

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

**Câu 1 (2 điểm).** Cho biểu thức  $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - x}{x - \sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

a) Chứng minh  $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $P = \frac{9}{2}$ .

**Câu 2 (2 điểm).** Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:

+) Gói cước 1: 1 800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1 500 đồng/phút cho thời gian còn lại.

+) Gói cước 2: 2 000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1 800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1 200 đồng/phút cho thời gian còn lại.

Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66 000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

**Câu 3 (2 điểm).** Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF – CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức.

Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội  $A, B, C, D, E$  thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội  $A, B, C, D, E$  lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

**Câu 4 (3 điểm).** Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $BC$  với  $OA$ ;  $I$  là giao điểm của đoạn thẳng  $OA$  với  $(O)$ .

a) Chứng minh  $BI$  là tia phân giác của góc  $ABH$ .

b) Kẻ đường kính  $BD$  của  $(O)$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $D$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $E$ . Chứng minh  $AD$  vuông góc với  $OE$ .

c) Trong trường hợp góc  $BDC$  bằng  $60^\circ$ , hãy tính theo  $R$  diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác  $ABC$  và nằm nằm phía ngoài  $(O)$ .

**Câu 5 (1 điểm).** Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá  $\frac{1}{2}$  và tổng của ba số bất kỳ trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của tổng bốn số đó.

.....**Hết**.....

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh: .....

Số báo danh: .....

**Câu 1 (2 điểm).** Cho biểu thức  $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - x}{x - \sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

a) Chứng minh  $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$ .

b) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để  $P = \frac{9}{2}$ .

**Câu 2 (2 điểm).** Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:

+) Gói cước 1: 1 800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1 500 đồng/phút cho thời gian còn lại.

+) Gói cước 2: 2 000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1 800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1 200 đồng/phút cho thời gian còn lại. Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66 000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

**Câu 3 (2 điểm).** Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF – CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức. Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội A, B, C, D, E thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

a) Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?

b) Khi kết thúc bảng đấu, các đội A, B, C, D, E lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

**Câu 4 (3 điểm).** Từ điểm A nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới  $(O)$  (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC với OA; I là giao điểm của đoạn thẳng OA với  $(O)$ .

a) Chứng minh BI là phân giác  $\widehat{ABH}$ .

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại D cắt đường thẳng BC tại điểm E.

Chứng minh  $AD \perp OE$ .

c) Trong trường hợp góc  $\widehat{BDC} = 60^\circ$ , hãy tính theo R diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác ABC và nằm phía ngoài  $(O)$ .

**Câu 5 (1 điểm).** Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá  $\frac{1}{2}$  và tổng của ba số bất kì trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả giá trị có thể của tổng bốn số đó.

## LỜI GIẢI

**Câu 1 (2 điểm).** Cho biểu thức  $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - x}{x - \sqrt{x}} \right)$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

a) Chứng minh  $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$ .

b) Tìm tất cả giá trị của  $x$  để  $P = \frac{9}{2}$ .

*Lời giải*

a)  $P = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} : \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - x}{x - \sqrt{x}} \right) \quad (x > 0, x \neq 1)$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} : \frac{x - 1 + \sqrt{x} + 2 - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

Vậy  $P = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$  với  $x > 0, x \neq 1$ .

b) Ta có  $P = \frac{9}{2}$  hay  $\frac{x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{9}{2}$  hay  $2x - 9\sqrt{x} + 9 = 0$  hay  $\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{3}{2} \end{cases}$ , ta tìm được  $x = 9$  hoặc  $x = \frac{9}{4}$

(thỏa mãn ĐKXD).

Vậy  $x \in \left\{ 9; \frac{9}{4} \right\}$ .

**Câu 2 (2 điểm).** Công ty viễn thông A có hai gói cước gọi điện thoại hàng tháng được tính như sau:

+) Gói cước 1: 1 800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên và 1 500 đồng/phút cho thời gian còn lại.

+) Gói cước 2: 2 000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên, 1 800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo và 1 200 đồng/phút cho thời gian còn lại. Sau khi cân nhắc thời gian gọi trung bình mỗi tháng, bác Minh chọn gói cước 2 vì so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66 000 đồng. Hỏi một tháng trung bình bác Minh gọi điện thoại bao nhiêu phút?

*Lời giải*

Gọi  $x$  là số phút gọi điện thoại một tháng trung bình của bác Minh ( $x > 60$ ).

Số tiền bác Minh trả nếu đăng kí gói cước 1 là  $1800 \cdot 60 + (x - 60) \cdot 1500 = 1500x + 18000$  (đồng).

