



A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. Đại số

- Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn
- Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, phương trình, bất phương trình.
- Căn thức bậc hai của một biểu thức đại số
- Rút gọn biểu thức chứa căn và các câu hỏi phụ liên quan

II. Hình học

- Tỷ số lượng giác của góc nhọn và các ứng dụng
- Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông
- Đường tròn. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
- Tiếp tuyến của đường tròn. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau
- Góc ở tâm, góc nội tiếp
- Độ dài cung tròn, diện tích hình quạt tròn, diện tích hình vành khuyên

B. BÀI TẬP THAM KHẢO

I. ĐẠI SỐ

Dạng 1: Giải phương trình – hệ phương trình – bất phương trình

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 7y = -13 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{y-1} = -7 \\ \frac{2}{x+2} + \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3|2x-1| + y = 6 \\ |2x-1| - y = -2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3\sqrt{x+2} - \frac{1}{y} = 2 \\ \sqrt{x+2} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$$

Bài 2:

1) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = m & (1) \\ 3x - 2y = 5 & (2) \end{cases}$ (Với m là tham số nguyên). Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà $x > 0; y < 0$

2) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3m - 1 & (1) \\ -2x + y = 2 & (2) \end{cases}$ (Với m là tham số) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 - y^2 = 2$

Bài 2:

1) Cho đường thẳng $(d_1): y = x + 3$; $(d_2): y = 2x - 1$; $(d_3): y = 3mx + 4$. Tìm m để ba đường thẳng (d_1) ; (d_2) ; (d_3) đồng quy

2) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a, b để (d) đi qua điểm $A(1; 3)$ và $B(-1; 2)$

3) Cho $(d): y = (m+1)x - 2m + 3$. Tìm điểm cố định mà (d) luôn đi qua với mọi m

Bài 3: Giải phương trình:

$$1) (3x-1)^2 = 5(1-3x)$$

$$2) y^2 - 5y - 2(5-y) = 0$$

$$3) \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{5-3x}{9-x^2}$$

$$4) \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$$

Bài 4: Giải bất phương trình:

$$1) \frac{8x+3}{4} - \frac{3-2x}{3} \leq \frac{5-3x}{2} + 1$$

$$2) \frac{x+2}{5} - x \geq \frac{3x-3}{2} + \frac{1}{3}$$

$$3) \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} \leq \frac{4x}{x^2-9}$$

$$4) \frac{6}{x} - \frac{4x}{1-x} > \frac{x^2+31}{x^2-1}$$

Dạng 2: Căn thức bậc hai – rút gọn biểu thức chứa căn và các câu hỏi phụ

Bài 5: Thực hiện phép tính:

$$1) 3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$$

$$2) (2\sqrt{24} - 2\sqrt{54}) : \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$$

$$3) \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \frac{4}{1-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2$$

$$4) \left(2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}} \right) \cdot \sqrt{3}$$

$$5) \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2+\sqrt{3})$$

$$6) \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Bài 6: Giải phương trình:

$$1) \frac{\sqrt{x}}{4} - 3 = 2$$

$$2) 2\sqrt{3x+1} - 5 = 11$$

$$3) \frac{3}{\sqrt{1-3x}} + 1 = 4$$

$$4) (\sqrt{x}-5)^2 - 2\sqrt{x} = x-13$$

$$5) \frac{\sqrt{2x}+1}{5} + \frac{\sqrt{2x}-2}{4} = \sqrt{2x}+4$$

$$6) x - 8\sqrt{x} + 7 = -9$$

$$7) 5 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 2$$

$$8) 1 + 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 7$$

$$9) \sqrt{9x-18} + \sqrt{4x-8} = \frac{1}{2}$$

10)

$$7\sqrt{5x+10} - \frac{1}{3}\sqrt{9x+18} = \sqrt{x+2} + 6$$

Bài 7: Cho $A = \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-5\sqrt{x}+10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq -2$

Bài 8: Cho $P = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị P khi $x = 4$

2) Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm GTNN của $A = P.Q$

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{x-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{9}{x+3\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị A khi $x = 25$

2) Chứng minh $B = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3) Đặt $P = A.B$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để P có giá trị là số nguyên

Bài 10: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị A khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

