



(Đề gồm 02 trang)

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$.

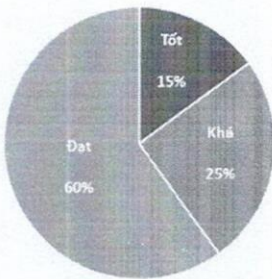
c) Đặt $T = 4 - \frac{3}{2}A.B$. Tìm các giá trị của x để biểu thức T nhận giá trị nguyên lớn nhất.

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Gieo một con xúc xắc 20 lần liên tiếp. Kết quả mặt xuất hiện được ghi lại bởi bảng tần số:

Mặt xuất hiện	Mặt 1 chấm	Mặt 2 chấm	Mặt 3 chấm	Mặt 4 chấm	Mặt 5 chấm	Mặt 6 chấm
Tần số	2	4	2	5	4	3

Hãy cho biết đôi tượng thống kê và kích thước của mẫu thống kê trên?



b) Biểu đồ bên biểu diễn tỷ lệ xếp loại kết quả học tập của học sinh lớp 9A. Tính xác suất của biến cố: “Chọn được học sinh có kết quả xếp loại học tập Khá hoặc Tốt” khi chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp đó.

c) Một khối sắt hình cầu được làm bằng sắt nguyên chất, đặc ruột có giá trị diện tích mặt cầu (tính bằng m^2) gấp 3 lần giá trị thể tích của khối cầu đó (tính bằng m^3). Hỏi khối cầu sắt đó nặng bao nhiêu kilogram? (Biết rằng khối lượng riêng của sắt là $7800kg/m^3$ và lấy $\pi = 3,14$).

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Anh Khánh dự định mua một đôi giày thể thao và một chiếc vợt Pickleball với tổng số tiền theo giá niêm yết là 2,4 triệu đồng. Vì hôm đó cửa hàng có chương trình khuyến mãi giảm giá 10%

cho đôi giày và 15% cho chiếc vợt nên anh Khánh đã mua thêm một chiếc vợt như vậy nữa để tặng bạn thân. Tổng số tiền anh Khánh trả cho cửa hàng là 3,2 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của đôi giày và chiếc vợt đó là bao nhiêu triệu đồng?

b) Một cái cổng vòm hình parabol $y = mx^2$, ($m < 0$) được thiết kế cao 6 mét, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 mét. Người ta muốn gắn một thanh sắt nằm ngang vào hai thành cổng để treo băng rôn (Hai đầu của thanh sắt được gắn tiếp giáp vào mặt trong của hai thành cổng). Hãy xác định hệ số m và cho biết nếu thanh sắt được gắn ở độ cao 4,5 mét so với mặt đất thì độ dài của thanh sắt là bao nhiêu mét?

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây BC không qua tâm. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau ở H. Chứng minh rằng:

a) BCEF là tứ giác nội tiếp.

b) $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

c) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

d) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: (0,5 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

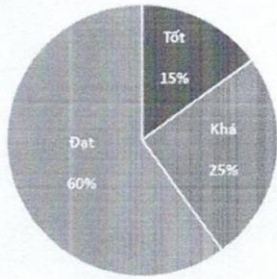
Chứng minh $\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq \frac{1}{2}$.

----- Hết -----



Kích thước mẫu thống kê: 20.

b) Xét phép thử: “Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 9A”.



Tỷ lệ học sinh xếp loại học tập Khá, Tốt là $25\% + 15\% = 40\%$.

Gọi tổng số học sinh có xếp loại học tập Khá, Tốt là $40k$, số học sinh cả lớp là $100k$ ($40k \in \mathbb{N}^*$; $100k \in \mathbb{N}^*$). Suy ra kích thước của không gian mẫu trong phép thử trên là $100k$.

Gọi A là biến cố “Chọn được học sinh có xếp loại học tập Khá hoặc Tốt” thì số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $40k$.

Vì các kết quả có thể trong phép thử trên là đồng khả năng nên xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{40k}{100k} = 40\%.$$

c) Gọi bán kính của khối cầu là r (m), $r > 0$.

