

CHUYÊN ĐỀ: ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc y'_{x_0} .

b) Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Đạo hàm xuất hiện trong nhiều khái niệm vật lý. Chẳng hạn: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là một hàm số có đạo hàm. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại t_0 : $v(t_0) = s'(t_0)$

c) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

d) Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

e) Đạo hàm của một số hàm số

2. Các quy tắc tính đạo hàm

a) Các công thức cần nhớ

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của các hàm số hợp (dưới đây $u = u(x)$)
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
--	--

b. Các quy tắc tính đạo hàm

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$(k.u)' = k.u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c. Đạo hàm của hàm số hợp : $y'_x = y'_u . u'_x$

2. Tính đơn điệu của hàm số

a) Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Nếu $f'(x) \geq 0$ hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên K .

b) Các bước để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Chú ý: Ta cũng có thể nhận biết tính đơn điệu của hàm số bằng cách quan sát hình dáng của đồ thị đi lên (hàm số đồng biến) hoặc đi xuống (hàm số nghịch biến).

3. Điểm cực trị, giá trị cực trị của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và $x_0 \in K, x_1 \in K$

- x_0 được gọi là một *điểm cực đại* của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng (a, b) chứa điểm x_0 sao cho $(a, b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a, b)$ và $x \neq x_0$

Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số đã cho, kí hiệu f_{CD} .

- x_1 được gọi là một *điểm cực tiểu* của hàm số đã cho nếu tồn tại một khoảng (c, d) chứa điểm x_1 sao cho $(c, d) \subset K$ và $f(x) > f(x_1)$ với mọi $x \in (c, d)$ và $x \neq x_1$

Khi đó, $f(x_1)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số đã cho, kí hiệu là f_{CT} .

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là *điểm cực trị*. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *giá trị cực trị* (hay *cực trị*).

Chú ý: Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) **Dấu hiệu nhận biết cực trị của hàm số bằng đạo hàm**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b) . Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0 \forall x \in (x_0, b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0 \forall x \in (x_0, b)$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

c) **Các bước để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$.**

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên, nêu kết luận về các điểm cực trị của hàm số.

4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) **Định nghĩa**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $M = \max_D f(x)$, nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.
- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D , kí hiệu $m = \min_D f(x)$, nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

b) **Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng đạo hàm**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ như sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 2. Tính $f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$.

Bước 3. So sánh các giá trị tìm được ở Bước 2.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

a) **Đường tiệm cận ngang**

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là *đường tiệm cận ngang* (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0$.

b) Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là *đường tiệm cận đứng* (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$

nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

c) Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là *đường tiệm cận xiên* (hay *tiệm cận xiên*) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

6. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

* Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

* Lập bảng biến thiên của hàm số bao gồm: Tính đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và cực trị của hàm số (nếu có). Điền các kết quả vào bảng.

Bước 3. Vẽ đồ thị hàm số

* Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).

* Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị, cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản),...

* Nhận xét về đặc điểm đồ thị: chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng của đồ thị (nếu có).

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1: Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(1) = 2$. Giá trị của biểu thức

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. -2.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$$

Ví dụ 2: Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x$ là

A. $\sin 2x$.

B. $-\sin 2x$.

C. $-2\sin 2x$.

D. $2\cos 2x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } (\cos 2x)' = -2\sin 2x$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in (1; 2)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (2; 3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên cả hai khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên cả hai khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Vì $f'(x) < 0 \forall x \in (1;2)$ và $f'(x) > 0 \forall x \in (2;3)$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Dạng 2: Trắc nghiệm đúng -sai

Trong mỗi ý a) b) c) d) ở mỗi câu thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Ví dụ 4: Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2x+1$ và $g'(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $[f(x) + g(x)]' = 3x+1$

b) $[f(x) - g(x)]' = x+1$

c) $[5f(x)]' = 2x+6$

d) $[-7g(x)]' = x-7$.

Lời giải

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) = 2x+1+x = 3x+1$.

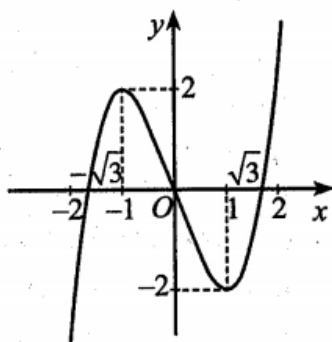
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 2x+1-x = x+1$.

