoặc P khi và chỉ khi $Q.$

1.6. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$.

Ví dụ: Câu "Bình phương của mọi số thực đều lớn hơn hoặc bằng 0" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \text{ hay } x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kí hiệu $\forall$ đọc là "với mọi".

Ví dụ: Câu "Có một số nguyên nhỏ hơn 0" là một mệnh đề.

Có thể viết mệnh đề này như sau

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n < 0.$$

Kí hiệu $\exists$ đọc là "có một" (tồn tại một) hay "có ít nhất một" (tồn tại ít nhất một).

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X,\ P(x)$" là "$\exists x \in X,\ \overline{P(x)}$".

2. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP.

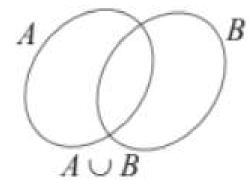
1. Hợp và giao của các tập hợp

- Tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B gọi là **hợp** của hai tập hợp A và B.

Kí hiệu: $A\cup B$

$A\cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A \\ x\in B \end{array}\right.$$

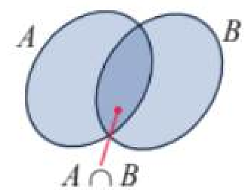


- Tập hợp các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B gọi là **giao** của hai tập hợp A và B.

Kí hiệu: $A\cap B$

$A\cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

$$x\in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in B \end{cases}$$

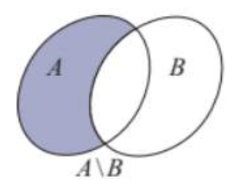


2. Hiệu của hai tập hợp, phần bù của tập con

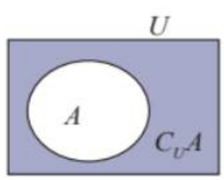
- Tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là **hiệu** của A và B, kí hiệu A\ B.

A\B = {x | x ∈ A và x ∉ B}

$$x\in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases}$$



- Nếu $A\subset U$ thì hiệu $U\setminus A$ được gọi là phần bù của A trong U, kí hiệu $C_U A$.



II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

1.1. Định nghĩa.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$ax+by\le c \quad (1) \quad (ax+by<c;\ ax+by\ge c;\ ax+by>c)$

trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}$, a và b không đồng thời bằng 0; x, y là các ẩn số.

1.2. Biển diễn tập nghiệm.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax+by\le c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax+by\ge c$)

- **Bước 1.** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ vẽ đường thẳng $\Delta:\ ax+by=c.$
- **Bước 2.** Lấy một điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc tọa độ O)
- **Bước 3.** Tính ax_0+by_0 và so sánh ax_0+by_0 với $c.$
- **Bước 4.** Kết luận

Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c.$

Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c.$

Chú ý:

Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0\le c$ bỏ đi đường thẳng $ax+by=c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0<c.$

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

2.1. Định nghĩa.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x,\ y$ mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

2.2. Biểu diễn tập nghiệm.

Quy tắc biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn:
- Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

III. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ.

1. Hàm số.

1.1. Hàm số.

Cho một tập hợp **khác rỗng** $D\subset\mathbb{R}$**.**

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập số D.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.

- Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.
- Tập tất cả các giá trị y nhận được, gọi là tập giá trị của hàm số.

Ta nói $T = \{ f(x) \mid x \in D \}$ là tập giá trị của $f(x)$ (trên D).

1.2. Đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D. Hay có thể diễn tả bằng: $M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ với $x_0 \in D$.

1.3. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên $(a;b)$ nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay giảm) trên $(a;b)$ nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Nhận xét:

+ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.

+ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

2. Hàm số bậc hai.

2.1. Định nghĩa.

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$,

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+ Khi $a = 0$, $b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

+ Khi $a = b = 0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2.2. Đồ thị của hàm số bậc hai.