Số tiền bác Minh trả nếu đăng kí gói cước 2 là  $2000 \cdot 30 + 1800 \cdot 30 + 1200(x - 60) = 1200x + 42000$  (đồng).

Vì gói cước 2 so với gói cước 1 thì bác Minh sẽ tiết kiệm được 66 000 đồng, ta có phương trình

$$(1500x + 18000) - (1200x + 42000) = 66000 \text{ hay } x = 300 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy số phút gọi điện thoại một tháng trung bình của bác Minh là 300 phút.

**Câu 3 (2 điểm).** Spring Cup là giải bóng đá thường niên dành cho học sinh nam của trường THPT Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội do câu lạc bộ thể thao CSF – CSP Sporting Federation (Liên minh Thể thao Chuyên Sư Phạm) tổ chức. Ở mùa giải Spring Cup 2024, một bảng đấu gồm có 5 đội  $A, B, C, D, E$  thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (mỗi đội thi đấu đúng một trận với các đội còn lại). Trong mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua được 0 điểm.

- Hỏi có tất cả bao nhiêu trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên?
- Khi kết thúc bảng đấu, các đội  $A, B, C, D, E$  lần lượt có điểm số là 10, 9, 6, 4, 0. Hỏi có bao nhiêu trận hòa và cho biết đó là trận hòa giữa các đội nào (nếu có)?

*Lời giải*

a) Số trận đấu đã diễn ra ở bảng đấu trên là  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  trận đấu.

b) Gọi  $x$  là số trận hòa. Khi đó, ta có

$$2x + 3(10 - x) = 10 + 9 + 6 + 4 = 29 \text{ hay } x = 1$$

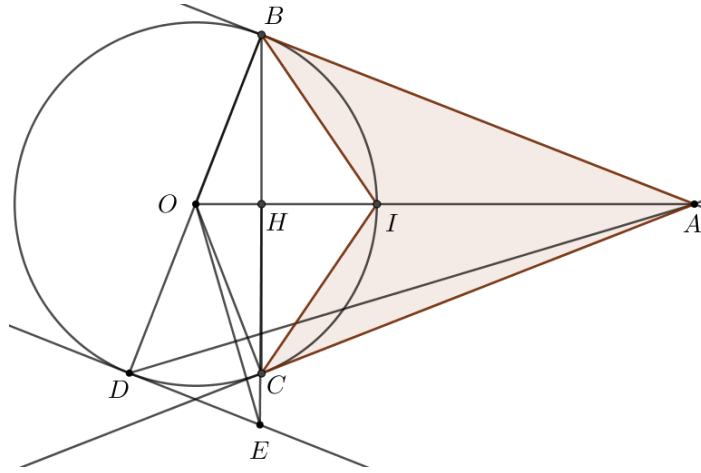
Vì số điểm của đội E là 0 nên đội E thua tất cả 4 trận. Vì số điểm của đội D là 4 và D có 3 điểm do thắng đội E nên ngoài trận thắng đội E thì đội D có một trận hòa và thua 2 trận. Vì đội A có 10 điểm nên đội A có 3 trận thắng và 1 trận hòa. Vậy hai đội A và D hòa nhau.

**Câu 4 (3 điểm).** Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới  $(O)$  ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $BC$  với  $OA$ ;  $I$  là giao điểm của đoạn thẳng  $OA$  với  $(O)$ .

- Chứng minh  $BI$  là phân giác  $\widehat{ABH}$ .
- Kẻ đường kính  $BD$  của đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $D$  cắt đường thẳng  $BC$  tại điểm  $E$ . Chứng minh  $AD \perp OE$ .

c) Trong trường hợp góc  $\widehat{BDC} = 60^\circ$ , hãy tính theo  $R$  diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác  $ABC$  và nằm phía ngoài  $(O)$ .

*Lời giải*



- a) Vì  $AB, AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  nên  $AB = AC, OB = OC$ , do đó  $OA$  là đường trung trực của  $BC$  nên  $OA \perp BC$  tại trung điểm  $H$  của  $BC$ .

Mặt khác  $OB = OI = R$  nên  $\triangle OBI$  cân tại  $O$ , suy ra  $\widehat{OBI} = \widehat{OIB}$ .

Từ đó, ta có  $\widehat{HBI} = 90^\circ - \widehat{OIB} = 90^\circ - \widehat{OBI} = \widehat{IBA}$

Do đó  $BI$  là phân giác  $\widehat{ABH}$ .