Khi đó: + Diện tích mặt cầu của khối cầu là: $S = 4\pi r^2$ (m^2).

$$+ \text{Thể tích của khối cầu là: } V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (} m^3 \text{)}.$$

Vì diện tích mặt cầu của khối cầu gấp 3 lần thể tích của khối cầu nên ta có: $4\pi r^2 = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ suy

$$\text{ra } r = 1 \text{ (m)}. \text{ Do đó thể tích của khối cầu là } V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3 = \frac{314}{75} \text{ (} m^3 \text{)}.$$

$$\text{Vậy khối lượng của khối cầu sắt là: } m = \frac{314}{75} \cdot 7800 = 32656 \text{ (kg)}.$$

Câu 3:

a) Gọi giá niêm yết của đôi giày và chiếc vợt lần lượt là x, y triệu đồng. ($x, y > 0$)

Vì tổng số tiền theo giá niêm yết của hai mặt hàng là 2,4 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$x + y = 2,4.$$

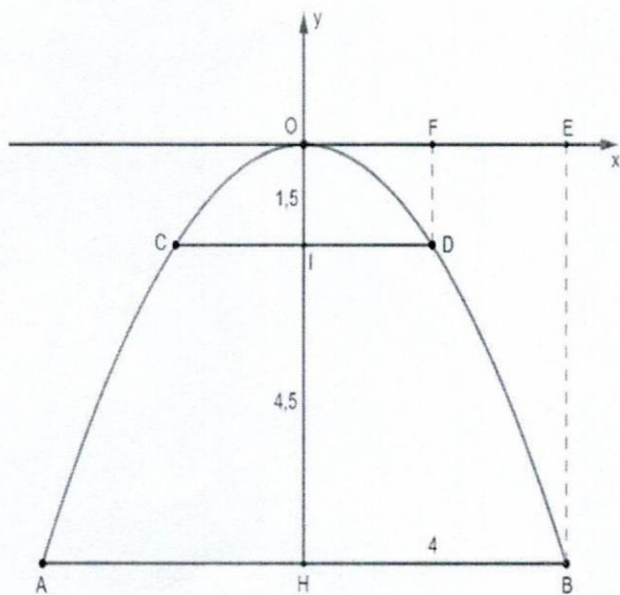
Vì anh Khánh trả cho cửa hàng 3,2 triệu đồng khi mua 3 mặt hàng theo chương trình khuyến

$$\text{mại nên ta có phương trình: } \frac{90x}{100} + 2 \cdot \frac{85y}{100} = 3,2.$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} x + y = 2,4 \\ \frac{90x}{100} + 2 \cdot \frac{85y}{100} = 3,2 \end{cases}$$
 Giải hệ ta được:
$$\begin{cases} x = 1,1 \\ y = 1,3 \end{cases}$$

Các giá trị thoả mãn điều kiện. Vậy giá niêm yết của đôi giày là 1,1 triệu đồng, của chiếc vớ là 1,3 triệu đồng.

b) Xét parabol $y = mx^2$, ($m < 0$) trong mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ.



Vì Parabol nhận Oy làm trục đối xứng nên $HB = 4m$ hay $OE = 4m$

Độ cao của cổng là 6m nên $OH = 6m$ suy ra $B(4; -6)$

Vì B thuộc parabol nên ta có $-6 = m \cdot 4^2$ hay $m = \frac{-3}{8}$. Suy ra $y = \frac{-3}{8}x^2$

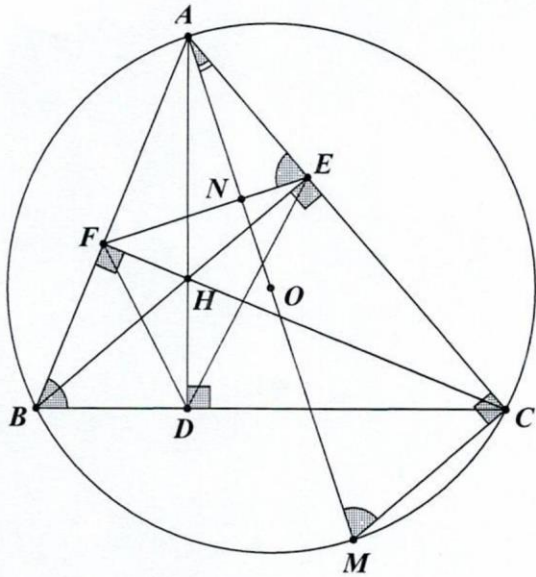
Thanh sắt đặt nằm ngang ở độ cao 4,5m so với mặt đất nên ta có $IH = 4,5m$ suy ra $OI = 1,5m$.