- $[5f(x)]' = 5f'(x) = 5(2x+1) = 10x+5$.

- $[-7g(x)]' = -7g'(x) = -7x$.

Đáp án: a) Đ, b) Đ, c) S, d) S.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$.



Hình 1

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 3$

c) $f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $f'(x) > 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

d) Hàm số đã cho có đồ thị như ở Hình 1.

Lời giải

1) Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

- Bảng biến thiên: $y' = 3x^2 - 3$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = 2$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = -2$.

3) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; 0)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục hoành tại $x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số giao với trục hoành tại ba điểm $(0; 0), (-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; 0)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ được cho ở Hình 1.

Đáp án: a) Đ, b) S, c) S, d) Đ.

Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

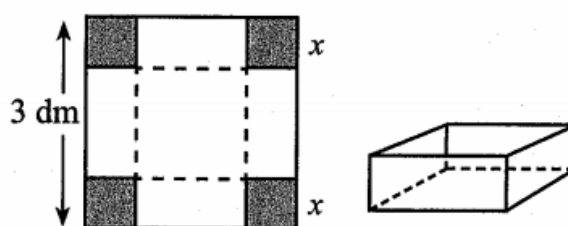
Ví dụ 6. Biết rằng $(\sin x + \cos x)' = a \sin x + b \cos x$ với a, b là các hằng số thực. Giá trị của $a - 2b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x = (-1) \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x$.

Suy ra $a = -1, b = 1$. Vậy $a - 2b = -3$.

Ví dụ 7. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 3dm. Bác Tùng cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài cạnh bằng x (dm), rồi gấp tấm nhôm lại như Hình 2 để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp.



Hình 2

Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x (dm). Giá trị lớn nhất của V là bao nhiêu decimét khối?

Lời giải

Ta thấy độ dài x (dm) của cạnh hình vuông bị cắt thỏa mãn điều kiện $0 < x < 1,5$.

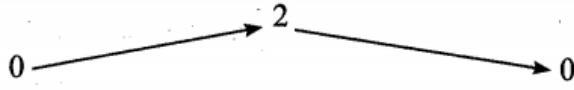
Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(3 - 2x)^2$ với $0 < x < 1,5$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0; 1,5)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: $V'(x) = (3 - 2x)^2 - 4x(3 - 2x) = (3 - 2x)(3 - 6x) = 3(3 - 2x)(1 - 2x)$.

Trên khoảng $(0; 1,5)$, $V'(x) = 0$ khi $x = 0,5$.

Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0	0,5	1,5	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0			0

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0;1,5)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2 tại $x = 0,5$. Vậy giá trị lớn nhất của V là $2dm^3$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Dạng 1: Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $y = \cot 3x$ là:

- A. $\frac{-1}{\sin^2 3x}$. B. $\frac{3}{\sin^2 3x}$. C. $\frac{-3}{\sin^2 3x}$. D. $\frac{1}{\sin^2 3x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (\cot 3x)' = \frac{-(3x)'}{\sin^2 3x} = \frac{-3}{\sin^2 3x}$

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

- A. $5^x \cdot \log 5$. B. $5^x \cdot \ln 5$. C. 5^{x-1} . D. $x \cdot 5^{x-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y = \log_5 x$ là

- A. $\frac{1}{x \log 5}$. B. $5^x \cdot \ln 5$. C. $\frac{1}{x}$. D. $\frac{1}{x \ln 5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5}$

Câu 4. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là:

- A. $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. B. $y' = \frac{ad+bc}{(cx+d)^2}$. C. $y' = \frac{ac-bd}{(cx+d)^2}$. D. $y' = \frac{ac+bd}{(cx+d)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Câu 5. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ là:

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$. B. $y' = \frac{x-1}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$. C. $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$. D. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \left(\sqrt{x^2 - 2x - 3} \right)' = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ là:

A. $(-\infty; -2) \cap (-2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

Câu 7. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $a.d - b.c \neq 0$. Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là:

A. $x = \frac{d}{c}; y = \frac{a}{c}$

B. $x = \frac{-d}{c}; y = \frac{a}{c}$

C. $x = \frac{-d}{c}; y = \frac{b}{d}$

D. $x = \frac{-b}{a}; y = \frac{b}{d}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ có TXĐ là } R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^{\pm}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty. \quad \text{Vậy TCĐ là } x = -\frac{d}{c}.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}. \quad \text{Vậy TCN là } y = \frac{a}{c}$$

Câu 8: **[MĐ 1]** Cho các hằng số a, b, c, d, m khác 0 thỏa mãn $ad - bc \neq 0$. Đồ thị của hàm số $y = ax + b + \frac{m}{cx+d}$ có đường tiệm cận xiên là:

A. $y = cx + d$.

B. $y = a + bx$.

C. $y = c + dx$.

D. $y = ax + b$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m}{cx + d} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m}{cx + d} = 0$ nên đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận xiên là $y = ax + b$.

