

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm có 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi 03/01/2025

Câu 1: (4 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$ với $x \neq 1, x \neq 4, x \geq 0$

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A khi x thỏa mãn $\frac{x}{16} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B . Tìm tọa độ các điểm A, B và viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2; -2)$ thỏa mãn cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5.

Câu 2: (4 điểm)

1) Giải phương trình: $3x^2 + 13 = 6\sqrt{2x+1} + 4x$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3y) = -16 \\ y^3 + 16 = 3xy^2 \end{cases}$

Câu 3: (4 điểm)

1) Một chiếc hộp đựng 51 tấm thẻ như nhau được ghi các số tự nhiên từ 10 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số ghi trên tấm thẻ là một số chẵn.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

Câu 4: (6.0 điểm).

Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC . Gọi D, N lần lượt là các tiếp điểm của $(O; R)$ với BC và AB , kẻ đường kính DI của đường tròn $(O; R)$. Tiếp tuyến đường tròn $(O; R)$ tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F .

1) Chứng minh $\triangle BOE$ vuông và $EI \cdot BD = FI \cdot CD = R^2$.

2) Gọi P, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, AD . Q là giao điểm của BC và AI . Chứng minh $AQ = 2KP$.

3) Gọi A_1 là giao điểm của AO với cạnh BC , B_1 là giao điểm của BO với cạnh AC , C_1 là giao điểm của CO với cạnh AB và $(O_1; R_1)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - OO_1}.$$

Câu 5: (2.0 điểm).

1) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$.

2) Trong tuần, mỗi ngày bạn Nam chơi một môn thể thao. Nam chạy 3 ngày một tuần nhưng không bao giờ Nam chạy 2 ngày liên tiếp. Vào ngày thứ hai, Nam chơi bóng bàn và 2 ngày sau đó Nam chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày Nam chạy hoặc bơi. Hỏi Nam chơi cầu lông vào thứ mấy trong tuần?

----- HẾT -----

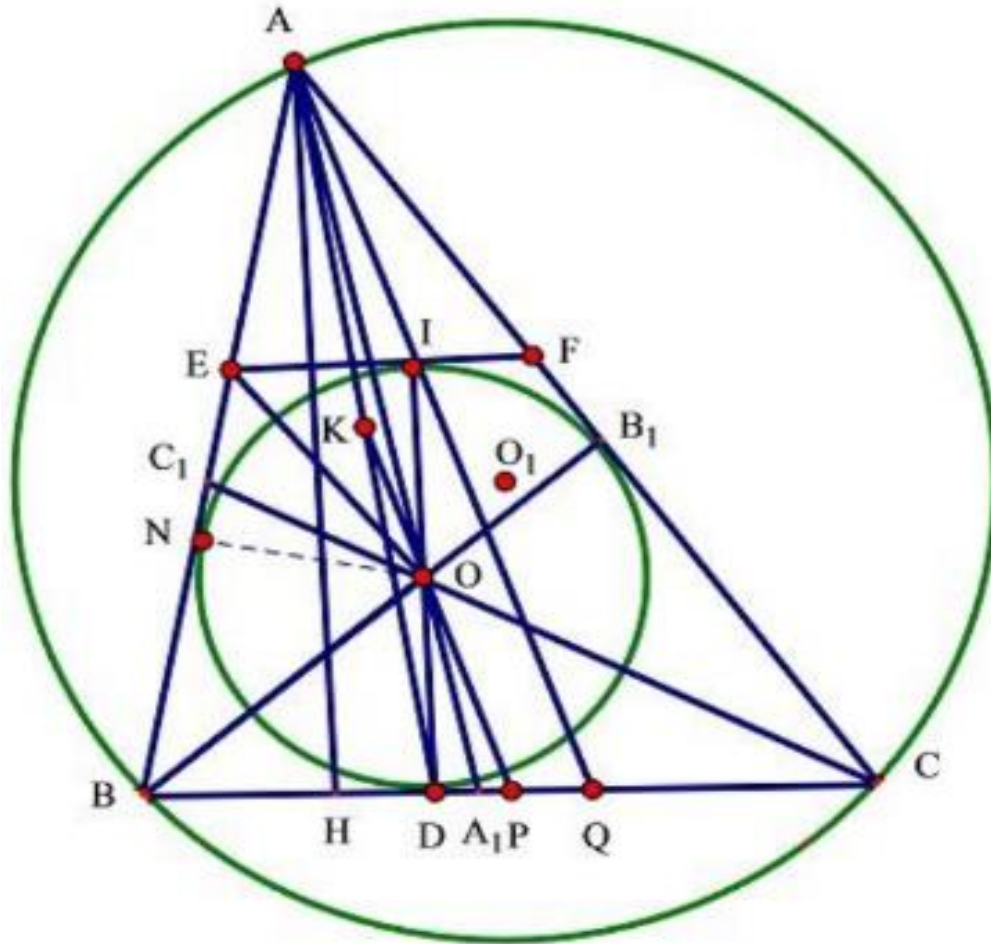
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1.1 2,5 điểm	<p>Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$</p> <p>với $x \neq 1, x \neq 4, x \geq 0$</p> <p>a) Rút gọn A.</p> <p>b) Tính giá trị của biểu thức A khi x thoả mãn $\frac{x}{16} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}}$</p>	
	$A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$ với $x \neq 1, x \neq 4, x \geq 0$ $= \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \right) : \left(\frac{2(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$ $= \frac{x - 6\sqrt{x} - 27}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$	1,0
	$= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 9)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$ $= \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$ <p>Vậy $A = \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} - 2}$ Khi $x \neq 1, x \neq 4, x \geq 0$</p>	0,5
	<p>b. Có $\frac{x}{16} = \frac{2\sqrt{27+7\sqrt{5}}}{\sqrt{10+7\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{54+14\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+7)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}+7)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+7)} = 1$</p> <p>Suy ra $x = 16$ (t/m đk)</p>	0,5
	<p>Thay $x = 16$ vào biểu thức A ta được kết quả $A = \frac{-5}{2}$</p> <p>Kết luận</p>	0,5
Câu 1.2 1,5 điểm	<p>Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B. Tìm tọa độ các điểm A, B và viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2; -2)$ thoả mãn cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5.</p>	
	<p>Tìm tọa độ của A, B.</p> <p>Xét $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(0; -3)$</p> <p>Xét $y = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6; 0)$</p>	0,5