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2, a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là một parabol có:

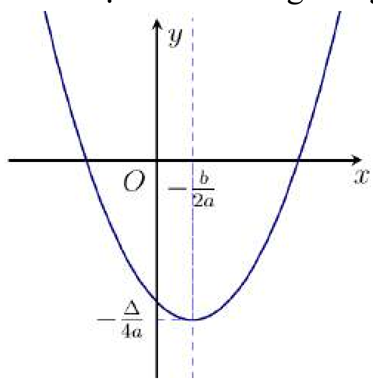
+ Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

+ Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

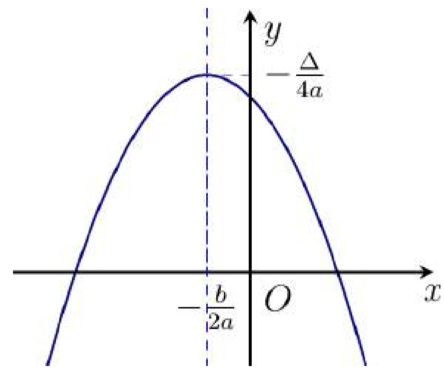
+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a>0$, hướng xuống dưới nếu $a<0$.

+ Giao điểm với trục tung là $M\left(0;c\right)$.

+ Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.



$a>0$



$a<0$

- Các bước vẽ đường parabol $y=ax^2+bx+c$:

1. Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;

2. Vẽ trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$;

3. Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

4. Vẽ parabol.

2.3. Sự biến thiên.

Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ ta có bảng tóm tắt về sự biến thiên của hàm số như sau:

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Khi $a>0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$.

Khi $a<0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$.

3. Dấu của tam thức bậc hai.

3.1. Tam thức bậc hai.

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

3.2. Dấu của tam thức bậc hai.

Cho $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right),\Delta=b^2-4ac$.

+ Nếu $\Delta<0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta=0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq-\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta>0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;+\infty\right)$ và $f\left(x\right)$ luôn trái dấu với hệ số a khi $x\in\left(x_1;x_2\right)$. Trong đó $x_1.x_2$ là hai nghiệm của $f\left(x\right)$.

- Các bước xét dấu tam thức bậc hai $f(\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

Bước 1: Tính và xác định dấu của biệt thức Δ;

Bước 2: Xác định nghiệm của *f(x)* (nếu có);

Bước 3: Xác định dấu của hệ số *a*;

Bước 4: Xác định dấu của *f(x)*.

4. Phương trình quy về phương trình bậc hai.

4.1. Bất phương trình bậc hai.

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (hoặc $ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$), trong đó a,b,c là những số thực đã cho, $a\neq 0$.

4.2. Giải bất phương trình bậc hai.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c>0$ là tìm các khoảng mà trong đó $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có dấu dương.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c\ge 0$ là tìm các khoảng mà trong đó $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có dấu không âm (lớn hơn hoặc bằng 0).

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ là tìm các khoảng mà trong đó $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có dấu âm.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c\le 0$ là tìm các khoảng mà trong đó $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có dấu không dương (bé hơn hoặc bằng 0).

4.3. Phương trình quy về phương trình bậc hai.

4.3.1. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Các bước giải phương trình: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$:

- Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- Bước 2: Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}\Leftrightarrow\begin{cases}ax^2+bx+c\ge 0\\dx^2+ex+f\ge 0\\ax^2+bx+c=dx^2+ex+f\end{cases}$$

4.3.2. Phương trình dạng: $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Các bước giải tương tự dạng phương trình trên.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e\Leftrightarrow\begin{cases}dx+e\ge 0\\ax^2+bx+c=\left(dx+e\right)^2\end{cases}$$

IV. ĐẠI SỐ TỔ HỢP.

1. Quy tắc đếm.

- **Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiên, hành động kia có n cách thực hiên không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có m + n cách thực hiện.
- **Quy tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp.Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có m.n cách thực hiện.
- **Cách đếm gián tiếp (đếm phần bù):**

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.

- Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.

Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a-b$.

2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

2.1. Hoán vị.

- Định nghĩa: Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó (với n là số tự nhiên, $n \geq 1$).
- Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1.$$

2.2. Chỉnh hợp.

- Định nghĩa: Một chỉnh hợp chập k của n là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k,n là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq n$).
- Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $1 \leq k \leq n$ là

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.3. Tổ hợp.

- Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k,n là các số tự nhiên, $0 \leq k \leq n$).
- Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3. Nhị thức Newton.

Công thức nhị thức Newton:

Với a,b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n. (1)$$

Quy ước $a^0 = b^0 = 1$

B. HÌNH HỌC.

I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.

1. Định nghĩa.

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác.

