



---

PHIẾU BÀI TẬP THÁNG 11

---



HỌ VÀ TÊN:.....

LỚP : .....

## CHƯƠNG III. CĂN THỨC

### BÀI 2. MỘT SỐ PHÉP TÍNH VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC

#### A. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1:** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương hãy tính:

$$a) \sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} = |\sqrt{7}-5|$$

Do  $\sqrt{7} < \sqrt{25}$  hay  $\sqrt{7} < 5$  nên  $\sqrt{7}-5 < 0$  Vì thế ta có  $|\sqrt{7}-5| = 5-\sqrt{7}$

$$\text{Vậy } \sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} = |\sqrt{7}-5| = 5-\sqrt{7}$$

$$b) \sqrt{\left(\frac{-8}{11}\right)^2} = \left|\frac{-8}{11}\right| = \frac{8}{11}$$

$$c) \sqrt{6+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5} = \sqrt{1^2+2.1.\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}-2\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-2\sqrt{5} = 1+\sqrt{5}-2\sqrt{5} = 1-\sqrt{5}$$

**Ví dụ 2:** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

$$a) \sqrt{25.114} = \sqrt{25}.\sqrt{114} = 5.12 = 60$$

$$b) \sqrt{5}.\sqrt{20} = \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10$$

**Ví dụ 3:** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương hãy tính:

$$a) \sqrt{\frac{1,69}{0,25}} = \frac{\sqrt{1,69}}{\sqrt{0,25}} = \frac{1,3}{0,5} = 2,6$$

$$b) \frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{216}{6}} = \sqrt{36} = 6$$

**Ví dụ 4:** So sánh  $2\sqrt{10}$  và  $\sqrt{41}$

$$\text{Ta có } 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2.10} = \sqrt{4.10} = \sqrt{40}$$

$$\text{Do } 40 < 41 \text{ nên } \sqrt{40} < \sqrt{41} \text{ hay } 2\sqrt{10} < \sqrt{41}$$

**Ví dụ 5:** Rút gọn biểu thức

$$a) \sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300} = \sqrt{25.3} + \sqrt{16.3} - \sqrt{100.3} = \sqrt{5^2.3} + \sqrt{4^2.3} - \sqrt{10^2.3}$$

$$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

#### B. BÀI TẬP

##### DẠNG 1. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

**Bài 1.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một bình phương, hãy tính:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{(0,4)^2}; & 2) \sqrt{(-2,1)^2}; & 3) \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}; \\
 4) \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}; & 5) \sqrt{(5-\sqrt{17})^2}; & 6) \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}.
 \end{array}$$

**Bài 2.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một tích, hãy tính:

$$\begin{array}{llll}
 1) \sqrt{4.49}; & 2) \sqrt{-64.(-81)}; & 3) \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{16}\right)^2}; & 4) \sqrt{3} \cdot \sqrt{75}; \\
 5) \sqrt{45.80.63}; & 6) \sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}; & 7) \sqrt{13^2-12^2}.
 \end{array}$$

**Bài 3.** Áp dụng quy tắc về căn bậc hai của một thương hãy tính:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{\frac{9}{16} : \frac{0,49}{0,64}}; & 2) \sqrt{\frac{84^2-37^2}{47}}; & 3) \sqrt{\frac{5(38^2-17^2)}{8(47^2-19^3)}}; \\
 4) \sqrt{\frac{11}{9} : 1,44 - \frac{7}{9} : 1,44}; & 5) \frac{\sqrt{180} : \sqrt{5}}{\sqrt{200} : \sqrt{8}}; & 6) \frac{\sqrt{12^5}}{\sqrt{3^5} \cdot \sqrt{4^3}}; \\
 7) \frac{\sqrt{63^3+1}}{\sqrt{63^2-62}}; & 8) \left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}; & \\
 9) (3\sqrt{18} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{72}) : 8\sqrt{2}; & 10) (7\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) : \sqrt{3}.
 \end{array}$$

## DẠNG 2. RÚT GỌN BIỂU THỨC

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll}
 1) 3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{18}; & 2) \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75}; \\
 3) 11 - \sqrt{64} \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} + 2\sqrt{\frac{9}{4}}; & 4) \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}; \\
 5) (\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22}; & 6) 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}.
 \end{array}$$

**Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{3+2\sqrt{2}}; & 2) \sqrt{7-4\sqrt{3}}; & 3) \sqrt{8-2\sqrt{15}}; \\
 4) (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}; & 5) (3-\sqrt{8}) \cdot (2\sqrt{2}+3); & \\
 6) \sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}; & 7) \sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}; &
 \end{array}$$

8)  $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$  ;

9)  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{9-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$  ;

10)  $\sqrt{2+\sqrt[3]{17}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt[3]{17}+(\sqrt[3]{17})^2}$  .

**Bài 6.** Rút gọn các biểu thức sau:

1)  $\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$  ;

2)  $\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-5)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2}$  ;

3)  $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt{4+\sqrt{7}}$  ;

4)  $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$  ;

5)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{\sqrt{21}+\sqrt{35}}$  ;

6)  $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{20}+2}$  ;

7)  $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$  ;

8)  $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{2}+\sqrt{3})$  ;

9)  $\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}}$  ;

10)  $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) : \sqrt{48}$  ;

11)  $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$  ;

12)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{6}-\sqrt{9}-\sqrt{12}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$  .

### DẠNG 3. SO SÁNH

**Bài 7.** So sánh:

a)  $5\sqrt{7}$  và 14;

b)  $\frac{\sqrt{111}}{\sqrt{3}}$  và 6;

c) 14 và  $\sqrt{13} \cdot \sqrt{15}$  ;

d)  $\sqrt{5}+\sqrt{7}$  và  $\sqrt{12}$  ; e)  $\sqrt{3}+\sqrt{7}$  và  $\sqrt{8}+\sqrt{2}$  ;

f)  $\sqrt{2\sqrt{3}}$  và  $\sqrt{3\sqrt{2}}$  ;

g)  $\sqrt{21}-\sqrt{5}$  và  $\sqrt{20}-\sqrt{6}$  ;

h)  $\sqrt{2019}+\sqrt{2022}$  và  $\sqrt{2020}+\sqrt{2021}$  .

**Bài 8.**

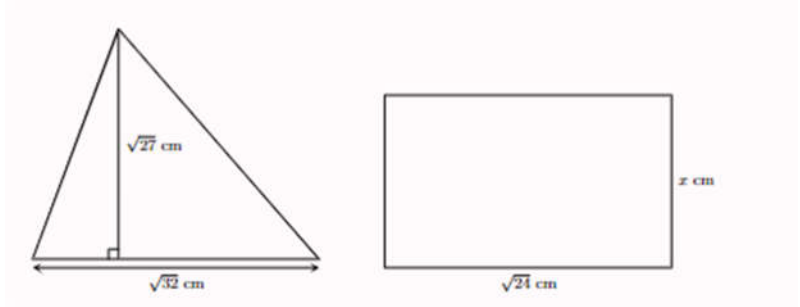
a) Sắp xếp các số  $3\sqrt{5}$  ;  $2\sqrt{6}$  ;  $\sqrt{29}$  ;  $4\sqrt{2}$  theo thứ tự tăng dần.

b) Sắp xếp các số  $4\sqrt{3}$  ;  $\sqrt{50}$  ;  $\sqrt[3]{512}$  ;  $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}}$  ;  $-\sqrt[3]{-729}$  theo thứ tự giảm dần.

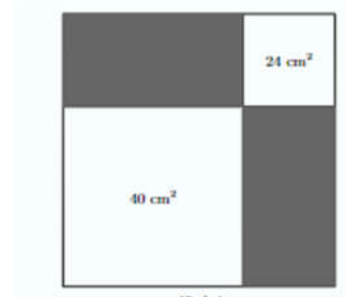
### DẠNG 4. TOÁN THỰC TẾ

**Bài 9.** Công suất  $P(W)$ , hiệu điện thế  $U(V)$ , điện trở  $R(\Omega)$  trong đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức  $U = \sqrt{P.R}$ . Nếu công suất tăng gấp 8 lần điện trở giảm hai lần thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

**Bài 10.** Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở bên có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng  $x$  của hình chữ nhật.



**Bài 11.** Từ một tấm thép ban đầu hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình vuông có diện tích lần lượt là  $24\text{cm}^2$  và  $40\text{cm}^2$  như hình dưới. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép.



**Bài 12.** Người ta cần làm một thùng hình lập phương bằng bìa cứng không có nắp trên và có thể tích  $216\text{dm}^3$  để đựng đồ. Tính diện tích bìa cứng cần dùng để làm thùng đựng đó (coi diện tích các mép nối là không đáng kể).

**BÀI 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC BA CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ**

**A. VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Tính giá trị của  $\sqrt{x^2 - 9}$  tại:

- a)  $x = 5$ ;                      b)  $x = -7$ ;                      c)  $x = \sqrt{10}$ .

**Giải:**

a) Thay  $x = 5$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{16} = 4$ .

b) Thay  $x = -7$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{(-7)^2 - 9} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$ .

c) Thay  $x = \sqrt{10}$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt{(\sqrt{10})^2 - 9} = \sqrt{1} = 1$ .

**Ví dụ 2.** Tìm điều kiện để biểu thức sau có nghĩa.

- a)  $\sqrt{3x-1}$ ;                      b)  $\sqrt{5-3x}$ ;                      c)  $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$ ;                      d)  $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$ .

**Giải:**

a)  $\sqrt{3x-1}$  xác định khi  $3x-1 \geq 0$  hay  $x \geq \frac{1}{3}$ .

b)  $\sqrt{5-3x}$  xác định khi  $5-3x \geq 0$  hay  $x \leq \frac{5}{3}$ .

c)  $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$  xác định khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$  hay  $2 \leq x \leq 4$ .

d)  $\sqrt{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$  xác định khi  $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases}$  hay  $x > 2$ .

**Ví dụ 3.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức bậc ba sau:

- a)  $\sqrt[3]{2023+x}$ ;                      b)  $\sqrt[3]{\frac{2022}{x^2}}$ ;                      c)  $\sqrt[3]{\frac{5}{x-4}}$ .