3) Tìm x để $Q = 2B : A$ nhận giá trị nguyên

Bài 11: Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+5} - \frac{5}{25-x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị A khi $|x+1| = 2$

2) Rút gọn $M = B : A$

3) Tìm số thực x để $|M| - M = 0$ $|M| - M = 0$

Dạng 3: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình – bất phương trình

Bài 12: Minh mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 165000 đồng, trong đó đã bao gồm 15000 đồng là tiền thuế giá trị gia tăng (viết tắt là VAT). Biết thuế VAT với loại hàng thứ nhất là 12% và thuế VAT với loại hàng thứ hai là 9%. Hỏi giá tiền của mỗi loại hàng khi chưa niêm yết là bao nhiêu?

Bài 13: Tìm hai số nguyên dương biết tổng của chúng bằng 943, nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 3 và số dư là 67.

Bài 14: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Bài 15: Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 7 giờ 12 phút thì xong (vôi vữa và gạch có công nhân khác vận chuyển). Nếu người thợ thứ nhất làm trong 5 giờ và người thợ thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người thợ xây được $\frac{3}{4}$ bức tường. Hỏi mỗi người thợ làm một mình trong bao lâu thì xây xong bức tường?

Bài 16: Hai người thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm trong 6 ngày thì xong công việc. Hai người làm cùng nhau trong 3 ngày thì người thứ nhất được chuyển đi làm công việc khác, người thứ hai làm một mình trong 4 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 17: Hưởng ứng chiến dịch tình nguyện “Mùa hè xanh” để giúp học sinh vùng cao đến trường thuận lợi hơn, hai tổ thanh niên A và B tham gia sửa một đoạn đường. Nếu hai tổ cùng làm thì trong 8 giờ xong việc. Nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ A ít hơn tổ B là 12 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sửa xong đoạn đường đó trong bao lâu?

Bài 18: Nhà máy luyện thép hiện có sẵn loại thép chứa 10% carbon và loại thép chứa 20% carbon. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt. Tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1000 tấn thép chứa 16% carbon từ hai loại thép trên.

Bài 19: Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81km và ngược dòng 105km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54km và ngược dòng 42km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

Bài 20: Hai bến sông A và B cách nhau 200 km. Một ca nô xuôi dòng từ bên A đến bến B rồi ngược từ B trở về A hết tổng thời gian là 9 giờ. Biết thời gian ca nô xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô ngược dòng 4 km. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng và vận tốc của dòng nước.

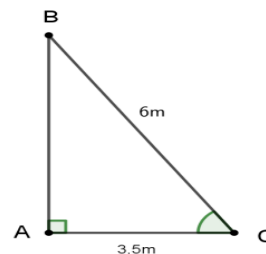
Bài 21 Một lớp có 40 học sinh, trong đó nam nhiều hơn nữ. Trong giờ ra chơi, cô giáo đưa cả lớp 260 000 đồng để mỗi bạn nam mua một ly Coca giá 5000 đồng/ly, mỗi bạn nữ mua một bánh phô mai giá 8000 đồng/cái và được căng tin trả lại tiền thừa là 3000 đồng. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh nam và bao nhiêu học sinh nữ?

Bài 22: Bạn Lan để dành tiền mua quà tặng em trai nhân dịp “Quốc tế thiếu nhi 1/6”. Hiện tại bạn Lan đã để dành được số tiền không quá 50 000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá 5000 đồng và 2000 đồng. Hỏi bạn Lan có thể có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng ?

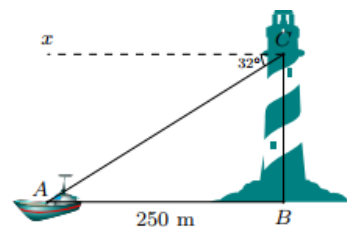
Bài 23: Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

II. HÌNH HỌC

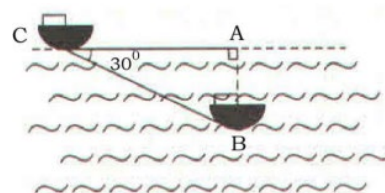
Bài 24: 1) Một cột đèn điện AB cao 6m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính \widehat{BCA} (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.



