BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2024 - 2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) Ngày thi thứ nhất: **25/12/2024** *Đề thi gồm 01 trang, 03 câu*

Câu 1 *(7,0 điểm)*

Xét đa thức $P(x) = x^4 - x^3 + x$.

a) Chứng minh rằng với mọi số dương a, đa thức $P(x) - a$ có duy nhất một nghiệm dương.

b) Xét dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = \frac{1}{3}$ và với mọi $n \geq 1, a_{n+1}$ là nghiệm dương của đa thức $P(x) - a_n$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 *(7,0 điểm)*

Với mỗi số nguyên $n \geq 0$, đặt $u_n = \left(2+\sqrt{5}\right)^n + \left(2-\sqrt{5}\right)^n$.

a) Chứng minh rằng u_n là số nguyên dương với mọi $n \geq 0$. Khi n thay đổi, số dư của u_n khi chia cho 24 lớn nhất bằng bao nhiêu?

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) với a,b nhỏ hơn 500 sao cho với mọi n lẻ ta có $u_n \equiv a^n - b^n \pmod{1111}$.

Câu 3 *(6,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt lại (O) tại điểm D khác A. Gọi E và F tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AB và AC. Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HF cắt đường thẳng BC tại điểm K.

a) Đường thẳng DK cắt lại (O) tại điểm Y khác D. Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng BY và đường trung trực của đoạn thẳng BK nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OFY.

b) Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HE cắt đường thẳng BC tại điểm L. Đường thẳng DL cắt lại (O) tại điểm Z khác D. Gọi M, N và P tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BZ, OE), (CY, OF)$ và (BY, CZ). Gọi T là giao điểm của cặp đường thẳng (YZ, MN) và d là đường thẳng đi qua T và vuông góc với OA. Chứng minh rằng d đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

-------------------- HẾT --------------------

* *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*

* *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

1

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**
	TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
	NĂM HỌC 2024 - 2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN**
	Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
	Ngày thi thứ hai: **26/12/2024**
	Đề thi gồm 01 trang, 03 câu

Câu 4 *(7,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn không cân ABC có các đường cao AD, BE, CF với $D \in BC, E \in CA$ và $F \in AB$. Gọi H, O và I tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, M, N và P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA và AB. Gọi X, Y và Z tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AI, NP), (BI, PM)$ và (CI, MN).

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE, CZF có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.

b) Các đường thẳng XP, YM và ZN tương ứng cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE và CZF tại các điểm X', Y' và Z' ($X' \neq X, Y' \neq Y, Z' \neq Z$). Gọi J là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng X', Y' và Z' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng HJ.

Câu 5 *(7,0 điểm)*

Cho một bảng ô vuông $3k \times 3k$ (k là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô $(i; j)$ nằm trên cột thứ i từ trái qua phải và trên hàng thứ j từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt $4k$ viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;
- Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.

a) Xét $k = 1$. Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên?
(Hai cách đặt bi được coi là khác nhau nếu có một ô $(i; j)$ có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)

b) Xét $k \geq 1$ tổng quát. Xác định số tự nhiên N lớn nhất sao cho với mọi cách đánh dấu N ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong N ô đã được đánh dấu.

Câu 6 *(6,0 điểm)*

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^3 + 4bc + b + c} + \sqrt{3b^3 + 4ca + c + a} + \sqrt{3c^3 + 4ab + a + b} \geq 9.$$

-------------------- HẾT --------------------

* *Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*
* *Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.*