	<p>Gọi H là chân đường cao kẻ từ M trong ΔAMC, suy ra $MH = 2$.</p> <p>Ta có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}MH.AC = 5$, suy ra $AC = 5$.</p> <p>Vì C thuộc đoạn OA nên $C(1;0)$.</p>	0,5
	<p>Giả sử $(\Delta): y = ax + b$, khi đó (Δ) đi qua $M(2; -2)$ và $C(1; 0)$ nên ta có</p> $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ <p>Suy ra $(\Delta): y = -2x + 2$.</p>	0,5
Câu 2.1 2,0 điểm	Giải phương trình: $3x^2 + 13 = 6\sqrt{2x+1} + 4x$	
	$3x^2 + 13 = 6\sqrt{2x+1} + 4x$ (ĐK: $x \geq \frac{-1}{2}$) $3x^2 - 4x + 13 - 6\sqrt{2x+1} = 0$	0,5
	$3(x^2 - 2x + 1) + [(2x+1) - 2 \cdot 3\sqrt{2x+1} + 9] = 0$ $3(x-1)^2 + (\sqrt{2x+1} - 3)^2 = 0$	0,5
	<p>Chỉ ra được</p> $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \sqrt{2x+1} - 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{2x+1} = 3 \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$ (vô lí) Vậy phương trình vô nghiệm	0,5
Câu 2.2 2,0 điểm	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3y) = -16 \\ y^3 + 16 = 3xy^2 \end{cases}$	
	$\begin{cases} x^2(x-3y) = -16 & (1) \\ y^3 + 16 = 3xy^2 & (2) \end{cases}$ <p>Từ pt (2) suy ra $16 = 3xy^2 - y^3$ thay vào phương trình (1) ta có</p> $x^2(x-3y) = -(3xy^2 - y^3) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^3 = 0 \Leftrightarrow x = y.$	1

	<p>Với $x = y$ thay vào phương trình (2) ta có:</p> $y^3 + 16 = 3y^3$ $2y^3 = 16$ $y = 2.$ <p>Với $y = 2 \Rightarrow x = 2$</p> <p>Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$</p>	1
Câu 3.1 2,0 điểm	<p>Một chiếc hộp đựng 51 tấm thẻ như nhau được ghi các số tự nhiên từ 10 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số ghi trên tấm thẻ là một số chẵn.</p>	
	<p>Gọi biến cố B: “số được ghi trên thẻ là số có tổng các chữ số là một số chẵn”.</p> <p>Giả sử rút được thẻ ghi số \overline{ab} với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 9$ và số 60.</p> <p>Ta có $a+b$ là số chẵn có ba khả năng xảy ra:</p> <p>+ TH1: đó là số 60.</p> <p>+ TH2: a, b cùng là số chẵn. Với mỗi chữ số chẵn $a \in \{2; 4\}$, tương ứng với $b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$ nên trường hợp này có $2 \cdot 5 = 10$ (số).</p>	1
	<p>+ TH3: a, b cùng lẻ thì với mỗi chữ số lẻ $a \in \{1; 3; 5\}$, tương ứng với $b \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ nên trường hợp này có $3 \cdot 5 = 15$ (số).</p> <p>Số các khả năng xảy ra biến cố là: $1 + 10 + 15 = 26$.</p> <p>Do đó xác suất của biến cố B là $\frac{26}{51}$.</p>	1
Câu 3.2 2,0 điểm	<p>Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$</p>	
	<p>Ta có $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$</p> $(x - y)^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60$ $(x - y)^2 = 5(xy - 3)(4 - xy)$	0,5
	<p>Vì $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow 5(xy - 3)(4 - xy) \geq 0 \Rightarrow 3 \leq xy \leq 4$.</p> <p>Do x, y nguyên nên $x \cdot y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$</p>	0,5
	<p>Với: $\begin{cases} xy = 3 \\ (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 3 \end{cases}$ (vô nghiệm)</p>	0,5
	<p>Với $\begin{cases} xy = 4 \\ (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$</p> <p>Kết luận</p>	0,5
Câu 4 6,0 điểm		
Câu 4.1	<p>Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với các cạnh của tam giác</p>	