**Giải:**

a)  $\sqrt[3]{2023+x}$  xác định với mọi số thực  $x$  vì  $2023+x$  xác định với mọi số thực  $x$ .

b)  $\sqrt[3]{\frac{2022}{x^2}}$  xác định với  $x \neq 0$  vì  $\frac{2022}{x^2}$  xác định với  $x^2 \neq 0$  hay  $x \neq 0$ .

c)  $\sqrt[3]{\frac{5}{x-4}}$  xác định với  $x \neq 4$  vì  $\frac{5}{x-4}$  xác định với  $x-4 \neq 0$  hay  $x \neq 4$ .

**Ví dụ 4.** a) Tính giá trị của  $\sqrt[3]{\frac{-x}{5}}$  tại  $x = -135$ ;  $x = 320$ .

b) Tính giá trị của  $\sqrt[3]{\frac{1}{3x+1}}$  tại  $x = 21$ ;  $x = \frac{7}{3}$ .

**Giải:**

a) Thay  $x = -135$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{-(-135)}{5}} = \sqrt[3]{\frac{135}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3$ .

Thay  $x = 320$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{-320}{5}} = \sqrt[3]{-64} = -4$ .

b) Thay  $x = 21$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot 21 + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{64}$

Thay  $x = \frac{7}{3}$  vào biểu thức, ta được:  $\sqrt[3]{\frac{1}{3 \cdot \frac{7}{3} + 1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ .

## B. LUYỆN TẬP

### Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức chứa căn

**Bài 13.** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sqrt{x^2 - xy + 1}$  khi:

a)  $x = 3$ ;  $y = -2$ .

b)  $x = 1$ ;  $y = 4$ .

**Bài 14.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $P = \sqrt[3]{343a^3}$  khi  $a = -1$ .

b)  $P = \sqrt[3]{-512a^3b^6}$  khi  $a = -1$ ;  $b = 2$ .

c)  $P = \sqrt[3]{-64a^9b^9}$  khi  $a = -1$ ;  $b = -2$ .

d)  $P = \sqrt[3]{\frac{343a^3b^6}{-216}}$   $a = -1$ ;  $b = 1$ .

### Dạng 2. Tìm điều kiện để căn bậc hai và căn bậc ba có nghĩa

* $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$	* $\sqrt{A^2}$ có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$
* $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$	* $\frac{1}{\sqrt{A^2}}$ có nghĩa khi $A \neq 0$

**Lưu ý:**

\*  $A^2 \geq 0$ , mọi  $A \in \mathbb{R}$

\*  $A^2 > 0$ , mọi  $A \neq 0$

**Bài 15.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức sau:

a)  $\sqrt{x-3}$ ;

b)  $\sqrt{7-2x}$ ;

c)  $\sqrt{\frac{-5}{3-2x}}$ ;

d)  $\sqrt{x(x+2)}$ ;

e)  $\sqrt{4-x^2}$ ;

f)  $\sqrt{\frac{2-3x}{x-3}}$ ;

g)  $\frac{1}{\sqrt{8x-x^2-15}}$ ;

h)  $\sqrt{x^2+3}$ ;

i)  $\sqrt{\frac{16+x^2}{2x+1}} + \sqrt{x^2-8x+17}$

**Bài 16.** Chứng minh các biểu thức sau luôn có nghĩa với mọi  $x$ .

a)  $\sqrt{9x^2-6x+1}$ ;

b)  $\frac{1}{\sqrt{5x^2+4}}$ .

**Bài 17.** Tìm điều kiện xác định cho mỗi căn thức sau:

a)  $\sqrt[3]{5x^3-11}$ ;

b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ ;

c)  $\sqrt[3]{\frac{11}{x-1}}$ .

**Bài 18.** Cho biểu thức  $A = \sqrt{5-2x}$ .

a) Với giá trị nào của  $x$  thì biểu thức  $A$  xác định?

b) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = -2$  và  $x = -3$ .

### DẠNG 3. ỨNG DỤNG

**Bài 19.** Công thức  $h = 0,4\sqrt[3]{x}$  biểu diễn mối liên hệ giữa cân nặng  $x$  (kg) và chiều cao  $h$  (m) của một con hươu cao cổ ở tuổi trưởng thành (Nguồn: J.Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, McFarland, năm 2017).

a) Một con hươu cao cổ nặng 180 kg thì cao bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,56 m thì nặng bao nhiêu ki-lô-gam? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

**Bài 20.** Thời gian  $t$  (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy bungee trên cao cách mặt nước  $d$

(m) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức  $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$ .

a) Tìm thời gian một người nhảy bungee từ vị trí cao cách mặt nước 108m đến khi chạm mặt nước?

b) Nếu một người nhảy bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây thì độ cao ban đầu của người đó so với mặt nước là bao nhiêu?

**Bài 21.** Điện áp  $V$  (volt) yêu cầu cho một mạch điện được cho bởi

công thức  $V = \sqrt{PR}$ , trong đó  $P$  (watt) là công suất và  $R$  (ohm) là điện trở.



- a) Cần bao nhiêu volt để thắp sáng một bóng đèn A có công suất 100 watt và điện trở của mỗi bóng đèn là 110 ohm?
- b) Bóng đèn B có điện áp bằng 110 volt, điện trở trong là 88 ohm có công suất lớn hơn bóng đèn A không? Vì sao?

**Bài 22.** Tốc độ của một chiếc cano và độ dài đường sóng để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức  $v = 5\sqrt{d}$ . Trong đó d (mét) là độ dài đường nước sau đuôi cano, v (mét/giây) là tốc độ của cano.



- a) Một cano đi từ Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài  $7 + 4\sqrt{3}$  m. Hỏi tốc độ của cano là bao nhiêu?
- b) Khi cano chạy với vận tốc 54 km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc cano dài bao nhiêu mét?

**Bài 23.** Vận tốc v (m/s) của một tàu lượn di chuyển trên một cung tròn có bán kính r (m) được cho bởi công thức:  $v = \sqrt{ar}$ . Trong đó a ( $m/s^2$ ) là gia tốc của tàu (gia tốc là đại lượng vật lý đặc trưng cho sự thay đổi của vận tốc theo thời gian).



- a) Nếu tàu lượn đang chạy với vận tốc  $v = 14$  m/s và muốn đạt được mức gia tốc tối đa cho phép là  $a = 9$  m/s<sup>2</sup> thì bán kính tối thiểu của cung tròn phải là bao nhiêu để xe không văng ra khỏi đường ray?
- b) Nếu tàu lượn đang di chuyển với vận tốc  $v = 8$  m/s xung quanh một cung tròn có bán kính  $r = 25$  m thì có gia tốc tối đa cho phép là bao nhiêu?

**BÀI 4. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC BẬC HAI CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ**

**A. VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{(x-1)^2}$  với  $x \geq 1$ ;

b)  $\sqrt{a^6}$  với  $a < 0$ ;

c)  $\sqrt{(x-2)^2}$  với  $x < 2$ ;

d)  $\sqrt{a^4}$ .

**Giải:**

a)  $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$  (do  $x \geq 1$ )

b)  $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$  (do  $a < 0$ )

c)  $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2-x$  (do  $x < 2$ )

d)  $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = |a^2| = a^2$  (do  $a^2 \geq 0$ )

**Ví dụ 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \sqrt{4a^2}$ ;

b)  $B = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$  với  $a > 0$ .

**Giải:**

a)  $A = \sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = 2|a|$ .

b)  $B = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} = \sqrt{2a \cdot 8a} = \sqrt{16a^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2} = 4|a| = 4a$  (vì  $a > 0$ ).

**Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức sau:  $A = \frac{3x}{7y} \cdot \sqrt{\frac{49y^2}{9x^2}}$  với  $x > 0, y < 0$ .

**Giải:**

$$A = \frac{3x}{7y} \cdot \sqrt{\left(\frac{7y}{3x}\right)^2} = \frac{3x}{7y} \cdot \frac{|7y|}{|3x|} = \frac{3x}{7y} \cdot \frac{7|y|}{3|x|}$$

Do  $x > 0, y < 0$  nên  $|y| = -y; |x| = x$ .

Vậy  $A = \frac{3x}{7y} \cdot \frac{-7y}{3x} = -1$

**Ví dụ 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \sqrt{(x-3)^2} - x$  ( $x \geq 3$ );

b)  $B = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}$  ( $x \geq 1$ ).

**Giải:**

a)  $A = \sqrt{(x-3)^2} - x$  ( $x \geq 3$ )

$$A = |x - 3| - x$$

Do  $x \geq 3$  nên  $|x - 3| = x - 3$

Vậy  $A = |x - 3| - x = x - 3 - x = -3$

b)  $C = \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$

$$C = \sqrt{2x + 2\sqrt{(x+1)(x-1)}}$$

$$C = \sqrt{x+1 + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} + x-1}$$

$$C = \sqrt{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}$$

$$C = |\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}|$$

Do  $x \geq 1$  nên  $x+1 > x-1 \Rightarrow \sqrt{x+1} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 0$

Vậy  $C = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ .

**Ví dụ 5.** Khử mẫu của các biểu thức lấy căn sau:

a)  $\sqrt{\frac{3}{2x^3}}$  với  $x > 0$ ;

b)  $\frac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}}$  với  $x < 0$ ;

c)  $\frac{2024}{\sqrt{x-25}}$  với  $x > 25$ ;

d)  $\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

**Giải:**

a)  $\sqrt{\frac{3}{2x^3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2x^3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2x^3} \cdot \sqrt{2x^3}} = \frac{3}{2x^3}$  (do  $x > 0$ ).

b)  $\frac{\sqrt{28x^6}}{\sqrt{7x^4}} = \sqrt{\frac{28x^6}{7x^4}} = \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2|x| = -2x$  (do  $x < 0$ ).

c)  $\frac{2024}{\sqrt{x-25}} = \frac{2024 \cdot \sqrt{x-25}}{\sqrt{x-25} \cdot \sqrt{x-25}} = \frac{2024 \cdot \sqrt{x-25}}{x-25}$ .

d)  $\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+1)}{1-\sqrt{x}} = x + \sqrt{x} + 1$ .