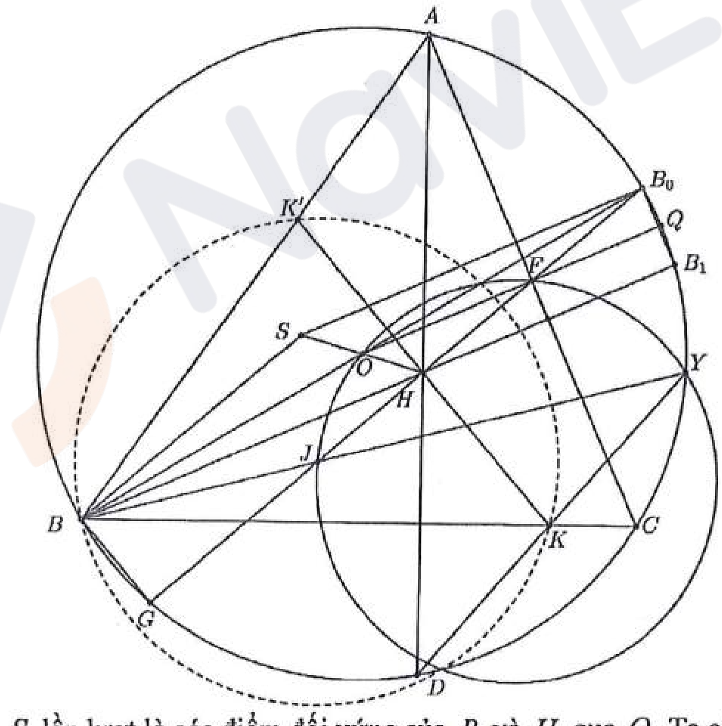
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐÁP ÁN
Đề thi chính thức

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: **Toán**
Ngày thi: 25-26/12/2024
Đáp án gồm 08 trang

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 *(7,0 điểm)*	*a*		***3,00***
		Đặt $Q(x)=P(x)-a$. Suy ra $Q'(x)=4x^3-3x^2+1$. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có $4x^3-3x^2+1=2x^3+2x^3+\frac{1}{4}-3x^2+\frac{3}{4}\geq 3\sqrt[3]{4x^6\cdot\frac{1}{4}}-3x^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}>0, \forall x>0.$ Vì vậy hàm $Q(x)$ tăng ngặt trên $(0,\infty)$. Do $Q(0)=-a<0$ và hệ số cao nhất của $Q(x)$ bằng 1 là số dương nên $Q(x)$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(0,\infty)$.	
	b		***4,00***
		Đặt $f_n(x)=P(x)-a_n$. Theo câu a) ta có a_{n+1} là nghiệm dương duy nhất của $f_n(x)$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $a_n<a_{n+1}<1$, với mọi $n\geq 1$. Ta có $a_1=\frac{1}{3}<1$. Giả sử ta đã chứng minh được $a_n<1$. Khi đó $f_n(a_n)=a_n^4-a_n^3<0$, và $f_n(1)=1-a_n>0$. Theo chứng minh trên $f_n(x)$ là hàm tăng ngặt trên $(0,\infty)$, nên từ điều kiện $f_n(a_{n+1})=0$ suy ra $a_n<a_{n+1}<1$. Khẳng định được suy ra theo nguyên lý quy nạp.	
		Dãy (a_n) tăng và bị chặn trên bởi 1, do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. Theo cách xây dựng dãy ta có $a_{n+1}^4-a_{n+1}^3+a_{n+1}-a_n=0$. Chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$ ta nhận được $L^4-L^3=0$. Rõ ràng do dãy (a_n) tăng ngặt nên $L>a_1=\frac{1}{3}$. Suy ra $L=1$. ***Kết luận:*** Giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.	
		Tổng điểm câu 1	7,00
2 *(7,0 điểm)*	*a*		***3,00***
		Ta có $u_0=2, u_1=4$ và ta chứng minh được bằng quy nạp $u_{n+2}=4u_{n+1}+u_n$ với mọi $n\geq 0$. Suy ra u_n là số nguyên dương với mọi $n\geq 0$. ***Lưu ý:*** *Nếu chỉ chứng minh được* u_n *là số nguyên thì cho 0,5 điểm.*	
		Xét dãy số dư của (u_n) khi chia cho 24 là: $2,4,18,4,10,20,18,20,2,4,\ldots$ Ta thấy dãy số dư tuần hoàn chu kỳ 8. Vậy số dư có thể đạt giá trị lớn nhất là 20.	
	b		***4,00***
		Ta có $u_1=4, u_3=76$. Vậy $a-b\equiv 4 \pmod{1111}$ và $a^3-b^3\equiv 76 \pmod{1111}$. Suy ra $a-b=4$ và do $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=64+12ab$ nên	