Đặt $OF = x(m)$; $x > 0$. Ta có $D(x; -1,5)$ thuộc parabol nên $-1,5 = \frac{-3}{8}x^2$.

Suy ra $x = 2$. Hay $ID = 2m$. Suy ra $CD = 4m$. Vậy độ dài của thanh sắt là 4m.

Câu 4:

a) Vì BE và CF là các đường cao của tam giác ABC nên $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ suy ra $\triangle BEC$ và $\triangle BFC$ là các tam giác vuông ở E và ở F.



Vì các tam giác $\triangle BEC$ và $\triangle BFC$ vuông ở E và vuông ở F nên chúng nội tiếp đường tròn đường kính BC. Suy ra bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC, do đó tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC (đpcm).

b) Vì AD là đường cao của tam giác ABC nên $AD \perp BC$. Do đó $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ là các tam giác vuông. Và vì vậy ta có $AD = AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$.

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{\sin C} = \frac{CA}{\sin B}.$$

Tương tự như vậy ta cũng chứng minh được $\frac{CA}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$.

$$\text{Suy ra } \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \text{ (đpcm).}$$

c) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF của đường tròn đường kính BC) (1)

Vì $\triangle HEC$ và $\triangle HDC$ là các tam giác vuông ở E và ở D nên chúng nội tiếp đường tròn đường kính CH. Suy ra $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH của đường tròn đường kính CH) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED}$. Hay EH là đường phân giác của tam giác DEF.

Chứng minh tương tự ta cũng có FH là đường phân giác của tam giác DEF.

Do vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (đpcm)

d) Vẽ đường kính AM của đường tròn (O).

Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{FBC} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ mà $\widehat{AEF} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{AEF} = \widehat{FBC}$

Lại có $\widehat{FBC} = \widehat{AMC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của đường tròn (O))

$$\text{Suy ra } \widehat{AEF} = \widehat{AMC}$$

Mà $\widehat{AMC} + \widehat{MAC} = 90^\circ$ (Do $\widehat{ACM} = 90^\circ$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

[Handwritten signature]

Suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{MAC} = 90^\circ$. Suy ra $AM \perp EF$.

Vì AM là đường kính nên AM đi qua O (cố định).

Vậy đường thẳng đi qua A và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5:

Theo bất đẳng thức AM- GM cho hai số dương, ta có

$$\frac{a}{1+9b^2} = \frac{a(1+9b^2) - 9ab^2}{1+9b^2} = a - \frac{9ab^2}{1+9b^2} \geq a - \frac{9ab^2}{2\sqrt{1.9b^2}} = a - \frac{3}{2}ab$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{1+9c^2} \geq b - \frac{3}{2}bc, \quad \frac{c}{1+9a^2} \geq c - \frac{3}{2}ca$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq a + b + c - \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$$

$$\text{Vì } ab + bc + ca \leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 \text{ suy ra}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \text{ hay } ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(a+b+c)^2 = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Lưu ý: Học sinh được phép sử dụng các nội dung sau trong kiểm tra, đánh giá và thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT mà không cần chứng minh:

1. Các nội dung trong các bộ sách giáo khoa môn Toán cấp THCS theo chương trình GDPT 2018 đã được phê duyệt dùng trên địa bàn tỉnh Thái Bình như: Định nghĩa, khái niệm, định lí, kiến thức trọng tâm, đọc hiểu - nghe hiểu, nhận xét, ghi chú, chú ý, lưu ý, những kết luận trong phân lý thuyết và phần “Em có biết”, phần tìm tòi - mở rộng, phần đọc thêm.
2. Bất đẳng thức AM-GM (bất đẳng thức Cauchy) cho 2 số.
3. Hạn chế dùng dấu suy ra “ \Rightarrow ”, dấu tương đương “ \Leftrightarrow ” trong quá trình lập luận và biến đổi.