## B. BÀI TẬP

### DẠNG 1. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

**Bài 24.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $4\sqrt{16a^2} - 16a$  với  $a \leq 0$ ;

b)  $\sqrt{64a^2} + 3a$  với  $a \geq 0$ ;

c)  $\sqrt{(a-1)^2}$  với  $a \geq 1$ ;

d)  $4x + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  với  $x \geq 1$ ;

e)  $3x - \sqrt{9 - 6x + x^2}$  với  $x \geq 3$ ;

f)  $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$  với  $x \neq 2$ .

### DẠNG 2. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH VÀ THƯƠNG

**Bài 25.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{4x^2y}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$ ;

b)  $\sqrt{36a^2b}$  với  $a < 0; b \geq 0$ ;

c)  $\sqrt{27.48(1-a)^2}$  với  $a > 1$ ;

d)  $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$  với  $a \geq 0$ ;

e)  $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$  với  $y > 0$ ;

f)  $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3^5}}$  với  $x > 0$ .

**Bài 26.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{15a} \cdot \sqrt{3a}, a > 0$ ;

b)  $\sqrt{8a.5ab.10b^3}$ ;

c)  $\frac{\sqrt{3ab^4}}{\sqrt{27a}}, a > 0$ ;

d)  $\sqrt{\frac{a^2}{4b^4}}, a \geq 0; b \neq 0$ ;

e)  $\frac{\sqrt{2a^2(1-a)^2}}{\sqrt{50}}, a > 1$ ;

f)  $\sqrt{a^2} + \sqrt{(3-a)^2}, 0 < a < 3$ .

**Bài 27.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 1}$  với  $a \geq 0; a \neq 1$ ;

b)  $B = \frac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$  với  $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$ ;

c)  $C = \frac{a^2 - 5}{a + \sqrt{5}}, a \neq -\sqrt{5}$ ;

d)  $D = \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}, a \geq 0$ ;

e)  $E = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$ ;

f)  $F = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy} + y}$  với  $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$ .

**Bài 28.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 1}$  với  $a \geq 0; a \neq 1$ ;

b)  $B = \frac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$  với  $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$ ;

c)  $C = \frac{a^2 - 5}{a + \sqrt{5}}, a \neq -\sqrt{5}$ ;

d)  $D = \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}, a \geq 0$ ;

e)  $E = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y}$  với  $x \geq 0; y \geq 0$ ;

f)  $F = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy} + y}$  với  $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$ .

### DẠNG 3. TRỰC CĂN THỨC

**Bài 29.** Trục căn thức ở mẫu biểu thức sau: (a, b, x, y là những số dương)

a)  $\frac{a}{\sqrt{ab}}$ ;

b)  $\frac{x}{\sqrt{3x^3}}$ ;

c)  $\frac{4y^2}{\sqrt{2y^5}}$ ;

d)  $\frac{2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ;

e)  $\frac{3}{2\sqrt{a} + 1}$ ;

f)  $\frac{2xy}{2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}$ .

**Bài 30.** Chứng minh rằng

a)  $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$  (a, b > 0);

b)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + b}{a - b}$  (a, b ≥ 0; a ≠ b);

c)  $\frac{(a\sqrt{b} + b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \cdot \frac{\sqrt{ab + b^2 - 2\sqrt{ab^3}}}{\sqrt{a(a + 2\sqrt{b}) + b}} = b$  (a, b > 0).

**Bài 31. (SBT-CD)** Cho biểu thức:  $M = \frac{1}{2\sqrt{x} - 2} - \frac{1}{2\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tính giá trị của biểu thức M tại  $x = \frac{4}{9}$ .

c\*) Tìm giá trị của x để  $|M| = \frac{1}{3}$ .

**Bài 32. (SBT-CD)** Cho biểu thức:  $N = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ .

a) Rút gọn biểu thức N.

b\*) Tìm giá trị nhỏ nhất của N.

**CHUYÊN ĐỀ. RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN**

**DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC KHI CHO TRƯỚC GIÁ TRỊ BIẾN SỐ.**

**Bài 33.** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

a) Tính P khi  $x = \frac{4}{9}$ .

c) Tính P khi  $|x-3|=4$ .

b) Tính P khi  $x^2 - 5x + 4 = 0$ .

d) Tính P khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .

**Bài 34.** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}-1}$  với  $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}$ .

a) Tính A khi  $x = 25$ .

c) Tính A khi  $x = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$ .

b) Tính A khi  $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ .

**DẠNG 2: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**

**Bài 35.** Tìm giá trị của x thỏa mãn:

a)  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{2}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 4$ )

d)  $\frac{x+3}{4+5\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

b)  $\frac{2\sqrt{x}-3}{5-\sqrt{x}} = \frac{-4}{9}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 25$ )

e)  $\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 1$ )

c)  $\frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 2$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

f)  $\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{13}{3}$  (ĐK:  $x > 0$ )

**Bài 36. (SBT-CD)** Cho  $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm giá trị của x để  $A = \frac{1}{2}$ .

b) Tính giá trị biểu thức A tại  $x=121$ .

d) Tìm giá trị của x để  $A = \sqrt{x} - 1$ .

**Bài 37.** Cho biểu thức:  $H = \left( \frac{3\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{x+\sqrt{x}}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức H;

b) Tính H khi  $x = 9 - 4\sqrt{5}$ ;

c) Tìm các giá trị của x thỏa mãn  $2H - x = 3$ .

**Bài 38.** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0; x \neq 1$ .

a) Chứng minh rằng:  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ ;

b) Tìm x sao cho  $P = \frac{5}{3}$ ;

c) Tìm x sao cho:  $2P = 2\sqrt{x} + 5$ .

### DẠNG 3: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

**Bài 39.** Tìm các giá trị của x thỏa mãn :

a)  $\frac{-2}{3-\sqrt{x}} \leq 0$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 9$ )

g)  $\frac{x-7\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} \leq -1$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

b)  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \geq \frac{2}{3}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 4$ )

h)  $\frac{x-3\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+2} > 1$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

c)  $\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \leq 1$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

i)  $\frac{x+15}{\sqrt{x}-1} > 10$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 1$ )

d)  $\frac{x-1}{\sqrt{x}-2} < 1$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 4$ )

k)  $\frac{6}{\sqrt{x}-3} < 1$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 9$ )

e)  $\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \leq 0$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 4$ )

l)  $\frac{1}{\sqrt{x}-2} \geq 4-\sqrt{x}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 4$ )

**Bài 40.** a) Tìm x là số nguyên để  $\frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3} \leq \frac{3}{2}$ ;

b) Tìm x là số nguyên, lớn nhất để  $\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-5} < 1$ ;

c) Tìm x là số nguyên, lớn nhất để  $\frac{5\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-5} < 2$ .

**Bài 41.** a) Cho biểu thức  $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$  (ĐK:  $x \geq 0$ ). Tìm x để  $|Q|=Q$ .

b) Cho biểu thức  $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 1$ ). Tìm x để  $|M|+M=0$ .

c) Cho biểu thức  $P = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$  (ĐK:  $x \geq 0; x \neq 1$ ). Tìm x để  $|P|>P$ .

**Bài 42.** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ . Tìm x để biểu thức  $\sqrt{A} \leq \frac{2}{3}$ .

**Bài 43.** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ , với  $x \geq 0$  và  $x \neq 25$ .

a) Rút gọn biểu thức A (Đáp án:  $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}$ );

b) Tìm x nguyên lớn nhất để  $A < \frac{1}{3}$ ;

c) Tìm x nguyên nhỏ nhất để  $\sqrt{A} > \frac{2}{3}$ .

**DẠNG 3: CHỨNG MINH; SO SÁNH.**

**Bài 44.**

a) Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$  ( $x \geq 0$ ). So sánh A với  $\frac{-4}{3}$ .

b) Cho biểu thức:  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$  ( $x \geq 0$ ). So sánh B với 1.

c) Cho biểu thức:  $C = \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$  ( $x \geq 0$ ). So sánh C với 1.

e) Cho biểu thức:  $E = \frac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+4}$  ( $x \geq 0$ ). So sánh E với  $\frac{1}{5}$ .

g) Cho biểu thức:  $G = \frac{5x+2\sqrt{x}+1}{x}$  ( $x > 0$ ). So sánh G với 5.

**Bài 45.** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0$ .

a) So sánh P với  $\frac{1}{3}$ .

c) So sánh P và  $P^2$

b) P với  $|P|$

d) P và  $\sqrt{P}$

**Bài 46.** Cho biểu thức:  $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ .

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{1}{2}$ .

c) Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$ .

**Bài 47.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \text{ và } B = \left( \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-2}{x+3\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 49$ .

b) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$ .

c) Với  $P = A \cdot B$ , so sánh biểu thức P với 1 khi  $0 < x < 4$ .

(Đề kiểm tra HK2 toán 9 – Hệ thống giáo dục Archimedes School – Năm học 2021 / 2022)

#### DẠNG 4. TÌM X NGUYÊN ĐỂ BIỂU THỨC ĐẠT GIÁ TRỊ NGUYÊN

**Bài 48.** Tìm các giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức sau nhận giá trị nguyên.

a)  $A = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$

b)  $D = \frac{5\sqrt{x}+15}{5\sqrt{x}}$

c)  $C = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

d)  $P = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2}$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

e)  $P = \frac{x-5}{\sqrt{x}+3}$  (ĐK:  $x \geq 0$ )

**Bài 49.** a) Tìm x là số tự nhiên lớn nhất để  $\frac{2\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}$  nhận giá trị nguyên.

b) Tìm x là số nguyên để  $\frac{3\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+1}$  nhận giá trị nguyên, lớn nhất.

**Bài 50.** Tìm tất cả số nguyên x để biểu thức sau đạt giá trị nguyên:  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}-1}$ .

**Bài 51.** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm  $a \in \mathbb{Z}$  để P nguyên.

#### DẠNG 5. TÌM X ĐỂ BIỂU THỨC ĐẠT GIÁ TRỊ NGUYÊN

**Bài 52. (SBT-CD)** Cho biểu thức:  $P = \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5-\sqrt{x}}{x-1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại  $x = 4$ .

c\*) Tìm giá trị của x để P có giá trị là số nguyên.