Hai góc bù nhau	Hai góc phụ nhau
$\sin(180^o-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(90^o-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(90^o-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(90^o-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(180^o-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(90^o-\alpha)=\tan\alpha$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

Góc α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Các hệ thức lượng giác cơ bản.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\ne 90^o)\ \ ;$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \ (\alpha\ne 0^o;\,180^o)$$

$$\tan\alpha.\cot\alpha=1\ (\alpha\ne 0^o;\,90^o;\,180^o)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha\ne 90^o)$$

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ \ (\alpha\ne 0^o;\,180^o)$$

5. Định lý cosin và định lý sin.

Cho tam giác $ABC,\ BC=a,\ CA=b,\ AB=c,\ S$ là diện tích tam giác. Giả sử h_a,h_b,h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh $A,B,C;\ m_a,m_b,m_c$ lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nột tiếp của tam giác ABC. Ta có các định lý sau:

5.1. Định lý cosin trong tam giác.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

Hệ quả của định lý cosin:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

5.2. Định lý sin trong tam giác.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

***Hệ quả của định lí sin**

$$a = 2R.\sin A \qquad \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$b = 2R.\sin B \qquad \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$c = 2R.\sin C \qquad \sin C = \frac{c}{2R}$$

6. Giải tam giác.

- Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

- Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

Các công thức tính diện tích tam giác:

1) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$

2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

3) $S = \frac{abc}{4R}$

4) $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

5) Công thức Hê- Rông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

II. VECTƠ.

1. VECTƠ.

1.1. Định nghĩa.

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rỏ điểm đầu, điểm cuối.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, … khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối.

Độ dài vectơ: Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

1.2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

Giá của vectơ: Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

1.3. Hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.
Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

Chú ý

Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

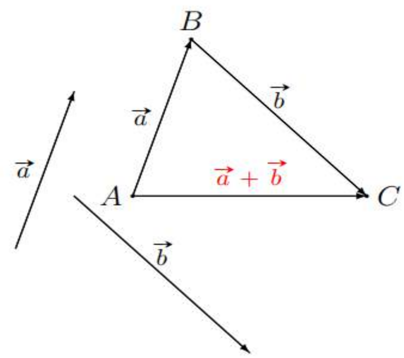
1.4. Vectơ không.

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là $\vec{0}$.
Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.
Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ.

2.1. Tổng của hai vectơ.

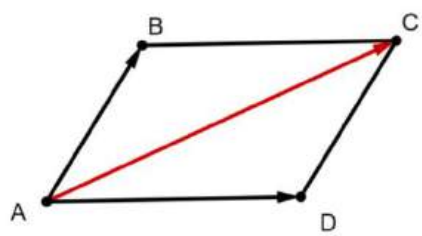
Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.



Các quy tắc:

+ *Quy tắc ba điểm*: Với ba điểm $A,\ B,\ C$, ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

+ *Quy tắc hình bình hành*: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$
.



2.2. Tính chất của phép cộng vectơ.

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý, ta có:

+ Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

+ Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

+ Tính chất của vectơ - không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

2.3. Hiệu của hai vectơ.

+ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

+ Với ba điểm $O,\ A,\ B$ tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

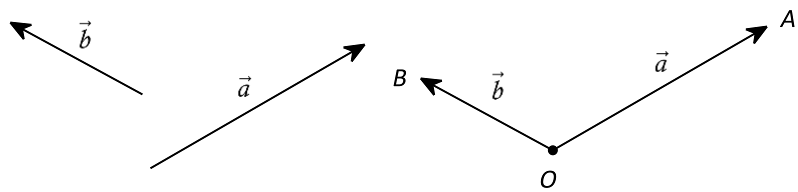
2.4. Tính chất vectơ của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác.

+ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
+ Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

3. TÍCH VÔ HƯỚNG.

3.1. Góc giữa hai vectơ.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc AOB với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.



Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

3.2. Tích vô hướng của hai vectơ.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$

Chú ý:

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\overrightarrow{a^2}$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2$

3.3. Tính chất của tích vô hướng.

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;

- $\vec{a}^2 \geq 0,\ \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Lưu ý:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG.

1. Tọa độ của vectơ.

1.1. Tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ.

Trục tọa độ

- Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.
- Điểm O gọi là gốc tọa độ.
- Hướng của vecto đơn vị là hướng của trục.
- Kí hiệu trục đó là $\left(O;\vec{i}\right)$.