Câu 9: **[MĐ 1]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (1; 2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.
 B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$.
 C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
 D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $f'(x) > 0, \forall x \in (0;1)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (1;2)$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 10: [MĐ 2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $(0;3)$. B. $(-6;1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(6; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = x^2 - 5x - 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$.

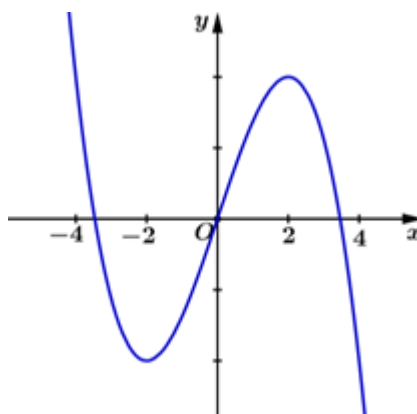
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 6)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(6; +\infty)$.

Ta có $(0;3) \subset (-1; 6)$ nên hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 11: [MĐ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-4;2)$. B. $(0;4)$. C. $(-2;0)$. D. $(-4;4)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có trên khoảng $(-2;2)$ đồ thị hàm số đi lên (theo chiều từ trái sang phải) nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

Ta có $(-2;0) \subset (-2;2)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 12: [MĐ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

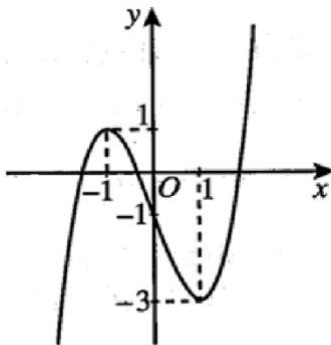
- A.** $(0; 2)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y' < 0, \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 13. [MĐ1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình 4. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 4

- A.** $x_{CT} = -1, x_{CD} = 1$.
B. $x_{CT} = -3, x_{CD} = 1$.
C. $x_{CT} = 1, x_{CD} = -3$.
D. $x_{CT} = 1, x_{CD} = -1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta có điểm cực đại của hàm số là $x_{CD} = -1$, điểm cực tiểu của hàm số là $x_{CT} = 1$.

Câu 14. [MĐ2] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) < f(0), \forall x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ và $f(x) > f(2), \forall x \in (1; 3) \setminus \{2\}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

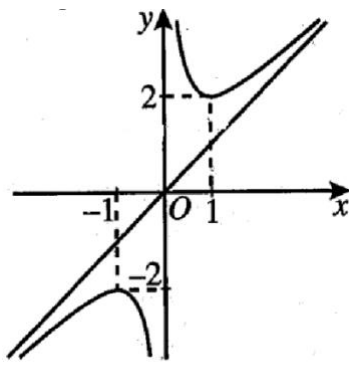
- A.** $x_{CT} = 0, x_{CD} = 2$. **B.** $x_{CT} = 2, x_{CD} = 0$.
C. $x_{CT} = -1, x_{CD} = 3$. **D.** $x_{CT} = 3, x_{CD} = -1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x) < f(0), \forall x \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ nên $x = 0$ là điểm của đại của hàm số. Và $f(x) > f(2), \forall x \in (1; 3) \setminus \{2\}$ nên $x = 2$ là điểm của đại của hàm số.

Câu 15. [MĐ1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 5. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 5

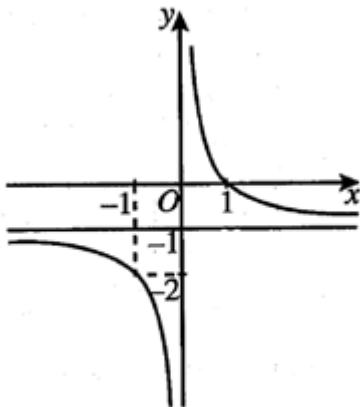
- A. $x_{CT} = 1, x_{CD} = 2$.
- B. $x_{CT} = 2, x_{CD} = -1$.
- C. $x_{CT} = -2, x_{CD} = 2$.
- D. $x_{CT} = 2, x_{CD} = -2$.**

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = -2$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = 2$.