**Bài 53. (SBT-CD)** Cho biểu thức:  $B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$  với  $x > 0$ .

a) Rút gọn biểu thức B

b\* ) Tính giá trị của biểu thức B tại  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

c\* ) Tìm giá trị của  $x \in \mathbb{N}^*$  để B có giá trị là số nguyên.

**Bài 54.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{7}{\sqrt{x} + 8}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2\sqrt{x} - 24}{x - 9}$  với  $x \geq 0, x \neq 9$ .

a) Tính giá trị của A khi  $x = 25$ ;                      b) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3}$ ;

c) Tìm x để  $P = A.B$  có giá trị nguyên.            (Đề HK2 – THCS Hạ Đình – 2021 - 2022)

**Bài 55.** Tìm các giá trị của x để mỗi biểu thức sau nhận giá trị nguyên.

a)  $A = \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$  với ( $x \geq 0$ );                      c)  $C = \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$  với ( $x \geq 0$ );

b)  $B = \frac{5\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 1}$  với ( $x \geq 0$ );                      d)  $D = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$  với ( $x \geq 0$ ).

### DẠNG 6. TÌM GTLN; GTNN CỦA BIỂU THỨC

**Bài 56.** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a)  $A = x - 2\sqrt{x}$ ;                      b)  $B = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4)$ ;                      c)  $C = x - \sqrt{x} + 1$ ;  
d)  $C = \frac{2\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x} + 1}$ ;                      e)  $L = \frac{x + 2}{\sqrt{x}}$ ;                      f)  $K = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{x}$ ;  
g)  $I = \frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{x}$ ;                      f)  $M = \frac{x + 5}{\sqrt{x} + 2}$ ;                      i)  $R = \frac{x + 4\sqrt{x} + 12}{\sqrt{x} + 3}$ .

**Bài 57.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a)  $A = \frac{3}{2\sqrt{x} + 5}$ ;                      b)  $A = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 3}$ ;                      c)  $B = \frac{2\sqrt{x} + 9}{\sqrt{x} + 2}$ ;  
d)  $C = \frac{2\sqrt{x} + 11}{3\sqrt{x} + 2}$ ;                      e)  $D = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ ;                      f)  $E = -x + 2\sqrt{x} - 9$ ;  
g)  $F = (\sqrt{x} - 1) \cdot (3 - \sqrt{x})$ ;                      h)  $F = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + 1}$ .

**Bài 58. (SBT-CD)** Cho  $C = \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tìm giá trị lớn nhất của C.

c) Tìm giá trị của  $x$  để  $C$  có giá trị là số dương.

**Bài 59.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

a) Tính giá trị biểu thức  $B$  khi  $x = 4$ .  
b) Chứng minh rằng  $\frac{A}{B} = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

c) Với  $x > 1$ . Tìm GTNN của biểu thức  $P = \frac{A}{B} + 2018$ .

(Đề kiểm tra HK2 – Huyện Chương Mỹ - Năm học 2021 / 2022)

**Bài 60.** Cho hai biểu thức:  $P = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}+5}{9-x}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 9$ .

1) Tính giá trị của biểu thức  $P$  khi  $x = 4$ .  
2) Chứng minh rằng  $Q = \frac{x+2}{x-9}$ .

3) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để biểu thức  $A = P \cdot Q$  đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề khảo sát toán 9 – Quận Long Biên – Ngày 06/05/2022)

### BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Bài 61.** Cho hai biểu thức:

$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$  với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ .

a) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 25$ .  
c) Tìm số tự nhiên  $x$  để  $P < 0$ .

b) Rút gọn biểu thức  $P = \frac{A}{B}$ .  
(GKI-THCS Nguyễn Công Trứ 2022-2023)

**Bài 62.** Cho hai biểu thức:

$A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$  và  $B = \left( \frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$  với  $x \geq 0; x \neq 25$ .

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ ;  
b) Chứng minh  $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ ;

c) Đặt  $P = A - 6B$ . Tìm giá trị  $x$  nguyên lớn nhất để  $P < 0$ .

(GKI- THCS Ngọc Thụy 2022-2023)

**Bài 63.** Cho biểu thức:  $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ .

a) Rút gọn  $A$ .  
c) Tìm  $a$  để  $A = 2$ .

b) Biết  $a > 1$ , hãy so sánh  $A$  với  $|A|$ .  
d) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$ .

**Bài 64.** Với  $x \geq 0, x \neq 4$ , cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ .

- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 9$ .
- Rút gọn biểu thức B.
- Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để biểu thức B có giá trị nguyên.
- Cho biểu thức  $P = \frac{1}{AB}$ . Với  $x \in \mathbb{Z}$ , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P.

**Bài 65.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ ;  $B = \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+5}{x-1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 16$ .
- Rút gọn biểu thức B.
- Xét biểu thức  $K = A.B$ . Tìm tất cả giá trị của x thỏa mãn  $K \leq 4$ .

**Bài 66.** Với  $x > 0, x \neq 4$ , cho hai biểu thức:

$$A = \frac{x-7}{\sqrt{x}} \text{ và } B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-3\sqrt{x}+6}{x-4}.$$

- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 9$ .
- Rút gọn biểu thức B.
- Tìm x biết  $B = \frac{2}{3}$ .
- Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để biểu thức  $P = A.B$  có giá trị nguyên.

**Bài 67.** Với  $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$ , cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} + \frac{7-\sqrt{x}}{x-1}$ .

- Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 16$ .
- Chứng minh  $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ .
- Tìm tất cả giá trị của x để  $\frac{4A}{B} \leq \frac{x}{\sqrt{x}-3}$ .

**Bài 68.** Với  $x \geq 0, x \neq 4$  và  $x \neq 9$ , cho hai biểu thức:

$$P = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \text{ và } Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}.$$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi  $x = 64$ .

b) Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ .

c) Với  $x \in \mathbb{Z}$ , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $K = Q.(P-1)$ .

**Bài 69.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{x+2\sqrt{x}}{x-1}$  và  $B = \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x(\sqrt{x}+1)}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

a) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 25$ .

b) Rút gọn biểu thức  $P = \frac{A}{B}$ .

c) Tìm số nguyên  $x$  nhỏ nhất thỏa mãn  $P > 1$ .

d) Tìm số tự nhiên  $x$  để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

e) Khi  $x > 1$ , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

**Bài 70.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{x-4} \text{ và } B = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

a) Tính giá trị biểu thức B khi  $x = 9$ .

b) Chứng minh rằng  $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ .

c) Tìm các số nguyên  $x$  thỏa mãn  $|B| = -B$ .

d) Tìm số tự nhiên  $x$  để biểu thức A đạt giá trị lớn nhất.

e) Cho biểu thức  $P = A : B$ , so sánh P và  $\sqrt{P}$ .

**Bài 71.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \text{ và } B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{6-7\sqrt{x}}{x-4} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$ . b) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

c) Cho biểu thức  $P = A \cdot B$ . Tìm các số nguyên tố  $x$  thỏa mãn  $P < 1$ .

(Thi thử vào 10 – THCS Giảng Võ – Quận Ba Đình – Ngày 18/05/2022)

**Bài 72.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$  và  $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ .

a) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 9$ .

b) Chứng minh rằng  $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$ .

c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của  $x$  để  $5A + B \leq 3$ .

(Thi thử vào 10 – Nguyễn Công Trí + Nguyễn Trãi + Ba Đình + Thống Nhất – 03/06/2022)

**Bài 73.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \text{ và } B = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{x + 2\sqrt{x}}{x + 4} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 9$ .

b) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ .

c) Tìm các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $A \cdot B \geq 2\sqrt{x} - 3$ .

d) Tìm các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $A = -\frac{3}{10}$ .

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

**Bài 74.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{2}$  với  $x \geq 0$ ;  $x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức B tại  $x=16$ .

b) Cho  $P = A \cdot B$ . Rút gọn P.

c) So sánh P với 1.

c) Tìm các giá trị của  $x$  để biểu thức 2P nhận giá trị nguyên.

(HK1- THCS Lý Thường Kiệt 2021-2022)

**Bài 75.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 25.$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 49$ .

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Biết  $M = A : B$ . Tìm số tự nhiên  $x$  lớn nhất sao cho  $M < 1$ .

(Khảo sát toán 9 – THCS Trưng Nhị - Ngày 03/06/2022)

**Bài 76.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{4x}{x - 4} \text{ và } B = \frac{4(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - 2} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

a) Tính giá trị của biểu thức B tại  $x = 9$ .

b) Chứng minh rằng  $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ .

c) Cho  $P = \frac{A}{B}$ . So sánh P và  $\sqrt{P}$ .

(Đề kiểm tra giữa HK2 – THCS Cát Linh – Hà Đông – Ngày 11/03/2022)

**Bài 77.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{5}{\sqrt{x} + 1} - \frac{8\sqrt{x} - 6}{x - 1} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 9$ .      c) Tìm các giá trị của x để  $\frac{A}{B} = \frac{4}{3}$ .

b) Rút gọn biểu thức B.

**Bài 78.** Cho các biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4 \text{ và } x \neq 9.$$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 49$ . 2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm số nguyên x để biểu thức  $Q = \frac{B}{A}$  nhận giá trị nguyên.

(Đề kiểm tra HK1 – THCS Thăng Long – Quận Ba Đình – Ngày 31/12/2021)

**Bài 79.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$  và  $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{5x + 4}{x - 4}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ .

a) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 25$ .

b) Rút gọn biểu thức P, biết  $P = A + B$ .

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

(Thi thử vào 10 – THCS Đoàn Thị Điểm – Năm học 2022 / 2023)

**Bài 80.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \text{ và } B = \frac{x}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4.$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi  $x = 25$ .

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = A \cdot B$

(Đề kiểm tra HK2 – Huyện Gia Lâm – Năm học 2021 / 2022)

**Bài 81.** Cho hai biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} + \frac{x + 9\sqrt{x}}{9 - x}$  và  $B = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 9$ .

a) Tính giá trị của biểu thức B khi  $x = \frac{4}{25}$ .

b) Rút gọn biểu thức A.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = A \cdot B$  với  $x$  là số tự nhiên.