		$ab \equiv 1 \pmod{1111} \Leftrightarrow (b+2)^2 \equiv 5 \pmod{1111}$. Nhận xét rằng 1111=11.101 và 5 là thặng dư toàn phương mod 11 và mod 101. Cụ thể $5 \equiv 4^2 \equiv 7^2 \pmod{11}$ và $5 \equiv 45^2 \equiv 56^2 \pmod{101}$. Do $1 \le b \le 500$ nên $b+2$ có thể bằng $45+101k, 0 \le k \le 4$ hoặc bằng $56+101h, 0 \le h \le 4$. Lại có $b+2$ $\equiv 4 \pmod{11}$ hoặc $\equiv 7 \pmod{11}$ nên chỉ có hai cặp số thỏa mãn là $b=346, a=350$ hoặc $b=357, a=361$.	
		Ta sẽ chỉ ra 2 cặp số này thỏa mãn. Thật vậy, chú ý $5 \equiv 348^2 \equiv 359^2 \pmod{1111}$. Với n lẻ thì $u_n = (2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n = 2\sum_{2\mid k} C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{5})^k = 2\sum_{2\mid k} C_n^k 2^{n-k} 5^{k/2}$ $\equiv 2\sum_{2\mid k} C_n^k 2^{n-k} 348^k = (2+348)^n + (2-348)^n = 350^n - 346^n \pmod{1111}$. Tương tự, $u_n \equiv 2\sum_{2\mid k} C_n^k 2^{n-k} 359^k = (2+359)^n + (2-359)^n = 361^n - 357^n \pmod{1111}$.	
		Tổng điểm câu 2	**7,00**
3 ***(6,0 điểm)***	*a*		***3,00***
		Xét thế hình như dưới đây.  Lấy B_0 và S lần lượt là các điểm đối xứng của B và H qua O. Ta có B_0, F, H thẳng hàng. Vì BSB_0H là hình bình hành nên $BS \parallel HF$. Do đó $\widehat{SBC} = 90^\circ - \widehat{AHF} = \widehat{DHK} = \widehat{HDK} = \widehat{ABY}$. Vậy nên BS và BY đẳng giác đối với góc ABC.	

Gọi K' là giao điểm của HK với AB. Gọi B_1 là giao điểm thứ hai khác B của BH với (O). Cho B_0H cắt lại (O) tại G. Vì $\widehat{BGB_0}=90^\circ$, hay BG vuông góc với B_0G, nên BG song song với KK'.