Câu 16. [MĐ1] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 6. Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 6

- A. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, đường tiệm cận ngang $y = 0$.
- B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, đường tiệm cận ngang $y = -1$.
- C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = 0$.
- D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$, đường tiệm cận ngang $y = -1$.**

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 0$, đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -1$.

Câu 17. [MĐ2] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Đường tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $x = 1, y = 1$.

B. $x = 1, y = 2$. C. $x = 2, y = 1$.

D. $x = 2, y = 2$.

Lời giải

Chọn C

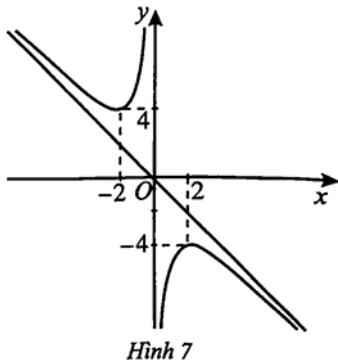
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là một tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là một tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 2 \text{ là một tiệm cận đứng}$$

Câu 18. [MĐ2] Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$, ($ac \neq 0$) có đồ thị như Hình 7. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng:



Hình 7

A. Đường thẳng $y = x$.

B. Đường thẳng $y = -x$.

C. Đường thẳng $x = 0$.

D. Đường thẳng $y = -2x$.

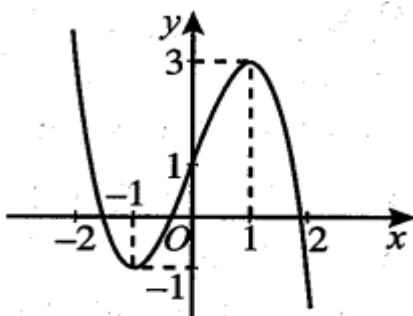
Lời giải

Chọn D

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - ax + b] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x} = 0$ nên đường thẳng $(d): y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

Vì (d) đi qua $O(0;0)$ và $A(2;-4)$ nên $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$. Vậy đường thẳng (d) có dạng $y = -2x$.

Câu 19. [MĐ1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình 8. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$. Phát biểu nào sau đây đúng?



Hình 8

A. $m = -2, M = 2$

B. $m = 1, M = 3$

C. $m = 3, M = 1$

D. $m = -1, M = 3$

Lời giải

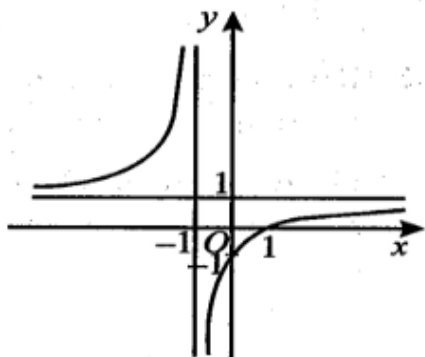
Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

$$m = -1$$

$$M = 3$$

Câu 20. [MĐ2] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị ở Hình 9. Đường thẳng nào sau đây là trục đối xứng của đồ thị đã cho?



Hình 9

- A. Đường thẳng $y = x$.
- B. Đường thẳng $y = -x$.
- C. Đường thẳng $y = 0$.
- D. Đường thẳng $x = 0$.

Lời giải

Không có đáp án

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là một tiệm cận ngang}$$

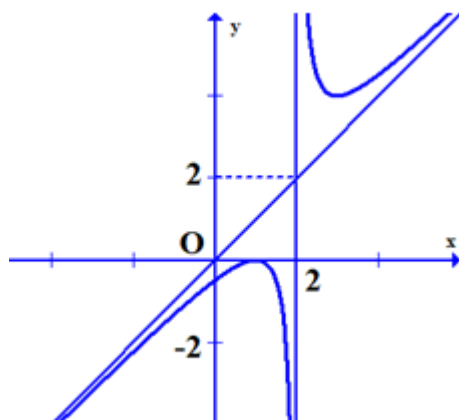
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ là một tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ là một tiệm cận đứng}$$

Tâm đối xứng là $I(-1;1)$.