(Thi thử vào 10 – THCS Nghĩa Tân – Quận Cầu Giấy – Ngày 05/04/2022)

**Bài 82.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}-3}{x-\sqrt{x}+1} \text{ và } B = \left( \frac{3\sqrt{x}+6}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+3} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 9).$$

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 4$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Cho biểu thức  $P = A \cdot B$ . Chứng minh  $|P| = P$ .

d) Tìm  $x$  nguyên để  $P$  nguyên.

(GK1- Lê Quý Đôn – 2020-2021)

**Bài 83.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}; \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-13}{x-2\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9$$

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = \frac{1}{4}$

b) Chứng minh:  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

c) Cho  $P = \frac{A}{B}$ . Tìm tất cả các số tự nhiên  $x$  để  $P \leq 1$ .

(GK 1- THCS Tô Hoàng)

**Bài 84.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{2-\sqrt{x}} - \frac{7\sqrt{x}-6}{x-4} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4.$$

1) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 16$ .

2) Cho biểu thức  $P = \frac{B}{A}$ . Chứng minh rằng  $P = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ .

3) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để biểu thức  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề kiểm tra giữa HK2 – THCS Giảng Võ – Quận Ba Đình – Ngày 11/04/2022)

**Bài 85.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3} \text{ và } B = \left( \frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0; x \neq 9.$$

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 16$ .

b) Chứng minh rằng  $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$ .

c) Tìm số nguyên  $x$  lớn nhất thỏa mãn  $B > \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ .

d) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{A}{B}$ .

e) Tìm số nguyên  $x$  để biểu thức  $A$  nhận giá trị nguyên.

**Bài 86.** Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \text{ và } B = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{x}{x-2\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1; x \neq 4.$$

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 7 + 4\sqrt{3}$ .

b) Rút gọn biểu thức  $P = B : A$ .

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  $x$  để  $P\sqrt{x} \geq -\frac{3}{2}$ .

**CHƯƠNG V. ĐƯỜNG TRÒN**

**I/ ÔN TẬP HÌNH HỌC**

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) có hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau  $H$ .

- Chứng minh bốn điểm  $B, D, C, E$  cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm  $I$  của đường tròn này.
- Chứng minh  $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ .
- Gọi  $K$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $I$ . Chứng minh tứ giác  $BHCK$  là hình bình hành.
- Xác định tâm  $O$  của đường tròn đi qua các điểm  $A, B, K, C$ .
- Chứng minh  $OI$  và  $AH$  song song và  $AH = 2OI$ .
- Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $H, G, O$  thẳng hàng và  $HG = 2GO$ .
- Giả sử  $B, C$  cố định điểm  $A$  di động trên đường tròn  $(O; R)$ . Khi đó tìm tập hợp điểm  $H$  và điểm  $G$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Kẻ tiếp tuyến  $Ax$ , lấy  $P$  trên  $Ax$  ( $AP > R$ ). Từ  $P$  kẻ tiếp tuyến  $PM$  với  $(O)$

- Chứng minh bốn điểm  $A, P, M, O$  cùng thuộc một đường tròn
- Chứng minh:  $OP \perp AM$ .
- Chứng minh:  $BM \parallel OP$
- Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt tia  $BM$  tại  $N$ . Chứng minh tứ giác  $OBPN$  là hình bình hành
- Giả sử  $AN$  cắt  $OP$  tại  $K$ ;  $PM$  cắt  $ON$  tại  $I$ ;  $PN$  cắt  $OM$  tại  $J$ . Chứng minh  $I, J, K$  thẳng hàng.

**Bài 3. GKI- LƯƠNG THẾ VINH 2024**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ). Gọi  $O$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , vẽ các đường thẳng  $a$  và  $b$  sao cho  $a \perp BC$  tại  $B$ ,  $b \perp BC$  tại  $C$ . Đường thẳng  $c \perp OA$  tại  $A$  cắt các đường thẳng  $a$  và  $b$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

- Chứng minh các điểm  $A, C, O, N$  cùng thuộc một đường tròn, chỉ rõ tâm  $K$  và bán kính của đường tròn này.
- Gọi  $D$  là giao điểm của  $OM$  và  $AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $ON$  và  $AC$ . Chứng minh tứ giác  $ADOE$  là hình chữ nhật và  $AM \cdot AN = \frac{BC^2}{4}$ .
- Gọi  $F$  là giao điểm của  $AC$  với đường thẳng  $a$ ,  $I$  là giao điểm của  $OF$  với  $AB$  và  $H$  là giao điểm của  $OM$  với  $BN$ . Chứng minh  $IH \parallel a$ .

**Bài 4.** Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R, vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của BC và OA. Vẽ đường kính BD của đường tròn (O)

a) Chứng minh: bốn điểm A, B, O, C thuộc cùng một đường tròn.

b) Chứng minh: H là trung điểm của BC, từ đó suy ra  $OH.OA = \frac{BC^2}{4}$ .

c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt tia AC tại G. Chứng minh:  $\triangle AOG$  vuông và  $AB.GD = R^2$ .

d) Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu thì diện tích tứ giác ABDG là nhỏ nhất.

**Bài 5.** Cho nửa đường tròn (O), đường kính  $AB = 2R$ . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AB vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Từ một điểm C bất kì thuộc nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ 3, tiếp tuyến này cắt Ax tại M và cắt By tại N.

a) Chứng minh: bốn điểm A, M, O, C thuộc 1 đường tròn.

b) Gọi giao điểm của AN và BM là I. Chứng minh  $CI \parallel BN$ .

c) CI cắt AB tại H. Chứng minh I là trung điểm của CH.

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác AMNB là nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

**Bài 6.** Cho đường tròn (O; R) và dây AB. Từ O kẻ OI vuông góc với AB, đường thẳng này cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở điểm M.

a) Chứng minh MB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Chứng minh 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

c) Cho  $\widehat{AMB} = 60^\circ$  và bán kính  $R = 5\text{cm}$ . Tính diện tích tam giác MAB.

d) Đường thẳng đi qua A vuông góc với MB tại K cắt OM tại H. Chứng minh hệ thức:  $AI.AB + MH.MI = MA^2$ .

**Bài 7.** Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M bất kì trên đường thẳng  $d \perp OA$  tại A, vẽ các tiếp tuyến MB, MC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Dây BC cắt OM, OA lần lượt tại H và K.

a) Chứng minh 4 điểm A, K, H, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức:  $OH.OM = OK.OA = R^2$ .

c) Tính diện tích tứ giác MBOC biết  $R = 3\text{cm}$  và  $\widehat{BOM} = 60^\circ$ .

d) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác MBOC nhỏ nhất.

**Bài 8.** Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại I ( $IA < IB$ ). Gọi E là giao điểm của hai tia DA, BC và H là hình chiếu của E trên đường thẳng AB.

- a) Chứng minh rằng: 4 điểm A, E, C, H cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng:  $EA \cdot ED = EB \cdot EC$ .
- c) Cho biết  $IB = 6\text{cm}$ ;  $\widehat{CAB} = 60^\circ$ . Tính diện tích tứ giác ACBD.
- d) Chứng minh rằng: HC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Bài 9.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính  $AB=2R$ . Vẽ các tiếp tuyến Ax,By với nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi C là điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn (C khác A và B). Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại M và N.

- a) Chứng minh các điểm A,M,C,O cùng thuộc một đường tròn.
- b) AC cắt OM tại H, BC cắt ON tại K. Tứ giác HCKO là hình gì?
- c) Chứng minh  $MH \cdot HO + OK \cdot KN = R^2$ .
- d) BM cắt HK tại I. Chứng minh CI vuông góc với AB.

**Bài 10.** Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi E là trung điểm của AO, vẽ dây CD vuông góc với AB tại E. Gọi K là giao điểm của DO và BC.

1. Chứng minh rằng tứ giác ACOD là hình thoi.
2. Chứng minh rằng các điểm C, E, O, K cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh  $DO \cdot DK = 2DE^2$ .
4. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OKB$ .

## BÀI 4. GÓC Ở TÂM. GÓC NỘI TIẾP

### A. VÍ DỤ MẪU

**Ví dụ 1.** Tứ giác ABCD có  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ . Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và  $AD < BC$ .

#### Lời giải

Gọi O là trung điểm của BC.

Xét  $\triangle ABC$  vuông tại A ( $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ) có

AO là đường trung tuyến

$$\text{Suy ra } AO = \frac{1}{2}BC$$

Hay  $OA = OB = OC$

Khi đó A, B, C nằm trên đường tròn (O) đường kính BC.

Tương tự, bằng cách xét tam giác DBC ta cũng suy ra D, B, C nằm trên đường tròn (O) đường kính BC và AD là một dây (không đi qua tâm) của đường tròn (O).

Suy ra  $AD < BC$  (vì đường kính BC là dây lớn nhất của đường tròn (O)).

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn và  $AD < BC$ .

**Ví dụ 2.** Cho tam giác cân ABC có  $\widehat{A} = 40^\circ$ . Đường tròn đường kính AB cắt BC tại D (khác B).

a) Chứng minh rằng D là trung điểm của BC.

b) Tính số đo của cung nhỏ AD.

#### Lời giải

a) Gọi O là tâm của đường tròn đường kính AB.

Ta có:  $\widehat{ADB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra  $AD \perp BC$

Xét  $\triangle ABC$  cân tại A có

AD là đường cao (do  $AD \perp BC$ )

Suy ra AD là đường trung tuyến

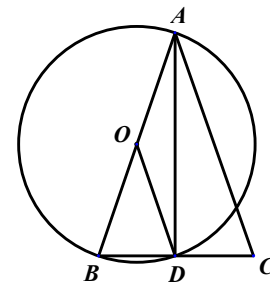
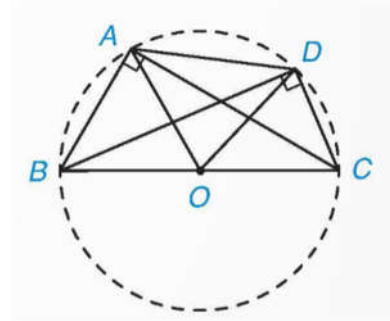
Vậy D là trung điểm của BC.

b) Xét  $\triangle ABC$  có

O là trung điểm của AB (do O là tâm của đường tròn đường kính AB)

D là trung điểm của BC (chứng minh trên)

Suy ra OD là đường trung bình của  $\triangle ABC$



Khi đó  $OD \parallel AC$

Suy ra  $\widehat{BOD} = \widehat{BAC} = 40^\circ$  (hai góc đồng vị)

Mặt khác, ta có  $\widehat{BOD} + \widehat{AOD} = 180^\circ$

$\widehat{AOD} = 180^\circ - \widehat{BOD} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ .