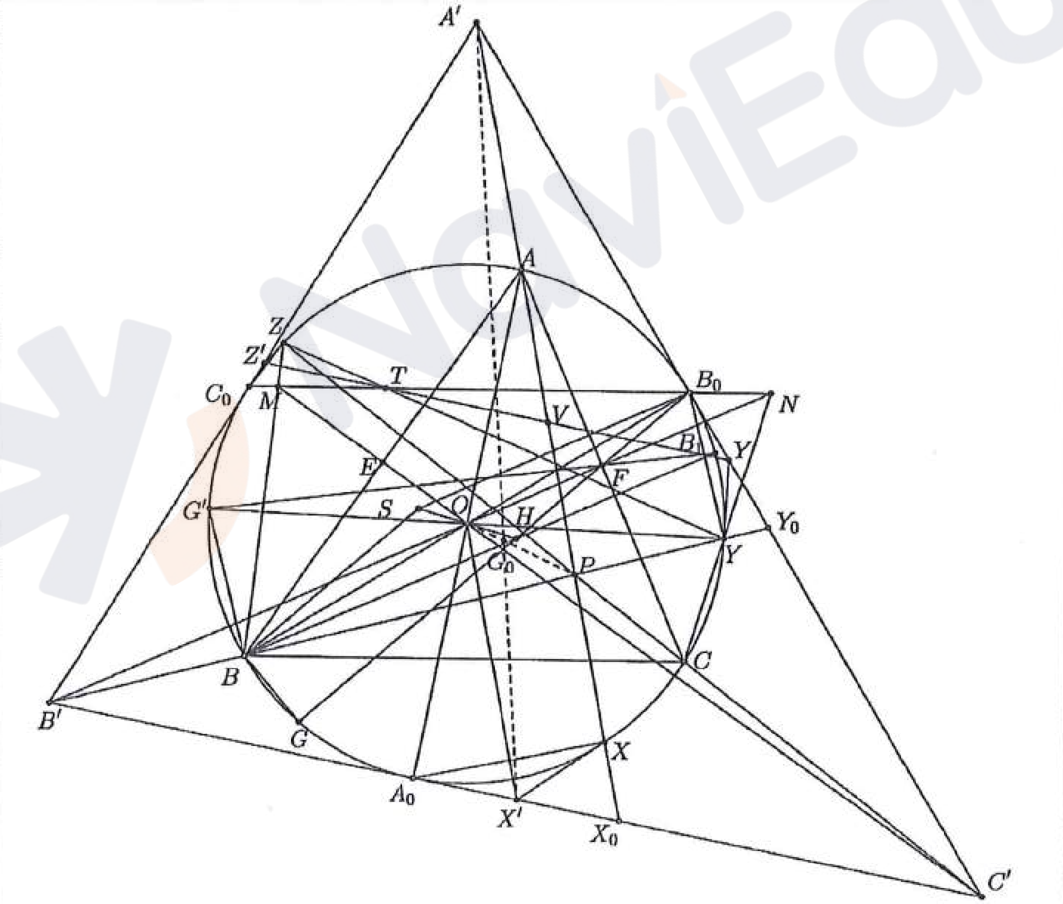
Từ $B(GHKK')=B(GB_1CA)=B_0(GB_1CA)=B_0(FB_1CA)=-1$ (do $B_0B_1 \parallel AC$ và F là trung điểm AC) ta suy ra H là trung điểm KK'. Do vậy FH là trung trực của KK', và kéo theo tâm ngoại tiếp J của tam giác BKK' nằm trên FH. Mặt khác BS là đường cao của tam giác BKK' nên BS và BJ đẳng giác đối với góc ABC.

Suy ra J thuộc BY. Như vậy J là giao điểm của BY với đường trung trực của đoạn thẳng BK. Vì $JF \parallel BS$ và BS, BY đẳng giác đối với góc ABC nên ta có :

$$\widehat{YJF}=\widehat{YBS}=2\widehat{YBQ}=\widehat{YOQ}=\widehat{YOF}$$

với Q là điểm chính giữa cung $\widehat{AC}$ không chứa B của (O). Suy ra tứ giác $JOFY$ nội tiếp, hay J nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OFY.

b | **3,00**



Tương tự phần a) thì CZ và CS đẳng giác đối với góc ACB. Gọi A_0, C_0 lần lượt là đối xứng của A và C qua O. Cho hai tiếp tuyến của (O) tại B_0 và C_0 cắt nhau tại