Hàm số không có trục đối xứng.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị ở Hình 10. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là:



- A. $(2;2)$.
- B. $(-2;-2)$.
- C. $(-2;2)$.
- D. $(2;-2)$.

Lời giải:

Chọn A

Giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $(2; 2)$ nên tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(2; 2)$.

Dạng 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = x - \sin 2x$

e) $f'(x) = 1 + 2 \cos 2x$.

f) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$.

g) Trên đoạn $[0; \pi]$ phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm $\frac{5\pi}{6}$.

h) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án: a) S, b) S, c) S, d) Đ.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	S	S	S	Đ

Ta có:

$$f'(x) = 1 - 2 \cos 2x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Với } x \in [0; \pi] \text{ thì phương trình } f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Trên đoạn $[0; \pi]$:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

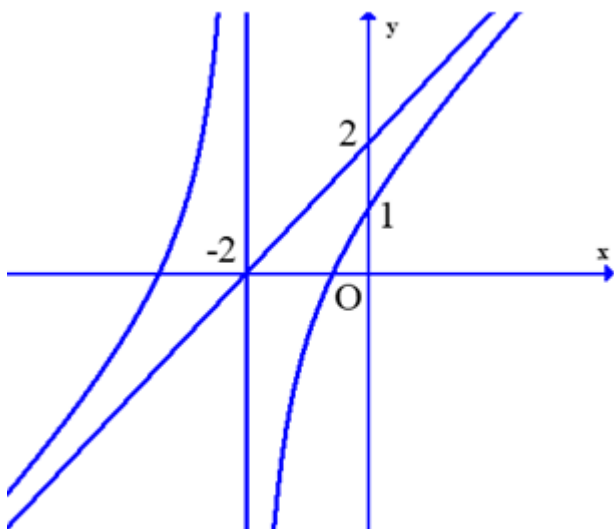
$$x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = \pi \Rightarrow y = \pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy a) S, b) S, c) S, d) Đ.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$.



Hình 11

- e) $f(x) = x + 2 - \frac{2}{x + 2}, \forall x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
- f) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường $x = 2$.
- g) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2$.
- h) Hàm số đã cho có đồ thị hàm số như Hình 11.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	S	Đ	Đ

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

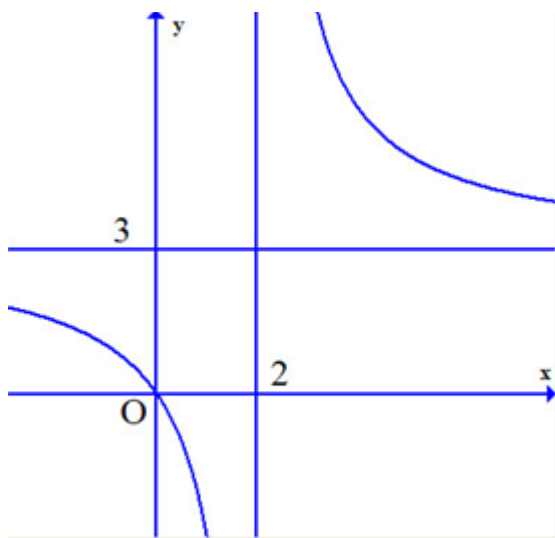
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2x + 4 - 2}{x + 2} = x + 2 - \frac{2}{x + 2}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 2)] = 0 \Rightarrow y = x + 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 2}$.

Vậy a) **Đ**, b) **S**, c) **Đ**, d) **Đ**.

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{3x + a}{x + b}$ có đồ thị như Hình 12.



Hình 12

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.
b) $b = 2$.
c) Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.
d) $a = 0$.

Lời

giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	S	S	Đ

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

Đúng vì từ đồ thị Hình 12 nhận biết được đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

- b) $b = 2$.

Sai vì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$ nên $-b = 2 \Leftrightarrow b = -2$.

- c) Đồ thị hàm số không đi qua gốc tọa độ.

Sai vì đồ thị hàm số có đi qua gốc tọa độ.

- d) $a = 0$.

Đúng vì đồ thị hàm số có đi qua gốc tọa độ.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	142		38		14

Diagram illustrating the function values and their relationship:

- At $x = -\infty$, $f(x) = 142$.
- At $x = -1$, $f(x) = 8$.
- At $x = 1$, $f(x) = 38$.
- At $x = +\infty$, $f(x) = 14$.