Vậy số đo  $\widehat{AD} = \widehat{AOD} = 140^\circ$ .

## B. BÀI TẬP

**Bài 11.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ dây  $AB = R\sqrt{2}$ . Tính số đo của hai cung  $AB$ .

**Bài 12.** Cho đường tròn  $(O; 10)$  và  $AB$  là một dây bất kì của đường tròn đó. Biết  $AB = 16$  cm .

- Tính khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $AB$ .
- Tính số đo cung nhỏ  $AB$ .

**Bài 13.** Hai tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của đường tròn  $(O; R)$  cắt nhau tại điểm  $M$ . Cho biết  $OM = 2R$ . Tính số đo:

- Góc ở tâm  $\widehat{AOB}$ .
- Mỗi cung  $AB$  (cung lớn và cung nhỏ).

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  có  $AB = 5$ cm,  $AC = 12$ cm .

- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường tròn.
- Tính bán kính của đường tròn đó.

**Bài 15.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , các đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ . Chứng minh: a) Bốn điểm  $B, E, D, C$  cùng thuộc một đường tròn.

- $DE < BC$ .

**Bài 16.** Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

- 3 giờ.
- 5 giờ.
- 6 giờ.
- 22 giờ.

**Bài 17.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $O$  là tâm đường tròn đi qua bốn điểm  $A, B, C, D$ .

- Tính số đo góc ở tâm  $\widehat{AOD}; \widehat{DOC}$ .
- Tính số đo cung nhỏ  $AD, CD$ .

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ . Vẽ đường kính  $AF$ .

- Tứ giác  $BFCH$  là hình gì?
- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $H, M, F$  thẳng hàng.

c) Chứng minh  $OM = \frac{1}{2} AH$ .

**Bài 19.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, đường cao  $AH$  và nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AM$ .

a) Tính  $\widehat{ACM}$ .

b) Chứng minh  $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$ .

c) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AH$  với  $(O)$ . Tứ giác  $BCMN$  là hình gì? Vì sao?

**Bài 20.** Trong hình bên, cho biết  $AB = OA$ .

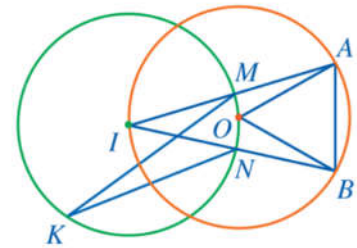
a) Tính số đo góc  $AOB$ .

b) Tính số đo cung nhỏ  $AB$  và cung lớn  $AB$  của  $(O)$ .

c) Tính số đo góc  $MIN$ .

d) Tính số đo cung nhỏ  $MN$  và cung lớn  $MN$  của  $(I)$ .

e) Tính số đo góc  $MKN$ .



**Bài 21.** Cho hai đường tròn  $(O)$ ,  $(I)$  cắt nhau tại hai điểm  $A$ ,  $B$ . Kẻ các đoạn thẳng  $AC$ ,  $AD$  lần lượt là các đường kính của hai đường tròn  $(O)$ ,  $(I)$ . Chứng minh ba điểm  $B$ ,  $C$ ,  $D$  thẳng hàng.

**Bài 22.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A$ ,  $B$  nằm trên đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của đường tròn  $(O)$ , hai tiếp tuyến đó cắt nhau tại  $M$ .

a) Tính số đo cung nhỏ  $AB$  và số đo cung lớn  $AB$  nếu  $\widehat{AMB} = 40^\circ$ .

b) Tính diện tích của tứ giác  $OAMB$  theo  $R$  nếu số đo cung nhỏ  $AB$  bằng  $120^\circ$ .

**Bài 23.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AC$ . Trên tia  $BH$ , lấy điểm  $D$  sao cho  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BD$ . Nối  $A$  với  $D$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Chứng minh:

a)  $CH$  là tia phân giác của góc  $ACE$ .

b)  $OH \parallel EC$ .

**Bài 24.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Vẽ cát tuyến  $CAD$  vuông góc với  $AB$ . Tia  $CB$  cắt  $(O')$  tại  $E$ , tia  $BD$  cắt  $(O)$  tại  $F$ . Chứng minh rằng:

a)  $\widehat{CAF} = \widehat{DAE}$ .

b)  $AB$  là tia phân giác của  $\widehat{EAF}$ .

c)  $CA \cdot CD = CB \cdot CE$  .

d)  $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot DF$  .

**BÀI 5. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH VÀNH KHUYÊN**

**A. VÍ DỤ MẪU**

**Ví dụ 1.** Cung có số đo  $100^\circ$  của đường tròn bán kính 8 cm dài bao nhiêu centimét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Giải**

Độ dài cung tròn đó là:  $\frac{100 \cdot \pi \cdot 8}{180} = \frac{40\pi}{9} \approx 14$  (cm).

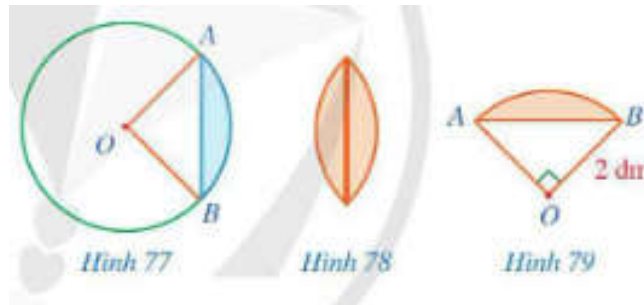
**Ví dụ 2.** Một họa tiết trang trí có dạng hình tròn bán kính 4 dm được chia thành nhiều hình quạt tròn, mỗi hình quạt có góc ở tâm là  $7,5^\circ$ . Diện tích của mỗi hình quạt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



**Giải**

Diện tích của mỗi hình quạt là:  $\frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7,5}{360} \approx 1,05$  (dm<sup>2</sup>).

**Ví dụ 3.** Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung ( tương ứng ) của đường tròn ( minh họa bởi phần màu xanh ở Hình 77). Người ta làm một họa tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau ( Hình 78 ), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là  $90^\circ$  và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (Hình 79). Tính diện tích của họa tiết trang trí đó ( theo đơn vị decimét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm ).



**Giải**

Trong Hình 79, ta có:

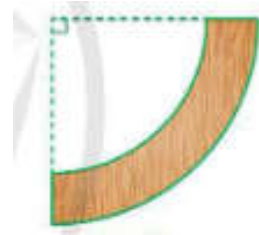
Diện tích tam giác OAB là :  $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$  (dm<sup>2</sup>)

Do số  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  nên diện tích hình quạt tròn AOB tương ứng là:  $S_2 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi$  (dm<sup>2</sup>)

Suy ra diện tích hình viên phân là :  $S_3 = S_2 - S_1 = \pi - 2$  (dm<sup>2</sup>).

Vậy diện tích của họa tiết trang trí đó là:  $S = 2S_3 = 2(\pi - 2) \approx 2,28 \text{ (dm}^2\text{)}$ .

**Ví dụ 4.** Hình bên mô tả mặt cắt của một khúc gỗ có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và bán kính lần lượt là 4 dm và 3 dm. Diện tích mặt cắt đó là bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



**Giải**

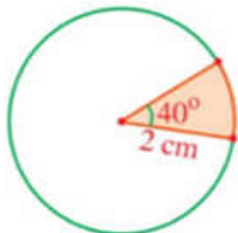
Diện tích mặt cắt là:  $\frac{1}{4} \pi (4^2 - 3^2) = \frac{7\pi}{4} \approx 5,5 \text{ (dm}^2\text{)}$ .

## B. BÀI TẬP

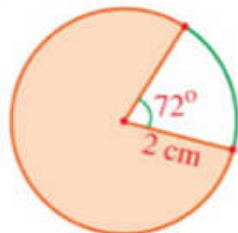
**Bài 25.** Tính chu vi của đường tròn bán kính 5 cm (theo đơn vị centimet và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Bài 26.** Tính diện tích của hình vành khuyên đó giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 2,5 cm; 2 cm.

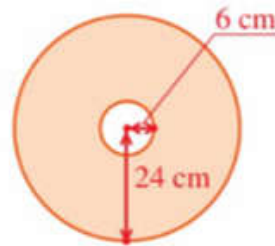
**Bài 27.** Quan sát các hình 1, 2, 3, 4.



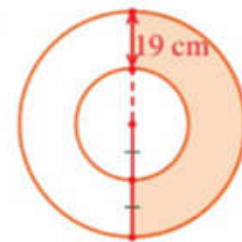
Hình 1



Hình 2



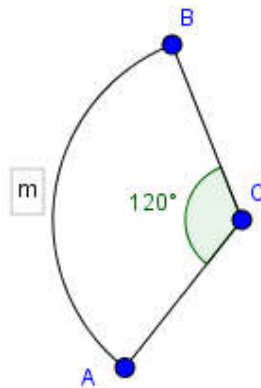
Hình 3



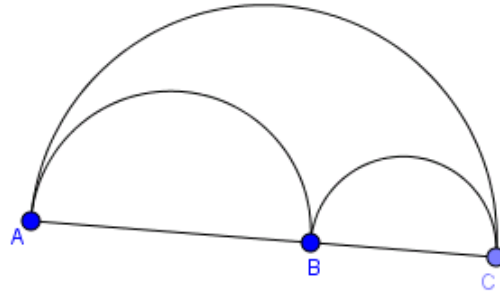
Hình 4

- Tính diện tích phần được tô màu mỗi hình đó.
- Tính độ dài cung tròn được tô màu xanh ở mỗi hình 1, 2.