3 điểm	<p>ABC . Gọi D, N lần lượt là các tiếp điểm của $(O; R)$ với BC và AB , kẻ đường kính DI của đường tròn $(O; R)$. Tiếp tuyến đường tròn $(O; R)$ tại I cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F.</p> <p>1) Chứng minh ΔBOE vuông và $EI.BD = FI.CD = R^2$.</p>
---------------	--



0,5

Vẽ hình đủ làm câu a)

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau chỉ ra OE và OB lần lượt là phân giác của các góc ION và NOD .

1

Mà ION và NOD là hai góc kề bù $\Rightarrow OE \perp OB \Rightarrow \Delta BOE$ vuông tại O .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BOE , đường cao ON ta có $EN.BN = ON^2 = R^2$.

1

Mà $EN = EI, BN = BD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$EN = EI, BN = BD \Rightarrow EI.BD = R^2$

Chứng minh tương tự ta có ΔFOC vuông tại O và $FI.CD = R^2$.

0,5

Vậy: $EI.BD = FI.CD = R^2$.

<p>Câu 4.2 1,5 điểm</p>	<p>Gọi P, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, AD. Q là giao điểm của BC và AI. Chứng minh $AQ = 2KP$.</p>
-----------------------------	---

	Ta có: $EF \parallel BC (\perp ID)$ nên theo định lý Ta – lét có: $\frac{IF}{QC} = \frac{AF}{AC} = \frac{FE}{BC}$ (1)	0,75
	Lại có: $EI \cdot BD = FI \cdot CD$ (cmt) $\Rightarrow \frac{FI}{BD} = \frac{EI}{CD} = \frac{FI + EI}{BD + CD} = \frac{EF}{BC}$. (2)	
	Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{FI}{QC} = \frac{FI}{BD} \Rightarrow QC = BD$.	0,25
	Mà: $CP = CQ + QP$, $BP = DB + DP$, $CP = PB \Rightarrow QP = PD$. Hay P là trung điểm của đoạn QD .	0,25
	Xét $\triangle ADQ$ có P là trung điểm của QD (cmt) và K là trung điểm của AD (gt). $\Rightarrow PK$ là đường trung bình của $\triangle ADQ$. $\Rightarrow PK = \frac{1}{2}AQ$ hay $AQ = 2PK$ (đpcm)	0,25
Câu 4.3 1,5 điểm	Gọi A_1 là giao điểm của AO với cạnh BC , B_1 là giao điểm của BO với cạnh AC , C_1 là giao điểm của CO với cạnh AB và $(O_1; R_1)$ là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - O_1O}$.	
	+ Kẻ $AH \perp BC$ tại H thì $AH \parallel OD$, dẫn đến: $\frac{A_1O}{A_1A} = \frac{OD}{AH} = \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}$ + Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{B_1O}{B_1B} = \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}$; $\frac{C_1O}{C_1C} = \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}}$	0,5
	+ Do O là điểm thuộc miền trong $\triangle ABC$ nên ta có: $\frac{A_1O}{A_1A} + \frac{B_1O}{B_1B} + \frac{C_1O}{C_1C} = \frac{S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}} = 1$ $\Rightarrow 1 - \frac{AO}{A_1A} + 1 - \frac{BO}{B_1B} + 1 - \frac{CO}{C_1C} = 1$	0,25
	$\Rightarrow \frac{AO}{A_1A} + \frac{BO}{B_1B} + \frac{CO}{C_1C} = 2 \Rightarrow 2 \geq \frac{AO_1 - O_1O}{A_1A} + \frac{BO_1 - O_1O}{B_1B} + \frac{CO_1 - O_1O}{C_1C}$ $\Rightarrow \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} \leq \frac{2}{R_1 - O_1O}$ (*), (vì $AO_1 = BO_1 = CO_1 = R_1; R_1 > O_1O$)	0,5
	+ Do $AB < AC$ suy ra $\triangle ABC$ không phải là tam giác đều nên dấu “=” trong (*) không thể xảy ra. Vậy: $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - O_1O}$	0,25
Câu 5.1 1,0 điểm	Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$.	