2) Trên mặt biển, khi khoảng cách AB từ ca nô đến chân tháp hải đăng là 250m, một người đứng trên tháp hải đăng đó nhìn về phía ca nô theo phương CA tạo với phương nằm ngang Cx một góc $\widehat{ACx} = 32^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết AB // Cx và độ cao từ tầm mắt của người đó đến đỉnh tháp hải đăng là 3,2m.



3) Trong một buổi tập luyện, một tàu ngầm ở trên mặt biển lặn xuống và di chuyển theo một đường thẳng tạo với mặt nước biển một góc 30° (xem hình vẽ bên).



a) Khi tàu ở độ sâu AB = 130 m so với mặt nước biển thì tàu đã đi được quãng đường CB dài bao nhiêu?

b) Biết vận tốc của tàu là 30 km/h . Hỏi tàu đi hết quãng đường CB trong thời gian bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng đơn vị của giây)?

Bài 25: 1) Hình quạt tô màu đỏ ở hình vẽ bên có bán kính bằng 2 dm và góc ở tâm bằng 150° .

a) Tính diện tích của hình quạt đó.

b) Tính chiều dài cung tương ứng với hình quạt tròn đó.



2) Bề mặt trên của một chiếc trống có dạng hình tròn đường kính 32 cm. Người ta cần thay cả hai mặt trống. Tính diện tích vật liệu tối thiểu cần sử dụng



3) Hình vẽ bên dưới mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15 cm, 18 cm, 21 cm, 24 cm. Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.



Bài 26: Cho (O) , đường kính AB và lấy M thuộc (O) . Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) lần lượt ở C và D . Đường thẳng AM cắt OC tại E , đường thẳng BM cắt OD tại F . Gọi I là trung điểm của CD . Chứng minh:

1) 4 điểm A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn

2) $CD = AC + BD$ và tính số đo góc COD

3) Tứ giác $MEOF$ là hình chữ nhật và AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

Bài 27: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm). Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , cắt AB tại H

1) Chứng minh bốn điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD . Gọi K là giao điểm của OI và MB Chứng minh tứ giác $OHBI$ là hình chữ nhật và KD là tiếp tuyến của đường tròn (O) ,

3) Đường thẳng qua O và vuông góc với MD cắt tia AB tại Q Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng DQ

Bài 28: Cho $(O; R)$, đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , lấy P trên Ax ($AP > R$). Từ P kẻ tiếp tuyến PM của (O) (M là tiếp điểm)

1) Chứng minh A, P, M, O cùng thuộc một đường tròn

2) Chứng minh $BM \parallel OP$

3) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N . Chứng minh tứ giác $OBPN$ là hình bình hành

4) Giả sử AN cắt OP tại K ; PM cắt ON tại I ; PN cắt OM tại J . Chứng minh I, J, K thẳng hàng

Bài 29: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB khác đường kính. Kẻ OI vuông góc với AB tại I , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng OI tại M .

a) Chứng minh: $OI \cdot OM = R^2$

b) Chứng minh MB là tiếp tuyến của (O) và 4 điểm A, B, M, O thuộc một đường tròn.

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , tiếp tuyến của đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh MD vuông góc với ON .

Bài 30: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là tiếp điểm)

a) c/m: Bốn điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó

b) Gọi H là giao điểm của OA và BC , kẻ HK vuông góc với AB tại K . Chứng minh: $OA \perp BC$ và $OH \cdot HA = BK \cdot BA$

c) C/m: HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AC và HK đi qua trung điểm của đoạn OC .

Bài 31 Cho đường tròn (O) , có bán kính R , điểm K bên ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh bốn điểm K, A, O, B cùng thuộc một đường tròn

b) Vẽ đường kính AC của đường tròn (O) . Chứng minh $BC // KO$.

c) Chứng minh $BC \cdot KO = 2R^2$. Tính diện tích tam giác ABC theo R , biết $OK = 2R$.

Bài 32 Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A sao cho $OA = 2R$, vẽ các tiếp tuyến AB, AC với $(O; R)$, B và C là các tiếp điểm. Vẽ đường kính BOD .

a) Chứng minh 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $DC // OA$.

c) Đường trung trực của BD cắt AC và CD lần lượt tại S và E . Chứng minh rằng $OCEA$ là hình thang cân.

d) Gọi I là giao điểm của đoạn OA và (O) , K là giao điểm của tia SI và AB . Tính theo R diện tích tứ giác $AKOS$.