Cho M là một điểm tùy ý trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i}$.

Ta gọi số x_0 đó là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

Cho hai điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$.

Ta gọi số a là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a = \overline{AB}$.

Nhận xét.

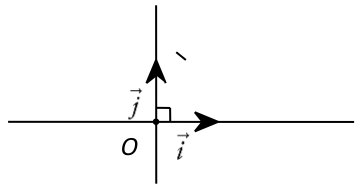
- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$. có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

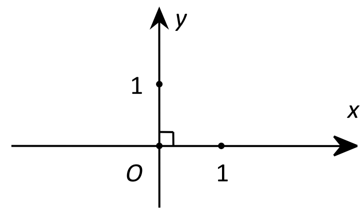
Hệ tọa độ

Định nghĩa. Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ gồm hai trục $\left(O;\vec{i}\right)$ và $\left(O;\vec{j}\right)$ vuông góc với nhau.

Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $\left(O;\vec{i}\right)$ được gọi là trục hoành và kí

hiệu là Ox, trục $(O;\vec{j})$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ
đơn vị trên Ox và Oy và $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$. Hệ trục tọa độ $(O;\vec{i},\vec{j})$ còn được kí hiệu là Oxy.



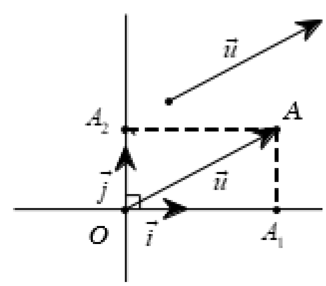


Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy còn được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy
Hay gọi tắt là mặt phẳng Oxy.

Tọa độ vecto

Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu
của vuông góc của A lên Ox và Oy. Ta có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x;y)$ để
$\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}, \overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Như vậy $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.
Cặp số $x;y$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết
$\vec{u}=(x;y)$ hoặc $\vec{u}(x;y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ
$\vec{u}$. Như vậy

$$\boxed{\vec{u}=(x;y)\Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$



Nhận xét. Từ định nghĩa tọa độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{u'}=(x';y')$ thì $\boxed{\vec{u}=\vec{u'}\Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}.}$

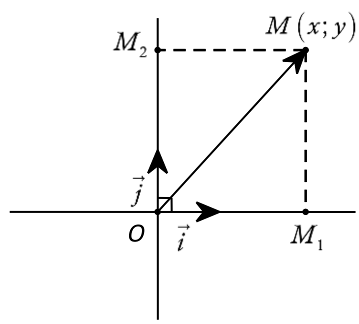
Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối

với hệ trục
Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.
Như vậy, cặp số $(x;y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x;y)$. Khi đó ta viết
$M = (x;y)$ hoặc $M(x;y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của
điểm M. Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí
hiệu là y_M.

$\boxed{M = (x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$ và độ dài của $\overrightarrow{OM}$ là $\boxed{\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}$



Chú ý rằng, nếu $MM_1 \perp Ox,\ MM_2 \perp Oy$ thì $x = \overline{OM_1},\ y = \overline{OM_2}$.

1.2. Biểu thức tọa độ của phép toán vectơ.

Cho $\vec{u} = (x;y)$; $\vec{v} = \ x';y'$ và số thực k. Khi đó ta có :

1) $\vec{u} \pm \vec{v} = \ x \pm x'; y \pm y'$

2) $k.\vec{u} = (kx;ky)$

3) $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$

4) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

5) $\vec{v}$ cùng phương $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

1.3. Áp cụng của tọa độ vectơ.

Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$ thì $\overrightarrow{AB} = \ x_B - x_A; y_B - y_A$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng

Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm

$I(x_I; y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$\boxed{x_I = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.}$$

Tọa độ trọng tâm của tam giác

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm

$G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.}$$

Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vecto

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta có:

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

2) $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_1 - a_2b_2 = 0$

3) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

4) $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

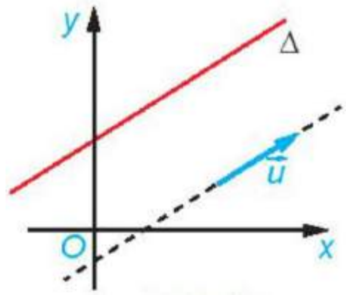
5) $\cos\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$)

2. Phương trình đường thẳng.

2.1. Phương trình đường thẳng.

2.1.1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

- Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ chỉ phương (VTCP)** của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.