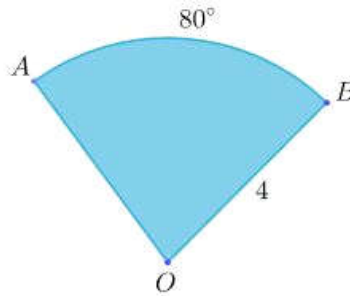
**Bài 28.** Dựa vào hình vẽ sau, so sánh độ dài cung  $\widehat{AmB}$  và đường gấp khúc AOB.



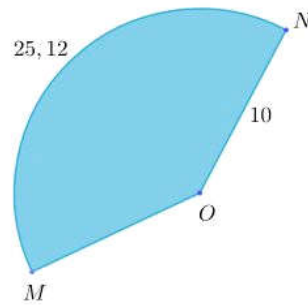
**Bài 29.** Dựa vào hình vẽ sau, chứng minh độ dài nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài nửa đường tròn đường kính AB và BC.



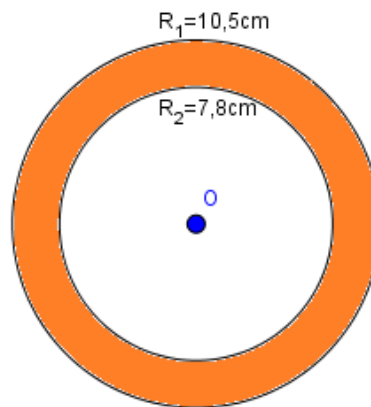
**Bài 30.** Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



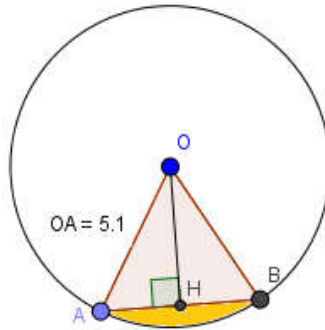
**Bài 31.** Tính diện tích hình quạt trong hình vẽ sau:



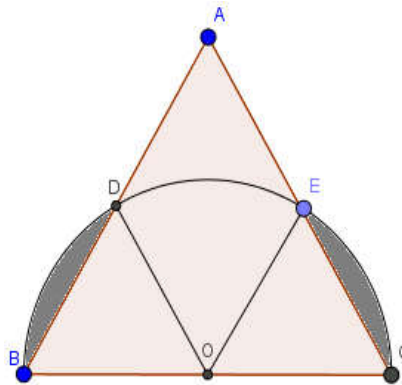
**Bài 32.** Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình vành khăn tạo thành từ hai đường tròn đồng tâm có bán kính  $R_1, R_2$ .



**Bài 33.** Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân, biết  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ ;  $OA = 5,1$ (cm).



**Bài 34.** Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình viên phân tạo thành từ tam giác đều cạnh 10 cm với đường tròn tâm O.



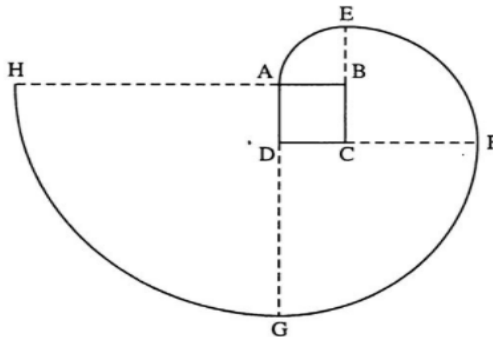
**Bài 35.** Cho (O) đường kính  $AB = 4\sqrt{3}$  (cm), điểm C thuộc (O) sao cho  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Tính diện tích viên phân AC.

**Bài 36.** Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho  $OM = 2R$ . Từ M vẽ các tiếp tuyến MA và MB với A, B là các tiếp điểm.

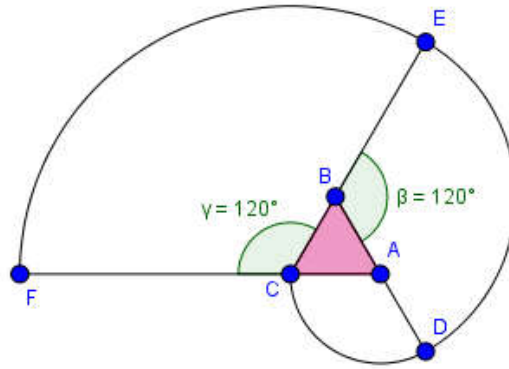
a) Tính độ dài cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM; BM và cung nhỏ AB.

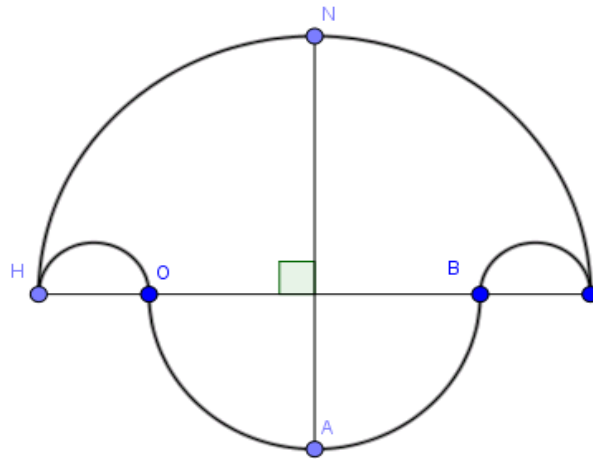
**Bài 37.** Cho hình vẽ. Biết  $AB = 1$ cm Tính độ dài đường cong AEF GH.



**Bài 38.** Dựa vào hình vẽ sau, tính diện tích hình quạt ACD, biết  $AB = 5$ (cm).



**Bài 39.** Hình vẽ sau tạo thành từ các cung tròn của các đường tròn đường kính HI, HO, OB. Tính diện tích hình HOABINH, biết  $HI = 20(\text{cm})$ ,  $BI = 2(\text{cm})$ .

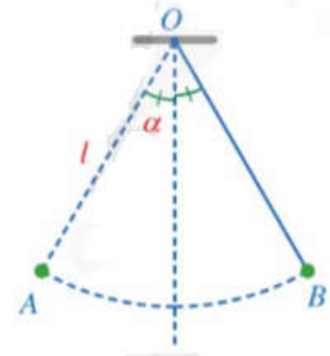


**Bài 40.** Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên dưới có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng  $150^\circ$ .

- Tính diện tích của hình quạt đó.
- Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.



**Bài 41.** Một con lắc di chuyển từ vị trí A đến vị trí B (Hình vẽ). Tính độ dài quãng đường AB mà con lắc đó đã di chuyển, biết rằng sợi dây OA có độ dài bằng  $l = 2(\text{cm})$  và tia OA tạo với phương thẳng đứng góc  $\alpha = 15^\circ$ .



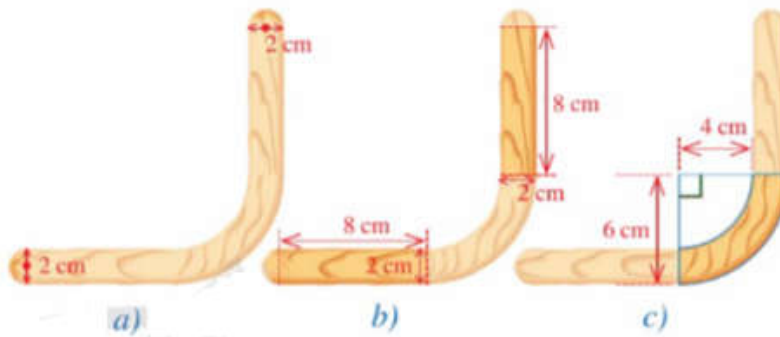
**Bài 42.** Bánh xe (khi bơm căng) của một chiếc xe đạp có đường kính 650 mm. Biết rằng khi giò đĩa quay một vòng thì bánh xe đạp quay được khoảng 3,3 vòng (hình vẽ). Hỏi chiếc xe đạp di chuyển được quãng đường dài bao nhiêu mét sau khi người đi xe đạp 10 vòng liên tục?



**Bài 43.** Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên.



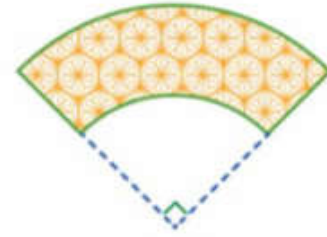
**Bài 44.** Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của một khung gỗ có dạng ghép của năm hình: hai nửa hình tròn đường kính 2 cm; hai hình chữ nhật kích thước 2 cm × 8 cm (*Hình b*); một phần tư hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm có bán kính lần lượt là 4 cm và 6 cm. Tính diện tích của mặt cắt của khung gỗ đó.