Red arrows indicate the flow of the function values: from 142 to 8, from 8 to 38, and from 38 to 14.

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(8;14)$.
b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8.
c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 38.
d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(8;38)$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	S	Đ

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(8;14)$.

Đúng vì dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. Mà $(8; 14) \subset (1; +\infty)$.

b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Đúng vì dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $x = -1$.

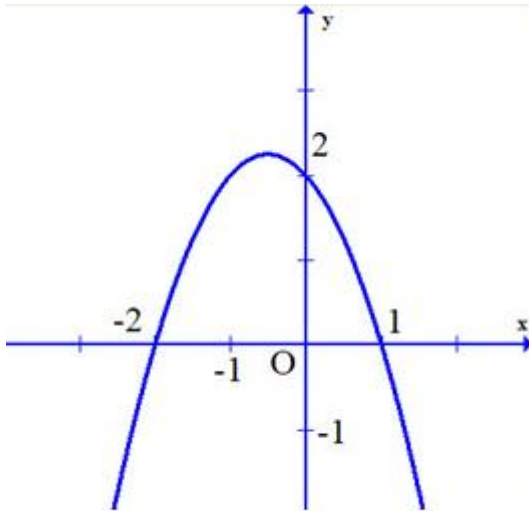
c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 38.

Sai vì dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 142$ nên hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất. (38 là giá trị cực đại của hàm số.)

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(8; 38)$.

Sai vì hàm số đã cho chỉ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như Hình 13.



Hình 13

a) Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CT} = -2$.

b) Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CD} = 1$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2025; 2026)$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	Đ	Đ

a) Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CT} = -2$.

Đúng vì đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tại $x = -2$ và hướng đi từ dưới trục hoành lên trên trục hoành.

b) Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CD} = 1$.

Đúng vì đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tại $x = 1$ và hướng đi từ trên trục hoành xuống dưới trục hoành.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Đúng vì hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2025; 2026)$.

Đúng vì hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$ mà $(2025; 2026) \subset (1; +\infty)$

Câu 27. Trong 9 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) $s'(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

b) $s''(t) = -6t + 18$.

c) Phương trình $s'(t) = 0$ có đúng một nghiệm dương là $t = 7$.

d) Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vật dừng lại là 36 m/s^2 .

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	Đ	S

a) Ta có $s'(t) = -3t^2 + 18t + 21$. **Suy ra a) đúng.**

b) Ta có $s''(t) = -6t + 18$. **Suy ra b) đúng.**

c) Phương trình $s'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 18t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 7, t = -1$. Vì $t > 0$ nên suy ra $t = 7$. **Suy ra c) đúng.**

d) Gia tốc của chất điểm tại thời vật dừng lại là $s''(7) = -6 \cdot 7 + 18 = -24 \text{ m/s}^2$. **Suy ra d) sai.**

Câu 28. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15%, giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

a) Hàm số $f(x) = \frac{100(x+200)}{x+30}$.

b) Đạo hàm của hàm số luôn nhận giá trị âm trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) Thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá 100%.

d) Giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến dương vô cực bằng 100.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	S	S	Đ	Đ

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$ (gam) muối tinh khiết. Khi thêm x (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có $(x+30)$ (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là

$f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200}$. **Suy ra a) sai.**

b) Ta có $f'(x) = \frac{17000}{(x+200)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$. **Suy ra b) sai.**

c) Vì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên khi x tăng thì $f(x)$ tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì $x+30 < x+200$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên $\frac{x+30}{x+200} < 1$ dẫn đến $f(x) = \frac{100(x+30)}{x+200} < 100$. Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào. **Suy ra c) đúng.**

d) Ta có :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100(x+30)}{x+200} = 100$. **Suy ra d) đúng.**

Câu 29. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t) = 0,5 \cos(2\pi t)$, trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây.

a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-\pi \sin(2\pi t) \text{ (m/s)}$.

b) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t là $-2 \cos(2\pi t) \text{ (m/s}^2\text{)}$.