Nhận xét:

+ Nếu $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng d thì $k.\vec{u}$, $(k \neq 0)$ cũng là một véc tơ chỉ phương của d.

+ Một đường thẳng xác định khi biết một vtcp và một điểm mà nó đi qua.

- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là **vectơ pháp tuyến (VTPT)** của Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

Nhận xét:

a) Nếu $\vec{n}$ là một vtpt của đường thẳng d thì $k.\vec{n}$, $(k \neq 0)$ cũng là một vtpt của d.

b) Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$.

c) Một đường thẳng xác định khi biết một VTPT và mộ điểm nó đi qua.

Liên hệ giữa VTPT và VTCP:

1. Từ nhận xét "Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$" ta rút ra được: nếu $\vec{n} = (A; B)$ là một VTPT của đường thẳng d thì một VTCP của d là $\vec{u} = (B; -A)$ (hoặc $\vec{u} = (-B; A)$).

2. Từ nhận xét "Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$" ta rút ra được: nếu $\vec{u} = (a; b)$ là một VTCP của đường thẳng d thì một VTPT của d là $\vec{n} = (-b; a)$ (hoặc $\vec{n} = (b; -a)$).

2.1.2. Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ (2) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số).

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a;b)$ thì có phương trình tham số là $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}}$. *(Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t \in \mathbb{R}$ và ngược lại).*

Nhận xét : $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt), \mathrm{t} \in \mathbb{R}$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, mọi phương trình dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một vtcp là $\vec{u} = (a;b)$.

2.1.3. Phương trình tổng quát (PTTQ) của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a;b)$ là một vectơ pháp tuyến.

1. Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (\mathrm{A};\mathrm{B})$ thì có phương trình tổng quát là $\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$.

2. Ngược lại, trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy mọi phương trình dạng $Ax + By + C = 0\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ đều là phương trình tổng quát của đường thẳng d có VTPT $\vec{n} = (\mathrm{A};\mathrm{B})$.

3. Một số trường hợp đặc biệt của PTTQ $Ax + By + C = 0\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$.

a) Nếu $A=0$ phương trình trở thành $By+C=0 \Leftrightarrow y=-\frac{C}{B}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0;-\frac{C}{B}\right)$.

b) Nếu $B=0$ phương trình trở thành $Ax+C=0 \Leftrightarrow x=-\frac{C}{A}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\frac{C}{A};0\right)$.

c) Nếu $C=0$ phương trình trở thành $Ax+By=0$ đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

d) Đường thẳng có dạng $y=ax+b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có VTPT là $\vec{n}=(a;-1)$. Ngược lại đường thẳng có VTPT $\vec{n}=(A;B)$ thì có hệ số góc là $-\frac{A}{B}$.

e) Đường thẳng d đi qua điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

2.1.4. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có vtcp $\vec{u}=(a;b)$ với $a\neq 0, b\neq 0$ có phương trình chính tắc là: $\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}}$

2.2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$.

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tuỳ ý trên Δ_1.

- Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.
- Nếu $P \notin \Delta_2$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$.

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm $M(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}.$$

2.3. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

- Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.
- Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 90^0.

Ta quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng 0^0. Như vậy góc α giữa hai đường thẳng luôn thoả mãn: $0^0 \le \alpha \le 90^0$.

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được kí hiệu là ($\widehat{\Delta 1, \Delta 2}$) hoặc (Δ_1, Δ_2).

Khi hai đường thẳng cắt nhau góc giữa hai đường thẳng được tính theo công thức:

$$\boxed{\cos(\Delta_1;\Delta_2) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

2.4. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ được tính theo công thức:

$$\boxed{d(M_0;\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

3. Phương trình đường tròn.

3.1. Phương trình đường tròn.

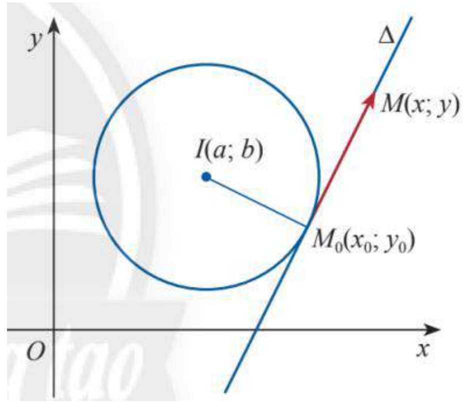
Dạng 1: Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ bán kính R

Phương trình có dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Dạng 2: Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3.2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn.

