

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi có 01 trang

Ngày thi 29 tháng 11 năm 2024

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

**Bài 1: (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$

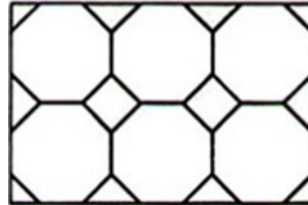
2. Với các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $xyz = -1$ ;  $x + y + z = 4$  và

$\frac{x}{x^2-3x-1} + \frac{y}{y^2-3y-1} + \frac{z}{z^2-3z-1} = \frac{4}{9}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Bài 2: (4,0 điểm)**

1. Tìm  $x$  biết  $\frac{x-1}{2025} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-3}{2023} + \dots + \frac{x-2025}{1} = 2025$

2. Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng  $2dm$  và số gạch hình bát giác đều là 500 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.



**Bài 3: (4,0 điểm)**

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x(1+x+x^2) = 4y(y-1)$ .

2. Cho hai số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $x^4 + x^2y^2 + y^4$  chia hết cho 11. Chứng minh rằng  $x^4 + x^2y^2 + y^4$  chia hết cho  $11^4$ .

**Bài 4: (6,0 điểm)**

1. Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ , góc  $A$  tù và  $AB > AD$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $AC$ . Trên tia  $BH$  lấy điểm  $E$  sao cho  $H$  là trung điểm của  $BE$ .

a) Chứng minh rằng  $ADEC$  là hình thang cân.

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AE$  và  $CD$ ,  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $CD$ ,  $J$  là trung điểm của  $OK$ . Chứng minh rằng  $IJ$  vuông góc với  $AK$ .

2. Cho hình vuông  $ABCD$ ,  $E$  là một điểm trên cạnh  $CD$ . Tia phân giác góc  $BAE$  cắt  $BC$  tại  $M$ . Chứng minh rằng  $AM \leq 2ME$ .

**Bài 5: (2,0 điểm)**

1. Bạn Tú có một hộp bút trong đó có 5 chiếc bút bi mực xanh, 7 chiếc bút bi mực đen và 3 chiếc bút chì. Bạn lấy ngẫu nhiên hai chiếc bút. Xác suất của biến cố: “Bạn Tú lấy được 1 chiếc bút chì và 1 chiếc bút mực”.

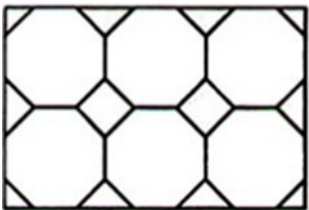
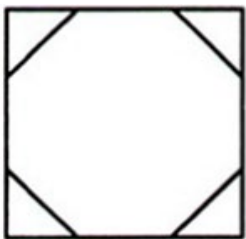
2. Cho  $a, b, c$  là các số dương thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:

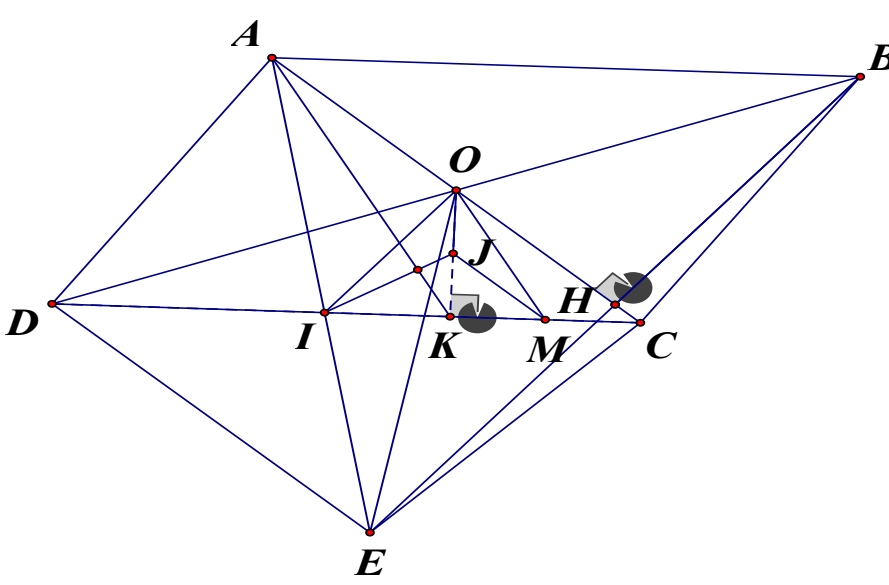
$$\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{15}{4}.$$