- b) Xét  $\triangle ABO$  và  $\triangle BDE$  có  $\begin{cases} \widehat{OBA} = \widehat{BDE} = 90^\circ \\ \widehat{OAB} = \widehat{DBE} = 90^\circ - \widehat{HBA} \end{cases}$ , suy ra  $\triangle ABO \sim \triangle BDE$  (g - g).

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{BD} = \frac{BO}{DE} = \frac{OD}{DE}.$$

Mà  $\widehat{ABD} = \widehat{ODE} = 90^\circ$  nên  $\triangle ABD \sim \triangle ODE$  (c - g - c) nên  $\widehat{ADB} = \widehat{OED}$ .

Do đó  $\widehat{BDA} + \widehat{EOD} = \widehat{OED} + \widehat{EOD} = 90^\circ$ , từ đó  $AD \perp OE$ .

- c) Ta có  $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BDC} = 120^\circ$  mà theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì  $OA$  là phân giác  $\widehat{BOC}$  nên  $\widehat{BOA} = \widehat{COA} = 60^\circ$ , suy ra  $\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = 30^\circ$ , suy ra  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên  $\triangle ABC$  đều.

$$\text{Ta có } BC = 2 \cdot BH = 2 \cdot BO \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } AH = AB \cdot \cos \widehat{BAH} = R\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Từ đó ta có diện tích } \triangle ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Diện tích hình quạt } OBC \text{ là } S_q = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{1}{3} \pi R^2$$

$$\text{Ta có } OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3}\right)^2} = \frac{R}{2}$$

$$\text{Diện tích tam giác } OBH \text{ là } S_{OBH} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OH \cdot \sin \widehat{BOI} = \frac{1}{4} R^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{Diện tích tam giác } OBC \text{ là } S_{BOC} = 2 \cdot S_{OBH} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi dây cung  $BC$  và cung nhỏ  $BC$  là

$$S_1 = S_q - S_{BOC} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy diện tích phần hình phẳng nằm phía trong tam giác  $ABC$  và nằm phía ngoài  $(O)$  là

$$S = S_{ABC} - S_1 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \left( \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \right) = R^2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi R^2$$

**Câu 5 (1 điểm).** Xét bốn số thực (không nhất thiết đôi một khác nhau), mà mỗi số có giá trị tuyệt đối không vượt quá  $\frac{1}{2}$  và tổng của ba số bất kì trong bốn số đó là một số nguyên. Tìm tất cả giá trị có thể của tổng bốn số đó.

*Lời giải*

Gọi bốn số thực thỏa mãn đề bài là  $a, b, c, d$ , trong đó  $|a|, |b|, |c|, |d| \leq \frac{1}{2}$

Theo giả thiết tổng của ba số bất kì trong bốn số đó là một số nguyên, ta có

$$\begin{cases} a+b+c \in \mathbb{Z} & (1) \\ b+c+d \in \mathbb{Z} & (2) \\ c+d+a \in \mathbb{Z} & (3) \\ d+a+b \in \mathbb{Z} & (4) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2)+(3)-2.(4) ta được  $3c \in \mathbb{Z}$  suy ra  $c = \frac{p}{3}$  ( $p \in \mathbb{Z}$ )

Tương tự ta có  $a = \frac{m}{3}, b = \frac{n}{3}, c = \frac{p}{3}, d = \frac{q}{3}$  ( $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ )

Suy ra  $a+b+c = \frac{m+n+p}{3} \in \mathbb{Z}$  nên  $3 \mid (m+n+p)$

Tương tự  $b+c+d = \frac{n+p+q}{3} \in \mathbb{Z}$  suy ra  $3 \mid (n+p+q)$

Suy ra  $3 \mid (m+n+p) - (n+p+q) = m-q$ , do đó  $m \equiv q \pmod{3}$

Tương tự ta thu được  $m \equiv n \equiv p \equiv q \pmod{3}$  (1)

Mặt khác  $|a| \leq \frac{1}{2}$  nên  $\left| \frac{m}{3} \right| \leq \frac{1}{2}$  hay  $|m| \leq \frac{3}{2}$  suy ra  $m \in \{-1; 0; 1\}$

Tương tự ta tìm được  $m, n, p, q \in \{-1; 0; 1\}$  (2)

Từ (1), (2) suy ra

$$\begin{cases} m = n = p = q = -1 \\ m = n = p = q = 0 \\ m = n = p = q = 1 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = b = c = d = -\frac{1}{3} \\ a = b = c = d = 0 \\ a = b = c = d = \frac{1}{3} \end{cases} .$$

----- HẾT -----

Lời giải bởi Đức Huy – K27 NTT HNUE