3.2.1.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \in (C)$



- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I của (C).
- Bước 2: Tiếp tuyến (D) là đường thẳng đi qua M_0 và có VTPT là $\overrightarrow{M_0I}$

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$$

3.2.2. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) tại điểm $M_0 \notin (C)$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: (D) là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;(D))=R$ $(*)$. Giải $(*)$ tìm được

mối liên hệ giữa $a\&b$. Chọn $a\&b$ phù hợp để kết luận.

3.2.3.Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) song song với $(D_1): Ax+By+C=0$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: $(D) \parallel (D_1): Ax+By+C=0$ nên phương trình có dạng

$Ax+By+C'=0 \ (C' \neq C)$

- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;(D))=R$ $(*)$. Giải $(*)$ tìm được C'

so với đk để kết luận.

3.2.4. Viết phương trình tiếp tuyến (D) với (C) biết (D) vuông góc với $(D_1): Ax+By+C=0$

- Bước 1: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).
- Bước 2: $(D) \perp (D_1): Ax+By+C=0$ nên phương trình có dạng

$Bx-Ay+C'=0$

- Bước 3: (D) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;(D))=R$ $(*)$. Giải $(*)$ tìm được C'

so với đk để kết luận.

3.2.5. Chú ý:

- Sự tương giao của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $(D): Ax+By+C=0$ và đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$

- $(D)\cap(C)=\{M;N\} \Leftrightarrow d(I;(D))<R$
- $(D)\cap(C)=\{M\} \Leftrightarrow d(I;(D))=R$
- $(D)\cap(C)=\varnothing \Leftrightarrow d(I;(D))>R$

- Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và đường tròn (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2. Giả sử $R_1>R_2$. Ta có:

- Hai đường tròn tiếp xúc $\Leftrightarrow I_1I_2=|R_1 \pm R_2|$
- Hai đường tròn cắt nhau $R_1-R_2<I_1I_2<R_1+R_2$

4. Ba đường conic.

4.1. Elip.

- Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2=2c>0$. Cho số thực a lớn hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1+MF_2=2a$ được gọi là **đường elip** . Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai **tiêu điểm** và $F_1F_2=2c$ được gọi là **tiêu cự** của elip đó.

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đọan thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$. (2)

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (2) đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.

- Phương trình (2) được gọi là **phương trình chính tắc** của elip tương ứng.

***Tính chất và hình dạng của Elip:** Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

- Trục đối xứng Ox, Oy

● Tâm đối xứng O.

● Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

● Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

● Độ dài trục lớn $2a$. Độ dài trục bé $2b$.

● Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở có kích thước là $2a$ và $2b$.

● Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$.

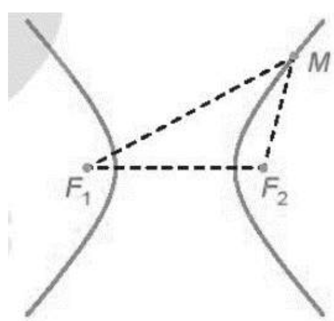
● Hai đường chuẩn $x=\frac{a}{e}$ và $x=-\frac{a}{e}$.

● $M(x;y)\in(E)$. Khi đó $MF_1=a+ex$: bán kính qua tiêu điểm trái.

$MF_1=a-ex$: bán kính qua tiêu điểm phải.

4.2. Hypebol.

Trên mặt phẳng, nếu hai thiết bị đặt tại các vị trí F_1, F_2 nhận được một tín hiệu âm thanh cùng lúc thì vị trí phát ra tín hiệu cách đều hai điểm F_1, F_2, và do đó, nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2.



Cho hai điểm phân biệt cố định F_1, F_2. Đặt $F_1F_2=2c$. Cho số thực dương a nhỏ hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$ được gọi là đường hypebol . Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai *tiêu điểm* và $F_1F_2=2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol đó.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm đó thì có phương trình $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a,b>0$.