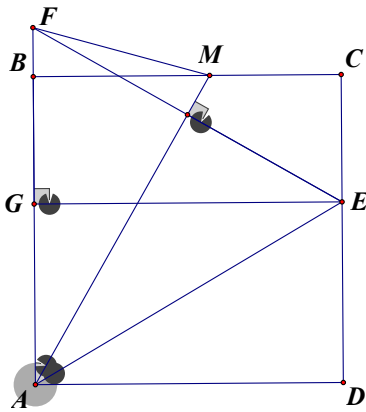
----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
Bài 1 4,0đ	<b>1. Rút gọn biểu thức</b> $A = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$	2,0
	$A = \frac{(x^2+x-1)(x^2-x+1)}{(x^2+1+x)(x^2+1-x)} + \frac{(x+x^2-1)(x-x^2+1)}{(x^2+x+1)(x^2+x-1)} + \frac{(x^2-x+1)(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}$ $= \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1} + \frac{x-x^2+1}{x^2+x+1} + \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = 1.$	1,0 1,0
	<b>2. Với các số thực <math>x, y, z</math> thỏa mãn <math>xyz = -1; x + y + z = 4</math> và</b> $\frac{x}{x^2-3x-1} + \frac{y}{y^2-3y-1} + \frac{z}{z^2-3z-1} = \frac{4}{9}$ . <b>Tính giá trị của biểu thức</b> $P = x^2 + y^2 + z^2$ .	2,0
	Ta có: $\frac{x}{x^2-3x-1} = \frac{x}{x^2-3x+xyz} = \frac{1}{x-3+yz} = \frac{1}{1-y-z+yz} = \frac{1}{(y-1)(z-1)}$	0,25
	Tương tự $\frac{y}{y^2-3y-1} = \frac{1}{(x-1)(z-1)}$ ; $\frac{z}{z^2-3z-1} = \frac{1}{(x-1)(y-1)}$ . Suy ra $\frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(x-1)(z-1)} + \frac{1}{(x-1)(y-1)} = \frac{4}{9}$ $\frac{x-1+y-1+z-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{4}{9} \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) = \frac{9}{4}$ $\Rightarrow xy+yz+zx = \frac{-1}{4}$ $\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \frac{33}{2}$ Vậy $x^2+y^2+z^2 = \frac{33}{2}$ .	0,5 0,5 0,5
Bài 2 4,0đ	<b>1. Tìm x biết</b> $\frac{x-1}{2025} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-3}{2023} + \dots + \frac{x-2025}{1} = 2025$	2,0
	Ta có: $\frac{x-1}{2025} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-3}{2023} + \dots + \frac{x-2025}{1} = 2025$	0,75
	$\frac{x-2026}{2025} + \frac{x-2026}{2024} + \frac{x-2026}{2023} + \dots + \frac{x-2026}{1} = 0$ $(x-2026) \left( \frac{1}{2025} + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0$ $x = 2026$ Vậy $x = 2026$ .	0,75 0,5

	<p><b>2. Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng <math>2dm</math> và số gạch hình bát giác đều là 500 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.</b></p> 	<b>2,0</b>
	 <p>Xét một hình vuông chứa viên gạch hình bát giác đều cạnh <math>2dm</math>. Bốn tam giác vuông cân nằm ngoài viên gạch hình bát giác đều ghép lại được một hình vuông cạnh <math>2dm</math> có diện tích bằng <math>4dm^2</math>.  Nhu vậy ứng với mỗi viên gạch hình bát giác đều, có diện tích <math>4dm^2</math> được lát bởi các viên gạch không phải là hình bát giác đều.  Vậy diện tích phải tìm là <math>500 \times 4 = 2000 (dm^2) = 20 (m^2)</math>.</p>	0,75 0,5 0,75
<b>Bài 3 4,0đ</b>	<p><b>1. Tìm tất cả các cặp số nguyên <math>(x; y)</math> thỏa mãn: <math>x(1+x+x^2) = 4y(y-1)</math>.</b></p> <p>Ta có <math>x(1+x+x^2) = 4y(y-1)</math></p> $(x^3 + x^2) + (x+1) = 4y^2 - 4y + 1$ $(x+1)(x^2 + 1) = (2y-1)^2 \quad (1)$ <p>Vì <math>x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 &gt; 0</math> nên từ (1) <math>\Rightarrow x \geq 0</math> và <math>x</math> chẵn.</p> <p>Giả sử <math>(x+1, x^2+1) = d \Rightarrow d</math> lẻ và <math>x^2-1:d; x^2+1:d \Rightarrow 2:d \Rightarrow d=1</math></p> <p>Vì <math>(x+1)(x^2+1)</math> là số chính phương và <math>(x+1, x^2+1)=1</math> nên <math>(x+1)</math> và <math>(x^2+1)</math> cũng là hai số chính phương.</p> <p>Do <math>x \geq 0 \Rightarrow x^2 &lt; x^2+1 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1 = (x+1)^2 \Rightarrow x=0</math></p> <p>Khi <math>x=0</math>, ta có <math>4y(y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0(t/m) \\ y=1(t/m) \end{cases}</math>.</p> <p>Vậy <math>(x, y) \in \{(0;0); (0;1)\}</math></p>	<b>2,0</b> 0,5 0,5 0,25 0,25

