

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Cho số thực $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x(2 - x)$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = mx + 2$ (với m là tham số) và parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 5.

Bài 2. (3,5 điểm)

1) Cho $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 3}$. Giải phương trình $f(x) = x^2 - f(3 - x)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x^3 + 8y^3 + 6xy(x - 2y) = 12x^2 - 6x + 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{9 - 4y^2} = 1 - 2y. \end{cases}$

Bài 3. (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2025$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{7x^2 + 16xy + 2y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{7y^2 + 16yz + 2z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{7z^2 + 16zx + 2x^2}}$$

Bài 4. (3,0 điểm)

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn $4n + 13$ và $5n + 16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2025 - 17n^2$ chia hết cho 72.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b và số nguyên tố p thỏa mãn

$$(a^3 + b)(b^3 + a) = p^3.$$

Bài 5. (6,0 điểm)

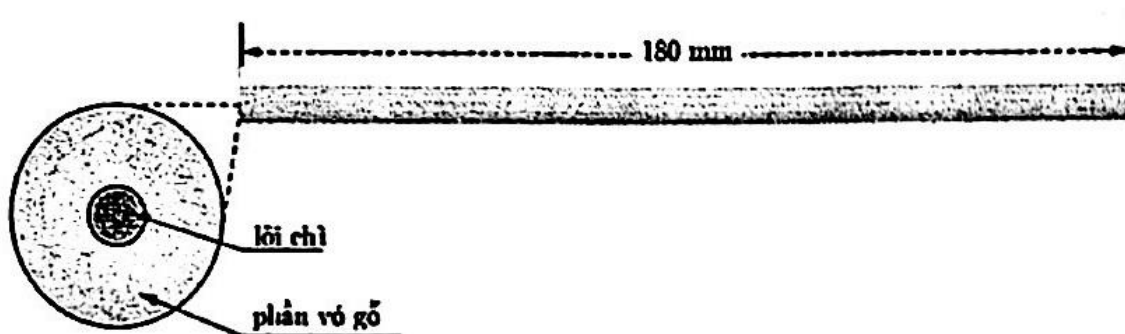
1) Cho đường tròn (O, R) có dây BC cố định ($BC \neq 2R$). Gọi A là một điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O, R) sao cho $AC > AB > BC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Các tia BI, CI cắt DE theo thứ tự tại M, N .

a) Chứng minh tứ giác $BIND$ là tứ giác nội tiếp.

b) Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt cạnh BC tại điểm P . Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN . Chứng minh tam giác FNP là tam giác vuông.

c) Chứng minh $\frac{AB + BC + CA}{MN + MD + NE}$ không đổi.

2) Một cây bút chì hình trụ có chiều cao bằng 180 mm , đường kính đáy bằng $6,8\text{ mm}$, gồm có phần vỏ gỗ và lõi chì. Lõi chì có dạng hình trụ, chiều cao bằng với chiều cao của bút, đường kính đáy bằng $1,6\text{ mm}$.



Để làm phần vỏ gỗ của bút chì trên, người ta dùng một thanh gỗ hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng 180 mm , mặt đáy là hình vuông cạnh bằng $6,8\text{ mm}$. Tính thể tích phần gỗ bỏ đi.

Bài 6. (2,0 điểm)

1) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 7.

2) Trên một đường tròn người ta lấy 5360 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Tại mỗi điểm người ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn: "số tại mỗi điểm màu xanh bằng tổng hai số ghi tại mỗi điểm màu đỏ kề nó, số ghi tại mỗi điểm màu đỏ bằng tích hai số ghi tại mỗi điểm màu xanh kề nó". Tính tổng 5360 số đó.

=====HẾT=====

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....