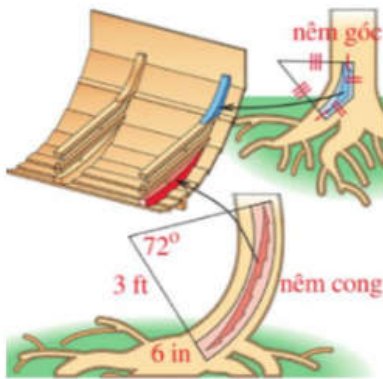
**Bài 45.** Mặt đĩa CD (như hình vẽ) có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 1,5 cm và 6 cm. Hình vành khuyên đó có diện tích bằng bao nhiêu centimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



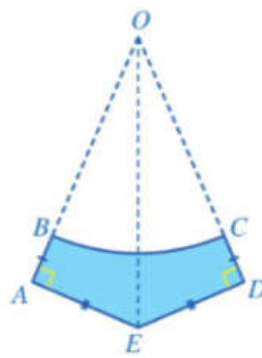
**Bài 46.** Hình vẽ bên dưới mô tả mảnh vải có dạng một phần tư hình vành khuyên, trong đó hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn cùng tâm và có bán kính lần lượt là 3 dm và 5 dm. Diện tích của mảnh vải đó bằng bao nhiêu decimét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



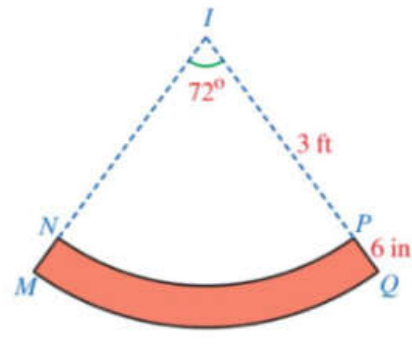
**Bài 47.** Khi đóng đáy thuyền cho những con thuyền vượt biển, người Vikings sử dụng hai loại nêm: nêm góc và nêm cong (lần lượt tô màu xanh, màu đỏ trong (Hình 1)). Mặt cắt ABCD của nêm góc có dạng hai tam giác vuông OAE, ODE bằng nhau với cạnh huyền chung và bỏ đi hình quạt tròn OBC (Hình 2), được làm từ những thân cây mọc thẳng. Mặt cắt MNPQ của nêm cong có dạng một phần của hình vành khuyên (Hình 3), được làm từ những thân cây cong. Kích thước của nêm cong được cho như ở Hình 3.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

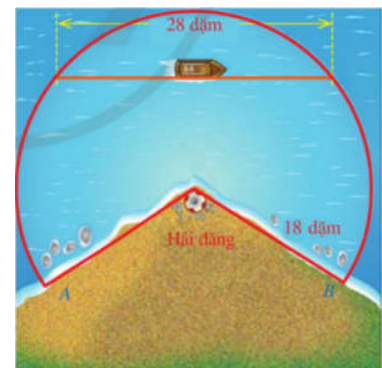
a) Diện tích của nêm cong là bao nhiêu centimét vuông (lấy 1 ft = 30,48 cm, 1 in = 2,54 cm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

b) Cần phải biết những kích thước nào của nêm góc để tính được diện tích của nêm đó?

**Bài 48.** Hình vẽ bên dưới biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung AmB có số đo  $245^\circ$ .

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1 609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



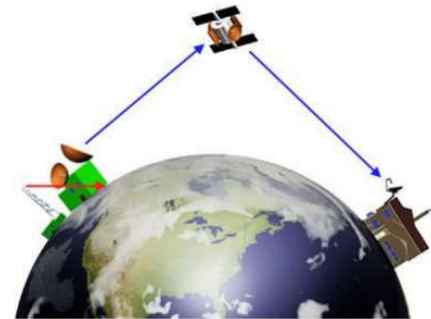
## MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN

**Bài 49.** Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Em hãy tính kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8m biết rằng đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết.



**Bài 50.** Vinasat-1 là vệ tinh viễn thông địa tĩnh đầu tiên của Việt Nam được phóng vào vũ trụ lúc 22 giờ 17 phút ngày 18 tháng 4 năm 2008 (giờ UTC). Dự án vệ tinh Vinasat-1 đã khởi động từ năm 1998 với tổng mức đầu tư là khoảng hơn 300 triệu USD. Việt Nam đã tiến hành đàm phán với 27 quốc gia và vùng lãnh thổ để có được vị trí 132 độ Đông trên quỹ đạo địa tĩnh.

Hãy tìm khoảng cách từ vệ tinh Vinasat-1 đến mặt đất. Biết rằng khi vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến đến một điểm xa nhất trên mặt đất thì từ lúc phát tín hiệu đến mặt đất cho đến lúc vệ tinh thu lại được tín hiệu phản hồi mất khoảng thời gian là 0,28s. Trái đất được xem như một hình cầu có bán kính khoảng 6400km. (ghi kết quả gần đúng chính xác đến hàng đơn vị), giả sử vận tốc sóng vô tuyến là  $3 \cdot 10^8$  m/s.



**Bài 51.** Khí cầu là một túi đựng không khí nóng, thường có khối lượng riêng nhỏ hơn không khí xung quanh và nhờ vào lực đẩy Ác-si-mét có thể bay lên cao. Giả sử có thể xem khinh khí cầu là một khối cầu và các dây nối sẽ tiếp xúc với khối cầu này. Hãy tính chiều dài của các dây nối để khoảng cách từ buồng lái đến điểm thấp nhất của khí cầu là 8m. Biết rằng bán kính của khối cầu này là 10m.



**Bài 52.** Người ta muốn xây dựng một cây cầu bắc qua một hồ nước hình tròn có bán kính 2 km. Hãy tính chiều dài của cây cầu để khoảng cách từ cây cầu đến tâm của hồ nước là 1732m.



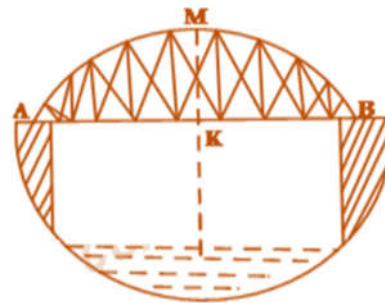
**Bài 53.** Đường hầm vượt eo biển Măng-sơ nối hai nước Anh và Pháp có chiều dài khoảng 51km. Giả sử rằng vị trí hai đầu đường hầm thuộc Anh và Pháp nằm trên cùng một kinh tuyến ở bề mặt Trái Đất (Trái Đất được xem như một hình cầu có bán kính 6400km). Hãy tính độ sâu nhất của đường hầm so với bề mặt Trái Đất.



**Bài 54.** Một quả cầu gỗ có bán kính là  $R = 5\text{cm}$  được đặt trên một cái đế bằng gỗ có dạng là một nửa mặt cầu bán kính bằng  $\frac{R}{2}$ . Hãy tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của mặt cầu gỗ.



**Bài 55.** Một chiếc cầu được thiết kế như hình bên dưới có độ dài  $AB = 40\text{m}$ , chiều cao  $MK = 3\text{m}$ . Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung  $AMB$ . ( $MK$  đi qua tâm của đường tròn chứa cung  $AMB$ ).



**Bài 56.** Dây Cu-roa là một trong những bộ truyền được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp. Chiều dài dây cu-roa được xác định theo công thức:

$$L = 2a + \frac{\pi(d_1 + d_2)}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}$$

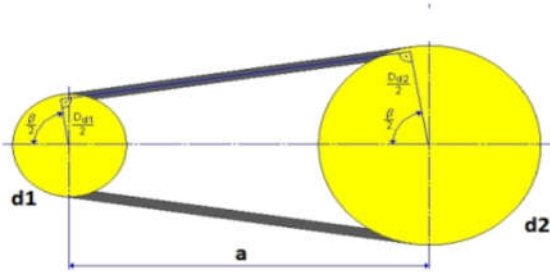
Trong đó:

L: Chiều dài dây cu-roa.

a: Khoảng cách tâm của 2 pu-ly.

$d_1$ : Đường kính của pu-ly 1 (hình tròn nhỏ màu vàng)

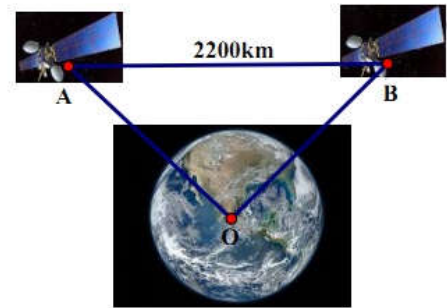
$d_2$ : Đường kính của pu-ly 2 (hình tròn lớn màu vàng)



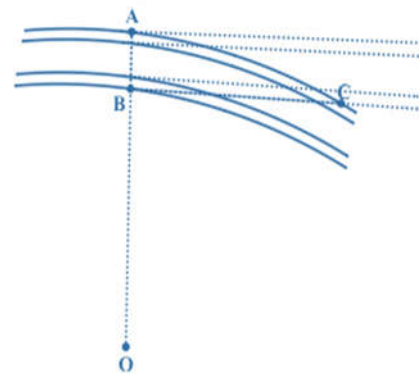
Cho  $d_1 = 10\text{cm}$ ,  $d_2 = 20\text{cm}$ ,  $a = 60\text{cm}$

- Tính chiều dài của dây cu-roa.
- Gọi  $AB$  là chiều dài một đoạn dây cu-roa, trong đó  $A, B$  lần lượt là tiếp điểm trên của dây cu-roa với 2 đường tròn tạo bởi mặt cắt của 2 pu-ly. Tính  $AB$ .

**Bài 57.** Sóng cực ngắn có tần số 30 - 30000MHz. Năng lượng rất lớn, không bị tầng điện ly hấp thụ, truyền đi rất xa ( $> 2200\text{km}$ ) theo đường thẳng. Dùng trong thông tin liên lạc vũ trụ, ra đa và truyền hình. Tại một thời điểm có hai vệ tinh đang ở hai vị trí  $A$  và  $B$  cùng cách mặt đất 230km, một tín hiệu (truyền bằng sóng cực ngắn) được truyền đi từ vệ tinh  $A$  truyền đến vệ tinh  $B$  theo phương  $AB$ . Hỏi vệ tinh  $B$  có nhận được tín hiệu đó không? Biết khoảng cách giữa  $A$  và  $B$  theo đường thẳng là 2200km và bán kính Trái Đất là 6400km.



**Bài 58.** Để giúp xe lửa chuyển từ một đường ray từ hướng này sang một đường ray theo hướng khác, người ta làm xen giữa một đoạn đường ray hình vòng cung (hình bên). Biết chiều rộng của đường ray là  $AB \approx 1,1\text{m}$ , đoạn  $BC \approx 28,4\text{m}$ . Hãy tính bán kính  $OA = R$  của đoạn đường ray hình vòng cung?



**Bài 59.** Một ngọn đèn hải đăng cao 85m đặt tại bờ biển có góc nâng của đèn không quá  $85^{\circ}$  so với phương thẳng đứng. Biết rằng ánh sáng của ngọn đèn hải đăng phát ra xem như một đường thẳng và đèn có thể xoay tròn xung quanh ngọn hải đăng. Một cây cầu bắc qua biển (rất dài) cách ngọn đèn hải đăng 750m. Hỏi ánh sáng của ngọn đèn hải đăng có chiếu sáng được một đoạn của chiếc cầu hay không? Nếu có hãy tính độ dài đoạn cầu được chiếu sáng đó.