	<p><b>2. Cho hai số nguyên dương <math>x, y</math> thỏa mãn <math>x^4 + x^2y^2 + y^4</math> chia hết cho 11. Chứng minh rằng: <math>x^4 + x^2y^2 + y^4</math> chia hết cho <math>11^4</math>.</b></p> <p>Ta có: <math>x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy):11</math>  <math>\Rightarrow x^2 + y^2 + xy:11</math> hoặc <math>x^2 + y^2 - xy:11</math></p> <p>+) Nếu <math>x^2 + y^2 + xy:11 \Rightarrow x^3 - y^3:11 \Rightarrow x^3 \equiv y^3 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv y \pmod{11}</math>  <math>\Rightarrow x^4 + y^4 + x^2y^2 \equiv 3x^4 \pmod{11} \Rightarrow x^4 \equiv 0 \pmod{11}</math> (vì <math>(3,4)=1</math>) <math>\Rightarrow x:11 \Rightarrow y:11</math></p> <p>Do đó <math>x^4 + y^4 + x^2y^2:11^4</math></p> <p>+) Nếu <math>x^2 + y^2 - xy:11 \Rightarrow x^3 + y^3:11 \Rightarrow x^3 \equiv -y^3 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv -y \pmod{11}</math>  <math>\Rightarrow x^4 + y^4 + x^2y^2 \equiv 3x^4 \pmod{11} \Rightarrow x^4 \equiv 0 \pmod{11}</math> (vì <math>(3,4)=1</math>) <math>\Rightarrow x:11 \Rightarrow y:11</math></p> <p>Do đó <math>x^4 + y^4 + x^2y^2:11^4</math></p> <p>Vậy với <math>x, y</math> nguyên dương thỏa mãn <math>x^4 + x^2y^2 + y^4</math> chia hết cho 11 thì <math>x^4 + x^2y^2 + y^4</math> chia hết cho <math>11^4</math>.</p>	<p><b>2,0</b></p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>
<p><b>Bài 4.1</b> <b>4,0đ</b></p>	<p><b>1. Cho hình bình hành <math>ABCD</math> có <math>O</math> là giao điểm của hai đường chéo <math>AC</math> và <math>BD</math>, góc <math>A</math> tù và <math>AB &gt; AD</math>. Gọi <math>H</math> là hình chiếu vuông góc của <math>B</math> trên <math>AC</math>. Trên tia <math>BH</math> lấy điểm <math>E</math> sao cho <math>H</math> là trung điểm của <math>BE</math>.</b></p> <p><b>a) Chứng minh rằng <math>AEDC</math> là hình thang cân.</b></p> <p><b>b) Gọi <math>I</math> là giao điểm của <math>AE</math> và <math>CD</math>, <math>K</math> là hình chiếu vuông góc của <math>O</math> trên <math>CD</math>, <math>J</math> là trung điểm của <math>OK</math>. Chứng minh rằng <math>IJ</math> vuông góc với <math>AK</math>.</b></p>	<p><b>4,0</b></p>
		