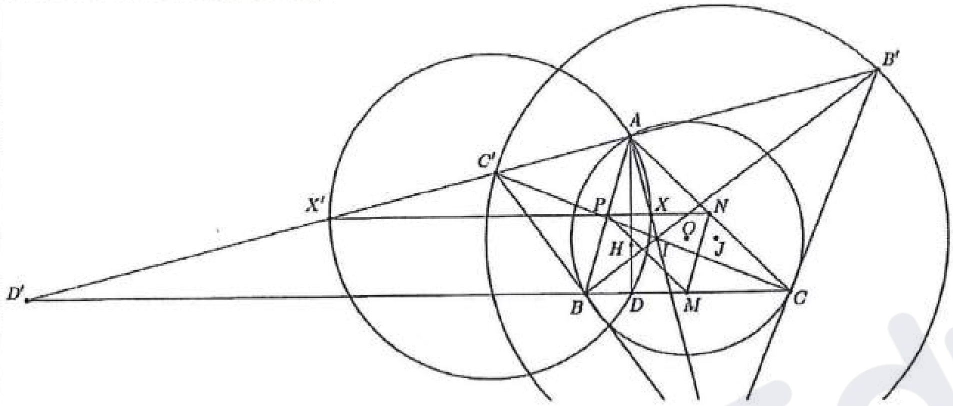
A'; tiếp tuyến của (O) tại A_0 cắt các tiếp tuyến của (O) tại B_0 và C_0 tương ứng tại các điểm C' và B'. Cho các tiếp tuyến của (O) tại Y, Z tương ứng cắt $A'C', A'B'$ tại Y', Z'.
Gọi G' là đối xứng của G qua trung trực AC. Khi đó BG' đẳng giác với BG đối với góc ABC. Do đó $\widehat{YBG'} = \widehat{SBG} = 90^\circ$, hay Y và G' đối xứng qua O. Khi đó B_1, F, G' thẳng hàng (do là đối xứng của ba điểm thẳng hàng B_0, F, G qua trung trực AC). Vì vậy ta có

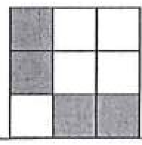
$$(BYA_0C_0) = (B_0G'AC) = B_1(B_0G'AC) = B_1(B_0FAC) = -1.$$

Suy ra BA_0YC_0 là tứ giác điều hòa và do đó B', B, Y thẳng hàng. Tương tự C', C, Z thẳng hàng.

Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} B & B_0 & C \\ C_0 & Z & B_0 \end{pmatrix}$, ta được OC' đi qua giao điểm của BZ và B_0C_0. Vì OC' là trung trực của A_0B_0 và ABA_0B_0 là hình chữ nhật nên OC' là trung trực của AB. Do đó OC' đi qua trung điểm E của AB. Vậy ta có OE, BZ, B_0C_0 đồng quy tại điểm M. Tương tự, N thuộc B_0C_0.
Vì BB_0 là đường kính của (O) nên $B'B$ đi qua tiếp điểm Y_0 của đường tròn bàng tiếp góc B' của tam giác $A'B'C'$ với cạnh $A'C'$. Xét tam giác vuông B_0YY_0, có $Y'Y = Y'B_0$ nên Y' là trung điểm của B_0Y_0. Do Y_0 và B_0 đối xứng qua trung điểm $A'C'$ nên Y' là trung điểm $A'C'$.
Tương tự, cho tiếp tuyến tại Z của (O) cắt $A'B'$ tại Z' thì Z' cũng là trung điểm của $A'B'$. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} C_0 & Z & B_0 \\ Z & C_0 & Y \end{pmatrix}$, ta được T, Z' và giao điểm của cặp đường thẳng (B_0Z, C_0Y) thẳng hàng. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} C_0 & Y & B_0 \\ Z & B_0 & Y \end{pmatrix}$, ta được T, Y' và giao điểm của cặp đường thẳng (B_0Z, C_0Y) thẳng hàng. Do đó T thuộc đường trung bình $Y'Z'$ của tam giác $A'B'C'$. Vì $Y'Z' \parallel B'C' \perp OA$ nên d trùng với $Y'Z'$.