Bài 33: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Bx của (O) . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB có chứa Bx , lấy điểm M thuộc (O) (M khác A và B) sao cho $MA > MB$. Tia AM cắt Bx tại C . Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD với (O) (D là tiếp điểm).

1) Chứng minh $OC \perp BD$.

2) Chứng minh bốn điểm O, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh: $\widehat{CMD} = \widehat{CDA}$.

4) Kẻ MH vuông góc với AB tại H . Tìm vị trí của M để chu vi tam giác OMH đạt giá trị lớn nhất.

MỞ RỘNG, NÂNG CAO

Bài 34: Hai bạn An và Bình đang so về số lượng viên bi mà hai bạn hiện có. An nói với Bình rằng “Nếu bạn cho tôi một số viên bi từ túi của bạn thì tôi sẽ có số viên bi gấp 6 lần số viên bi của bạn. Còn nếu tôi cho bạn số viên bi như thế, số viên bi của bạn sẽ bằng $\frac{1}{3}$ số viên bi của tôi”. Hỏi số

viên bi ít nhất mà bạn An có thể có là bao nhiêu?

Bài 35: Các nhà kinh tế học đưa ra mối quan hệ giữa nhiệt độ Trái đất tăng x (theo $^{\circ}C$) và mức giảm y (%) của tổng giá trị kinh tế là một hàm số bậc nhất. Biết rằng khi nhiệt độ tăng $2^{\circ}C$, tổng giá trị kinh tế giảm 3%, và khi tăng $5^{\circ}C$, tổng giá trị kinh tế giảm 10%.

1) Xác định phương trình liên hệ giữa y và x .

2) Giả sử tổng giá trị kinh tế ban đầu của thế giới là 100.000 tỷ USD. Nếu nhiệt độ tăng thêm $6^{\circ}C$, tính tổng giá trị kinh tế còn lại sau khi đã giảm.

Bài 36: 1) Cho $x > 0; y > 0$ và $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1) \geq 4$. Tìm GTNN của $P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + 2024$

2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $(a + b - 1)^2 = ab$. Tìm GTNN của $P = a + b + \frac{9}{a + b}$

Bài 37: Giải phương trình

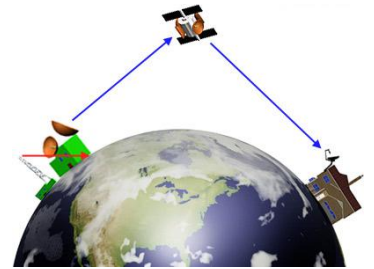
a) $\frac{x^2 - 2}{2} = \sqrt{2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $3x - 2\sqrt{x + 3} - 3\sqrt{5x + 4} + 10 = 0$

Bài 38: Cho a, b, c là các số thực dương nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng trong ba số

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2 - y}; \frac{1}{y} + \frac{1}{2 - z}; \frac{1}{z} + \frac{1}{2 - x}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 2.

Bài 39: Một vệ tinh nhân tạo địa tĩnh chuyển động theo một quỹ đạo tròn cách bề mặt trái đất một khoảng 35 786 km, tâm quỹ đạo của vệ tinh trùng với tâm O Trái đất. Vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến theo một đường thẳng đến một vị trí trên bề mặt Trái đất. Hỏi vị trí xa nhất trên bề mặt Trái đất có thể nhận tín hiệu vệ tinh này ở cách vệ tinh một khoảng bao nhiêu km (ghi kết quả gần đúng chính xác đến hàng đơn vị). Biết rằng Trái đất được xem như một hình cầu có bán kính 6 400 km.



Bài 40: Một mảnh vườn hình chữ nhật ABCD có diện tích 961 m². Người ta muốn mở rộng thêm 4 phần đất sao cho tạo thành đường tròn đi qua các điểm của hình chữ nhật như hình vẽ. Biết tâm đường tròn trùng với tâm hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất của 4 phần đất được mở rộng (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