4.3. Parabol.

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là đường parabol . Điểm F được gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của parabol đó.

Xét (P) là một parabol với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. Khi đó, trong hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là trung điểm của HF, tia Ox trùng với tia OF, parabol (P) có phương trình

$$y^2 = 2px \qquad (5)$$

Phương trình (5) được gọi là phương trình chính tắc của parabol (P).

Ngược lại, mỗi phương trình dạng (5), với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

C. THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT.

I. THỐNG KÊ.

1. Số gần đúng và sai số.

1.1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp ta không thể biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu $\overline{a}$) mà ta chỉ tìm được giá trị khá xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là số gần đúng kí hiệu là a.

1.2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối.

1.3. Sai số tuyệt đối của số gần đúng

Giá trị $|a-\overline{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\overline{a}$ và số gần đúng a, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, kí hiệu là Δ_a, tức là: $\Delta_a = |a-\overline{a}|$.

Độ chính xác của một số gần đúng

Trong thực tế, nhiều khi ta không biết $\overline{a}$ nên ta không tính được Δ_a. Tuy nhiên ta có thể đánh giá Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$, khi đó ta viết $\overline{a} = a \pm d$

d gọi là *độ chính xác của số gần đúng*.

2.2. Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Nhận xét: Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le$ d suy ra $\delta_a \le \frac{d}{|a|}$. Do đó $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đặc hay tính toán càng cao.

1.4 Quy trò số gần đúng.

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là **số quy tròn**. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

- Quy tắc quy tròn các số như sau:

Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.

Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào số hàng làm tròn.

- Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng số nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn.

Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

- Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước:

Các bước xác định số quy tròn của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở Bước 1.

- Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

Để tìm số gần đúng a của số đúng $\overline{a}$ với độ chính xác d, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

Bước 2: Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

2. Các số đặc trung đo xu thế trung tâm.

2.1. Số trung bình.

Số trung bình (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Chú ý. Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k}{n}$$

Trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$.

Ý nghĩa. Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để dại diện cho mẫu số liệu.

2.2. Trung vị và tứ phân vị.

2.2.1. Trung vị.

Cách tìm trung vị của một mẫu số liệu:

- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Ý nghĩa. Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

2.2.2. Tứ phân vị.

Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các **tứ phân vị** của mẫu số liệu

Ý nghĩa. Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.

2.4. Mốt.

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ý nghĩa. Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

3. Các số đặc trung đo xu thế trung tâm.

3.1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị.

- **Khoảng biến thiên :** kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

  Ý nghĩa: Khoảng biến thiên dung để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

- **Khoảng tứ phân vị**, kí hiệu Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, túc là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

  Ý nghĩa: Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

3.2. Phương sai và độ lệch chuẩn.

- **Phương sai** là giá trị $\mathbf{s}^2 = \dfrac{\left(\mathbf{x}_1 - \overline{\mathbf{x}}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_2 - \overline{\mathbf{x}}\right)^2 + \ldots + \left(\mathbf{x}_\mathbf{n} - \overline{\mathbf{x}}\right)^2}{\mathbf{n}}$.
- Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là **độ lệch chuẩn**.

Chú ý. Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{x}\right)^2}{n-1}.$$

Ý nghĩa: Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

II. XÁC SUẤT.

1. Không gian mẫu và biến cố.

1.1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu.

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

- Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

1.2. Biến cố.

- Một **biến cố** A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi A hoặc Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

- **Biến cố chắc chắn** là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω.

- Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$.

1.3. Các phép toán trên biến cố

- Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$. Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

+ Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

+ Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

+ Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.

Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	**Ngôn ngữ biến cố**
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

2. Xác suất của biến cố.

2.1. Xác suất của biến cố.

Giả sử một phép thử có không gian mẫu Ω gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố.

Xác suất của biến cố A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

trong đó: $n(A)$ và $n(\Omega)$ lần lượt kí hiệu số phần tử của tập A và Ω.

Chú ý: $0 \le P(A) \le 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0$.

2.2. Biến cố đối.

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A.

$$\overline{A} = \Omega \backslash A;\ P(\overline{A}) + P(A) = 1.$$

Suy ra: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$