Cho AP cắt lại (O) tại X. Khi đó AX và AS đẳng giác đối với góc BAC. Tương tự phần trên ta có A', A, X thẳng hàng. Cho AP cắt d và $B'C'$ tương ứng tại V và X_0. Khi đó V là trung điểm $A'X_0$. Lấy X' là trung điểm của $B'C'$. Ta có OX' là đường trung bình của tam giác AA_0X_0 nên $AX_0 = 2OX'$.
Gọi G_0 là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và f là phép vị tự tâm G_0 tỉ số -2. Khi đó, $f: X', Y', Z' \mapsto A', B', C'$. Do đó f biến các đường thẳng OX', OY' và OZ' tương ứng thành các đường thẳng $A'X_0, B'Y_0$ và $C'Z_0$ (vì $A'X_0 \parallel OX', B'Y_0 \parallel OY', C'Z_0 \parallel OZ'$). Do vậy f biến O thành P và biến đoạn thẳng OX' thành đoạn thẳng PA'. Suy ra

		$PA'=2OX'=AX_0$. Kéo theo $A'A=PX_0$. Vì V là trung điểm $A'X_0$ nên ta được $VA=VP$. Ta có điều phải chứng minh.	
		Tổng điểm câu 3	**6,00**
Câu	**Ý**	**Nội dung**	**Điểm**
4	*a*		***3,00***
(7,0 điểm)		Xét thế hình như dưới đây.  Vì AH, AO đẳng giác trong góc BAC nên $\widehat{OAX}=\widehat{HAX}=\widehat{ADX}$. Suy ra OA tiếp xúc với (AXD). Do đó $\mathcal{P}_{O/(AXD)}=R^2$ với R là bán kính đường tròn (ABC). Tương tự ta có $\mathcal{P}_{O/(BEY)}=\mathcal{P}_{O/(CZF)}=R^2$. Vậy điểm O có cùng phương tích với ba đường tròn $(AXD),(BYE),(CFZ)$.	
		Mặt khác, ta có $\mathcal{P}_{H/(AXD)}=\mathcal{P}_{H/(BEY)}=\mathcal{P}_{H/(CZF)}<0$ (cùng bằng $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HB}\cdot\overline{HE}=\overline{HC}\cdot\overline{HF}<0$). Do vậy điểm H có cùng phương tích với ba đường tròn $(AXD),(BYE),(CFZ)$. Vậy ba đường tròn (AXD), $(BYE),(CFZ)$ đồng trục OH. Hơn nữa vì phương tích của H đến ba đường tròn âm nên ba đường tròn phải có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.	
	b		***4,00***
		Vì A và D đối xứng qua XX' nên XX' là đường kính của (AXD). Do đó $AX'\perp AX$ và kéo theo AX' là phân giác ngoài góc BAC. Tương tự BY', CZ' lần lượt là phân giác ngoài các góc ABC, ACB. Gọi A', B', C' lần lượt là các tâm đường tròn bàng tiếp góc A,B,C của tam giác ABC. Khi đó I và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn Euler của tam giác $A'B'C'$, và kéo theo J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.	
		Cho AX', BY', CZ' lần lượt cắt BC, CA, AB tương ứng tại D', E', F' là chân các đường phân giác ngoài đỉnh A,B,C của tam giác ABC.	