<b>Câu 1</b> <b>4,0đ</b>	<p>a) Ta có: <math>OH</math> là đường trung trực của <math>BE \Rightarrow OB = OE</math>, mà <math>OB = OD</math>  Suy ra <math>OB = OD = OE \Rightarrow \Delta BDE</math> vuông tại <math>E \Rightarrow ED \perp BE</math>  Chứng minh <math>DE // AC \Rightarrow</math> tứ giác <math>ADEC</math> là hình thang (1)  Chứng minh <math>\Delta ABE</math> cân <math>\Rightarrow AB = AE</math> mà <math>AB = CD \Rightarrow DC = AE</math> (2)  Từ (1) và (2) suy ra tứ giác <math>ADEC</math> là hình thang cân.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
	<p>b) Gọi <math>M</math> là trung điểm của <math>KC</math>.  + Chứng minh <math>JM</math> là đường trung bình của <math>\Delta OKC</math> nên <math>JM // OC</math> (3)  + Chứng minh <math>\Delta IAC</math> cân tại <math>I</math> có <math>IO</math> là đường trung tuyến đồng thời là đường cao nên <math>IO \perp AC</math> (4)  Từ (3) và (4) suy ra <math>MJ \perp IO</math>.  + Xét <math>\Delta IMO</math> có <math>OK \perp IM</math>; <math>JM \perp OI</math> mà <math>OK</math> cắt <math>MJ</math> tại <math>J \Rightarrow J</math> là trực tâm của <math>\Delta IMO \Rightarrow JI \perp OM</math> (5)  + Chứng minh <math>MO</math> là đường trung bình của <math>\Delta AKC \Rightarrow OM // AK</math> (6)  Từ (5) và (6) suy ra <math>AK \perp IJ</math>.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
<b>Bài 4.2</b> <b>2,0đ</b>	<p><b>2. Cho hình vuông <math>ABCD</math>, <math>E</math> là một điểm trên cạnh <math>CD</math>. Tia phân giác góc <math>BAE</math> cắt <math>BC</math> tại <math>M</math>. Chứng minh rằng: <math>AM \leq 2ME</math>.</b></p>  <p>Vẽ <math>EF \perp AM</math> (<math>F \in AB</math>), <math>EG \perp AB</math> (<math>G \in AB</math>)  + Chứng minh tứ giác <math>AGED</math> là hình chữ nhật <math>\Rightarrow GE = AD</math>.  + Xét <math>\Delta ABM</math> và <math>\Delta EGF</math> có: <math>\widehat{ABM} = \widehat{EGF} (= 90^\circ)</math>; <math>AB = EG (= AD)</math>; <math>\widehat{MAB} = \widehat{GEF}</math>  Do đó <math>\Delta ABM = \Delta EGF</math> (G.C.G) <math>\Rightarrow AM = EF</math>.  + Xét <math>\Delta AEF</math> có <math>AM</math> là đường phân giác đồng thời là đường cao nên <math>\Delta AEF</math> cân tại <math>A</math>  <math>\Rightarrow AM</math> là đường trung trực của <math>EF</math>.  + Xét ba điểm <math>M, E, F</math> ta có <math>EF \leq ME + MF \Rightarrow AM \leq 2ME</math>.  Dấu “=” xảy ra khi <math>M</math> là trung điểm của <math>BC</math>.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
<b>Bài 5</b>	<p><b>1. Bạn Tú có một hộp bút trong đó có 5 chiếc bút bi mực xanh, 7 chiếc bút bi mực đen và 3 chiếc bút chì. Bạn lấy ngẫu nhiên hai chiếc bút. Xác suất của biến cố: “Bạn Tú lấy được 1 chiếc bút chì và 1 chiếc bút mực”.</b></p>	1,0
	<p>+ Chiếc bút thứ nhất chọn 1 trong số 15 chiếc bút nên có 15 cách.  Chiếc bút thứ hai chọn 1 trong 14 chiếc bút còn lại nên có 14 cách.</p>	0,25

<p><b>2,0đ</b></p>	<p>Số cách chọn 2 chiếc bút là <math>15.14:2=105</math> cách. (Cứ mỗi cặp bị lặp lại 2 lần).          + Chiếc bút chì chọn 1 trong 3 chiếc nên có 3 cách.          + Chiếc thứ hai chọn 1 trong 12 chiếc bút mực nên có 12 cách.          Số cách chọn ra 2 chiếc bút trong đó có 1 chiếc bút chì và một chiếc bút mực là <math>3.12=36</math> cách.          Xác suất của biến cố: “Bạn Tú lấy được 1 chiếc bút chì và 1 chiếc bút mực” là <math>\frac{36}{105} = \frac{12}{35}</math>.</p>	<p>0,25  0,25  0,25</p>
	<p><b>2. Cho <math>a, b, c</math> là các số dương thỏa mãn <math>a+b+c=1</math>. Chứng minh rằng:</b></p> $\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{15}{4}.$	<p><b>1,0</b></p>
	<p>Vi</p> $a+b+c=1 \text{ nên } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ $= 3 + \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left( \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) = 3 + \frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{c^2+a^2}{ca}.$ <p>Do đó:</p> $\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) =$ $= \left( \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2}{4ab} \right) + \left( \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+c^2}{4bc} \right) + \left( \frac{ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+a^2}{4ca} \right) + \frac{3}{4}$ $\geq 2\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{4ab}} + 2\sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2} \cdot \frac{b^2+c^2}{4bc}} + 2\sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2} \cdot \frac{c^2+a^2}{4ca}} + \frac{3}{4}$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ <p>Dấu “=” xảy ra khi <math>a=b=c=\frac{1}{3}</math>.</p>	<p>0,25  0,25  0,25</p>

**Lưu ý:**

- Trên đây chỉ là hướng dẫn chấm, giám khảo căn cứ vào bài làm của học sinh, linh hoạt cho điểm.
- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Bài hình vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.