	<p>Học sinh chứng minh được với $x, y > 0$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (*).</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $x = y$</p> <p>Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có $\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{(a+b)^2} = 4(1)$</p>	0,5																												
	<p>Lại có</p> $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 1 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{2ab} \geq 2(2)$ <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 2+4$</p> $\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq 6$ <p>Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$</p>	0,5																												
Câu 5.2 1,0 điểm	<p>Trong tuần, mỗi ngày bạn Nam chơi một môn thể thao. Nam chạy 3 ngày một tuần nhưng không bao giờ Nam chạy 2 ngày liên tiếp. Vào ngày thứ hai, Nam chơi bóng bàn và 2 ngày sau đó Nam chơi bóng đá. Nam còn đi bơi và chơi cầu lông nhưng không bao giờ Nam chơi cầu lông sau ngày Nam chạy hoặc bơi. Hỏi Nam chơi cầu lông vào thứ mấy trong tuần ?</p>																													
	<p>Theo đề bài, Nam chơi bóng bàn vào thứ hai và bóng đá vào thứ tư.</p> <p>Do Nam chạy 3 ngày một tuần nhưng không bao giờ Nam chạy 2 ngày liên tiếp nên Nam chỉ có thể chạy vào thứ ba, thứ năm, thứ bảy hoặc thứ ba, thứ năm, chủ nhật hoặc thứ ba, thứ sáu, chủ nhật.</p> <p>TH1:</p> <table border="1" data-bbox="225 1223 1302 1319"> <thead> <tr> <th>Thứ hai</th> <th>Thứ ba</th> <th>Thứ tư</th> <th>T.năm</th> <th>Thứ sáu</th> <th>Thứ bảy</th> <th>C.nhật</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>B.Bàn</td> <td>Chạy</td> <td>B.Đá</td> <td>Chạy</td> <td></td> <td>Chạy</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Nếu Nam chạy vào thứ ba, thứ năm, thứ bảy thì Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ sáu hoặc chủ nhật. Mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên không thể xảy ra trường hợp này.</p>	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật	B.Bàn	Chạy	B.Đá	Chạy		Chạy		0,5														
Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật																								
B.Bàn	Chạy	B.Đá	Chạy		Chạy																									
	<p>TH2:</p> <table border="1" data-bbox="225 1594 1302 1691"> <thead> <tr> <th>Thứ hai</th> <th>Thứ ba</th> <th>Thứ tư</th> <th>T.năm</th> <th>Thứ sáu</th> <th>Thứ bảy</th> <th>C.nhật</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>B.Bàn</td> <td>Chạy</td> <td>B.Đá</td> <td>Chạy</td> <td></td> <td></td> <td>Chạy</td> </tr> </tbody> </table> <p>Nếu Nam chạy vào thứ ba, thứ năm, chủ nhật thì Nam chỉ có thể chơi cầu lông và bơi vào hai ngày thứ sáu và thứ bảy. Mà theo đề bài, Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy hoặc bơi nên không xảy ra trường hợp này.</p> <p>TH3:</p> <table border="1" data-bbox="225 1872 1302 1968"> <thead> <tr> <th>Thứ hai</th> <th>Thứ ba</th> <th>Thứ tư</th> <th>T.năm</th> <th>Thứ sáu</th> <th>Thứ bảy</th> <th>C.nhật</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>B.Bàn</td> <td>Chạy</td> <td>B.Đá</td> <td></td> <td>Chạy</td> <td></td> <td>Chạy</td> </tr> </tbody> </table> <p>Nếu Nam chạy vào thứ ba, thứ sáu, chủ nhật thì Nam chỉ có thể chơi cầu lông vào thứ năm hoặc thứ bảy. Mà Nam không chơi cầu lông sau ngày Nam chạy nên Nam chơi cầu lông vào thứ năm và bơi vào thứ bảy.</p>	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật	B.Bàn	Chạy	B.Đá	Chạy			Chạy	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật	B.Bàn	Chạy	B.Đá		Chạy		Chạy	0,5
Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật																								
B.Bàn	Chạy	B.Đá	Chạy			Chạy																								
Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	T.năm	Thứ sáu	Thứ bảy	C.nhật																								
B.Bàn	Chạy	B.Đá		Chạy		Chạy																								

	Vậy Nam chơi cầu lông vào thứ năm.	
--	------------------------------------	--

Lưu ý: Học sinh làm cách khác nếu đúng cho điểm tối đa.