		Ta thấy X', Y', Z' là tâm các đường tròn $(AD'), (BE'), (CF')$. Hơn nữa $(AD'B'C') = B(ACB'C') = -1$ (BB', BC' là phân giác trong và ngoài của góc ABC), hay đường kính AD' của (AD') chia điều hòa đường tròn $(A'B'C')$. Suy ra $\mathcal{P}_{J/(AD')} = R'^2$ với R' là bán kính của $(A'B'C')$. Tương tự ta có $\mathcal{P}_{J/(BE')} = \mathcal{P}_{J/(CF')} = R'^2$. Vậy điểm J có cùng phương tích với cả ba đường tròn $(AD'), (BE'), (CF')$.	
		Hiển nhiên ta có $\mathcal{P}_{H/(AD')} = \mathcal{P}_{H/(BE')} = \mathcal{P}_{H/(CF')}$ (cùng bằng $\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}$). Do vậy điểm H cũng có cùng phương tích với ba đường tròn $(AD'), (BE'), (CF')$. Suy ra ba đường tròn $(AD'), (BE'), (CF')$ có trục đẳng phương chung là HJ. Do đó ba tâm của chúng là X', Y', Z' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng HJ.	
		Tổng điểm câu 4	**7,00**
5 *(7,0 điểm)*	*a*		***3,00***
		Do có 4 viên bi và bảng có 3 cột, suy ra phải có một cột có ít nhất 2 viên bi. Nếu tồn tại một cột có nhiều hơn 2 viên bi thì chỉ còn lại tối đa 1 viên cho hai cột còn lại, không thỏa mãn điều kiện đã cho. Vậy với mỗi cách xếp thỏa mãn phải có một cột (gọi đó là cột A) có 2 viên bi, hai cột còn lại mỗi cột có đúng 1 viên bi.	
		Tương tự phải có một hàng có 2 viên bi, hai hàng còn lại mỗi hàng có đúng 1 viên bi. Đối với ô trống (gọi là ô X) còn lại của cột A, hàng chứa ô X (gọi là hàng B) cũng phải có ít nhất 1 viên bi. Vì hai cột khác A chỉ chứa 1 viên bi nên hàng B phải có đúng hai viên bi để thỏa mãn điều kiện thứ hai của đề bài. Do đó mỗi cách đặt 4 viên bi vào các ô của bảng tương ứng 1-1 với một ô X trống là giao của cột A và hàng B, trên đó cả A và B đều chứa đúng 2 viên bi ở các ô khác X, còn các ô còn lại của bảng đều không có bi. Cách chọn ô X bằng đúng số ô của của bảng 3×3. Như vậy, có tất cả 9 cách xếp bi thỏa mãn điều kiện đề bài. Ví dụ một cách xếp bi cho bảng 3×3, ta gọi đây là cách (*), trong đó các ô đen chứa bi và các ô trắng không chứa bi. 	
	b		***4,00***
		Trước tiên ta thấy các điều kiện đặt ra và yêu cầu của bài toán không thay đổi khi hoán vị các cột với nhau, và hoán vị các hàng của bảng với nhau. Thật vậy, việc hoán vị như vậy không thay đổi tính chất cùng hàng và cùng cột của các ô.	

Rõ ràng $N < 3k$, vì nếu $N \geq 3k$ ta sẽ đánh dấu tất cả $3k$ ô ở một hàng, ví dụ hàng đầu tiên của bảng. Từ giả thiết của bài toán, có một viên bi được đặt ở hàng này, do đó sẽ luôn có bi ở một trong các ô bị đánh dấu, mâu thuẫn.

Ta sẽ chứng minh với mọi cách đánh dấu $3k-1$ ô luôn có một cách xếp $4k$ viên bi thỏa mãn đề bài bằng quy nạp theo k.

Với $k=1$, xét một cách đánh dấu 2 ô tùy ý trong bảng 3×3. Lưu ý trong cách xếp (*) ở phần a), các ô màu trắng luôn chứa các cặp ô cùng hàng, các cặp ô cùng cột và các cặp ô khác hàng và khác cột. Do đó, với hai ô được đánh dấu tùy ý, có thể hoán vị hàng hoặc hoán vị cột để đưa về vị trí của một trong các cặp ô kể trên. Thực hiện phép xếp bi (*) rồi hoán vị ngược lại, ta nhận được phép xếp bi tránh được 2 ô đã đánh dấu.

Giả sử mệnh đề đúng tới $k-1$, $k \geq 2$. Ta xét một bảng $3k \times 3k$ với $(3k-1)$ ô được đánh dấu tùy ý. Do bảng có $3k$ hàng và $3k$ cột, suy ra phải có một hàng và một cột không có ô nào được đánh dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là hàng 1 và cột 1.

Xét hai trường hợp sau:

+) Giả sử có một hàng trong số $(3k-1)$ hàng còn lại có nhiều hơn 1 ô được đánh dấu. Suy ra có hai hàng có tổng số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là các hàng 2 và hàng 3, trong đó các ô $(2;2)$ và $(3;2)$ được đánh dấu. Ta sẽ xếp 4 viên bi theo cách (*) ở các ô $(2;1), (3;1), (1;2), (1;3)$. Tiếp theo áp dụng giả thiết quy nạp với bảng con $(3k-3)\times(3k-3)$ gồm các ô $(i;j)$, $4 \leq i, j \leq 3k$, với không quá $(3k-1)-3=(3k-4)$ ô được đánh dấu, ta nhận được cách xếp $4(k-1)+4=4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện đặt ra.