- c) Vận tốc lớn nhất của chất điểm bằng $\pi \text{ (m/s)}$.
- d) Gia tốc lớn nhất của chất điểm bằng $2\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	S	Đ	Đ

- a) $s' = f'(t) = -0,5.2\pi.\sin(2\pi t) = -\pi \sin(2\pi t) \text{ (m/s)}$. **Suy ra a) đúng.**
- b) $s'' = f''(t) = -2\pi^2.\cos(2\pi t) \text{ (m/s}^2\text{)}$. **Suy ra b) sai.**
- c) $v(t) = -\pi \sin(2\pi t) \leq \pi \text{ (m/s)}$, vì $-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1, \forall t \geq 0$. **Suy ra c) đúng.**
- d) Vì $-1 \leq \cos(2\pi t) \leq 1, \forall t \geq 0$ nên $a(t) = f''(t) = -2\pi^2.\cos(2\pi t) \leq 2\pi^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$. **Suy ra d) đúng.**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$.

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$.
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$.
- c) Điểm cực tiểu của hàm số $x_{CT} = -1$.
- d) Điểm cực tiểu của hàm số $x_{CD} = 1$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	S	S

- a) Vì $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(1)$. **Suy ra a) đúng.**
- b) Vì $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là $f(-1)$. **Suy ra b) đúng.**
- c) Vì $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ nên $x = -1$ không phải là điểm cực trị. **Suy ra c) sai.**
- d) Vì $f(1) \leq f(x) \leq f(-1), \forall x \in \mathbb{R}$ nên $x = 1$ không phải là điểm cực trị. **Suy ra d) sai.**

Câu 31. Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra.

- a) Hàm doanh thu của công ty là $f(x) = x.p(x)$.
- b) Hàm số $f(x) = -25x^2 + 1000x$ có đạo hàm $f'(x) = -50x + 1000$.
- c) Nếu $f(x) = x.p(x)$ là hàm doanh thu thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.
- d) Hàm doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	S	Đ

- a) Ta có doanh thu của công ty bằng giá bán của mỗi sản phẩm nhân với số sản phẩm được bán ra. Suy ra hàm doanh thu của công ty là $f(x) = x.p(x)$. **Suy ra a) đúng.**
- b) Ta có $f(x) = x.p(x) = x(1000 - 25x) = -25x^2 + 1000x$.
Suy ra đạo hàm $f'(x) = -50x + 1000$. **Suy ra b) đúng.**
- c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -50x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 20$
Vậy $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 20$. **Suy ra c) sai.**

d) Lập BBT của hàm số $f(x) = -25x^2 + 1000x$ ta có $f(x) = -25x^2 + 1000x$ đạt giá trị lớn nhất là 10000 tại $x = 20$.

Vậy doanh thu đạt giá trị lớn nhất bằng 10000 triệu đồng, khi đó có 20 sản phẩm được bán ra. **Suy ra d) đúng.**

Dạng 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 32. Giả sử hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ đạt cực đại tại $x = a$ và đạt cực tiểu tại $x = b$. Giá trị của biểu thức $A = 2a + b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $A = 5$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$ nên suy ra $a = 1, b = 3$.

Vậy $A = 2a + b = 5$

Câu 33. Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{3x+5}{-x+7}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $B = -4a - b$

là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $B = -4a - b = -25$

Tâm đối xứng là I là giao điểm của tiệm cận đứng $x = 7$ và tiệm cận ngang $y = -3$.

Nên ta có: $a = 7, b = -3$. Vậy $B = -4a - b = -25$.

Câu 34. Cho đồ thị hàm số $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức

$C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $C = a + 3b = 13$

Ta có $a = 1, b = 4$. Vậy $C = a + 3b = 13$

Câu 35. Cho $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, vì $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$ nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó, với cả hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ hàm số đã cho đều có hai điểm cực trị.

Câu 36. Cho các hằng số a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $ad - bc \neq 0$. Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = -\frac{d}{c}$ và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

$$y = \frac{a}{c}.$$

Suy ra: Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ là 2.

Câu 37. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: *Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020*). Xem

$y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 26

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t+10}{t+5} = 26$. Nên đồ thị hàm số $f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 26$. Vậy $a = 26$.

Câu 38. Trong 18 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 18t^2 + t + 3$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu mét trên giây trong 18 giây đầu tiên đó?

Lời giải

Trả lời: 109

Ta có vận tốc tức thời là $s'(t) = -3t^2 + 36t + 1$. Lập bảng biến thiên của hàm số $s'(t)$ ta có vận tốc tức thời đạt giá trị lớn nhất bằng 109 m/s.