Trường hợp có một cột trong số $(3k-1)$ cột còn lại có nhiều hơn 1 ô được đánh dấu cũng được xét tương tự.

+) Giả sử mỗi hàng trong số $(3k-1)$ hàng còn lại có đúng một ô được đánh dấu, và mỗi cột trong số $(3k-1)$ cột còn lại có đúng một ô được đánh dấu. Bằng các hoán vị hàng và hoán vị cột, ta có thể đưa $(3k-1)$ ô được đánh dấu về các ô nằm trên đường chéo chính nối các ô $(i;i), 1 \leq i \leq 3k$, của bảng. Nhận xét trong cách xếp (*) các ô trên đường chéo chính đều không có bi. Do đó ta có thể đánh dấu liên tiếp k bảng vuông 3×3 dọc theo đường chéo chính và thực hiện cách xếp 4 viên bi theo cách (*) trong mỗi bảng vuông. Hoán vị ngược lại, ta nhận được cách xếp thỏa mãn điều kiện đặt ra.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề được chứng minh. Do đó số N lớn nhất là $(3k-1)$ với mọi $k \geq 1$.

Tổng điểm câu 5	**7,00**

6 *(6,0 điểm)*		Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $(3a^3+4bc+b+c)(3a+4bc+b+c)\ge(3a^2+4bc+b+c)^2$ $\Rightarrow\sqrt{3a^3+4bc+b+c}\ge\dfrac{3a^2+4bc+b+c}{\sqrt{3a+4bc+b+c}}.$ Ký hiệu $\sum$ là các tổng hoán vị theo các biến a,b,c. Ta chỉ cần chứng minh $S=\sum\dfrac{3a^2+4bc+b+c}{\sqrt{3a+4bc+b+c}}\ge 9.$	
		Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có $S^2\left(\sum(3a^2+4bc+b+c)(3a+4bc+b+c)\right)\ge\left(\sum(3a^2+4bc+b+c)\right)^3.$ Vậy ta chỉ cần chứng minh $81\left(\sum(3a^2+4bc+b+c)(3a+4bc+b+c)\right)\le\left(\sum(3a^2+4bc+b+c)\right)^3.$ (*)	
		Đặt $p=\sum a=3, q=\sum ab, r=abc$ ta có (*) tương đương với $81\left(\sum(3a^2+4bc+b+c)p+\sum(3a^2+4bc+b+c)(2a+4bc)\right)\le(33-2q)^3$ $\Leftrightarrow 81\left(3(33-2q)+6\sum a^3+12pr+24r+16\sum b^2c^2+4q+4\sum bc(b+c)\right)\le(33-2q)^3$ $\Leftrightarrow 81\left(261+16q^2-44q-30r\right)\le(33-2q)^3.$ (**)	
		Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Schur ta có $p^3+9r\ge 4pq\Leftrightarrow 90-40q\ge -30r.$ Thế nên để chứng minh (**) ta chỉ cần chỉ ra $81\left(351+16q^2-84q\right)\le(33-2q)^3\Leftrightarrow 81\left(351+4(6-x)^2-42(6-x)\right)\le(27+x)^3$ $\Leftrightarrow 81\left(243-6x+4x^2\right)\le x^3+81x^2+3\cdot 27^2x+27^3$ $\Leftrightarrow 0\le x\left(x^2-243x+2673\right),$ (***) trong đó $x=6-2q\in[0;6]\Rightarrow 243x\le 1458.$ Ta suy ra điều cần chứng minh.	
	Tổng điểm câu 6		**6,00**
Tổng điểm toàn bài (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)			**40,00**

-----------HẾT-----------