PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm 1 trang)

ĐỀ HỌC SINH GIỎI HUYỆN
Năm học 2023 – 2024
MÔN THI: TOÁN 9 ***(Thời gian làm bài 120 phút)***

Câu 1: (4.5 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+2\sqrt{x}\right)}$

2) Cho $f\left(x\right) = \left(x^3+15x-37\right)^{2023}$. Tính $f\left(x_0\right)$ với $x_0 = \sqrt{21-8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

3) Chứng tỏ rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo góc nhọn x?

$B = \frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} - 2\tan^2 x$

Câu 2. (4.0 điểm)

1) Tìm số tự nhiên n để: $N = n^{2024} + n^{2011} + 1$ là số nguyên tố?

2) Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh $P = a - b$ là một số chính phương.

Câu 3. (4.0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

2) Giải phương trình: $2x^2 - x - 2 = \sqrt{5x+6}$

Câu 4. (6.5 điểm)

Cho tam giác ΔABC nhọn, đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh?

1) $S_{\Delta AEF} = \cos^2 A.S_{\Delta ABC}$

2) FH là phân giác của EFD

3) Gọi I là giao điểm của AD và EF. Chứng minh $HI.AD = AI.DH$

Câu 5. (1.0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = x + y + z$, khi biết: x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ và $3 \le x \le 5; 3 \le y \le 5; 3 \le z \le 5$.

-------- Hết --------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh:
....

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 9 (Vòng 1: 2023- 2024)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1	**1**	$Q=\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$ $=\frac{x(\sqrt{x}+2)+2\left(\sqrt{x}-1\right)x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$ $=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+2}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}$	**0,5** **0,5** **0,5**
	2	$x_0=\sqrt{21-8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{4^2-2.4.\sqrt{5}+5}+\sqrt{5-2.2.\sqrt{5}+2^2}$ $=\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=4-\sqrt{5}-2=2$ $f\left(x_0\right)=x_0^3+15x_0-37=8+30-37=1\Rightarrow f\left(x_0\right)=1^{2023}=1$	**0,5** **0,5** **0,5**
	3	$B=\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}-2\tan^2 x$ **2)** $=\frac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x}-2\tan^2 x$ $=\frac{2}{\cos^2 x}-2\tan^2 x=2\left(1+\tan^2 x\right)-2\tan^2 x=2$	**0,5** **0,5** **0,5**
Câu 2 **4.0** **điểm**	**1**	Ta có: $N=n^{2024}+n^{2012}+1$ Xét $n=0$ thì $N=1$ không phải nguyên tố; $n=1$ thì $N=3$ nguyên tố Xét $n>1: A=n^{2024}-n^2+n^{2011}-n+n^2+n+1$ $=n^2=((n^3)^{674}-1\ \ =n^2\left(\left(n^3\right)^{674}-1\right)+n.\left(\left(n^3\right)^{670}-1\right)+\left(n^2+n+1\right)$ Mà $\left(\left(n^3\right)^{674}-1\right)$ chia hết cho n^3-1, suy ra $\left(\left(n^3\right)^{674}-1\right)$ chia hết cho n^2+n+1 Tương tự: $\left(n^3\right)^{670}-1$ chia hết cho n^2+n+1 Vậy N chia hết cho $n^2+n+1>1$ nên N là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n=1$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
	2	$a=\underset{60\,cs1}{11...1}=\frac{10^{60}-1}{9}$; $b=\underset{30cs2}{22...2}=2.\frac{10^{30}-1}{9}$ $a-b=\frac{10^{60}-1}{9}-2.\frac{10^{30}-1}{9}=\frac{\left(10^{30}\right)^2-2.10^{30}+1}{9}$ $=\left(\frac{10^{30}-1}{3}\right)^2=\left(\underbrace{111...1}_{30cs3}\right)^2$ Vậy $P=a-b$ là số chính phương	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

Câu 3
4.0 điểm

1

$y^2+2xy-7x-12=0 \Leftrightarrow 4y^2+8xy-28x-48=0 \Leftrightarrow (2y-7)(2y+7+4x)=-1$ **1,0**

$2y-7$	-1	1
$2y+7+4x$	1	-1
y	3	4
x	-3	-4

0,5

Vậy PT có 2 nghiệm: $(-3;3)$ và $(-4;4)$ **0,5**

2

Giải PT.ĐK: $x \geq \frac{-6}{5}$

$$2x^2-x-2=\sqrt{5x+6} \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=\sqrt{5x+6}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-2)=\frac{\left[\sqrt{5x+6}-(x+2)\right]\left[\sqrt{5x+6}+(x+2)\right]}{\sqrt{5x+6}+(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-2)=\frac{-x^2+x+2}{\sqrt{5x+6}+(x+2)} \Leftrightarrow 2(x^2-x-2)+\frac{(x^2-x-2)}{\sqrt{5x+6}+(x+2)}=0$$

Ta có

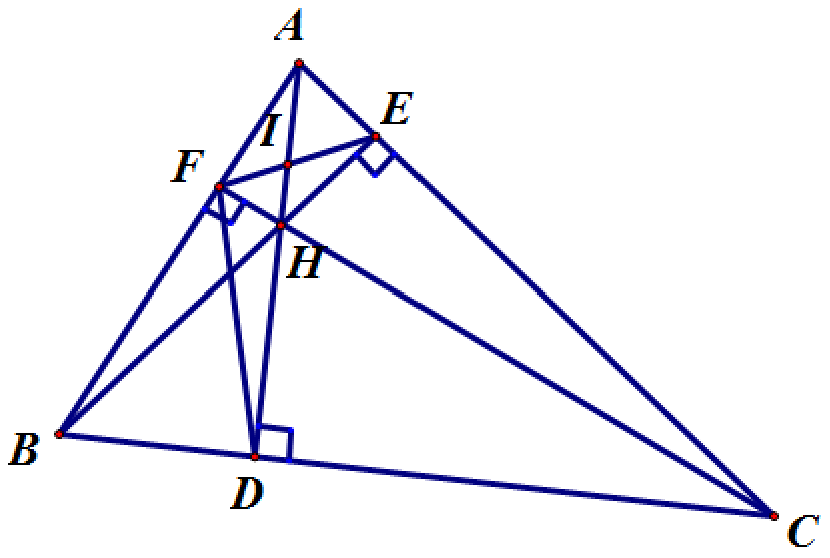
$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left(2+\frac{1}{\sqrt{5x+6}+x+2}\right)=0(*)$$

Mà $2+\frac{1}{\sqrt{5x+6}+x+2}>0$ với $\forall x \geq \frac{-6}{5}$;

$(*) \Rightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix}x=-1\\x=2\end{matrix}\right. (TM)$

0,5

Hình vẽ đúng



Câu 4 **6.5** **điểm**	**1**	ΔABE vuông tại E nên cos $A=\frac{AE}{AB}$ ΔACF vuông tại F nên cos $A=\frac{AF}{AC}$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$. Lại có BAC chung $\Rightarrow \Delta AEF:\Delta ABC\left(c-g-c\right)$ $\Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta SABC}}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2 A$. Hay $\Rightarrow S_{\Delta AEF}=\cos^2 AS_{\Delta ABC}$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
	2	Chứng minh tương tự có: $\left.\begin{matrix}\cos B=\frac{BD}{AB}\\ \text{cosB}=\frac{BF}{BC}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BC}$ $\Rightarrow \Delta BDF:\Delta BAC\left(c-g-c\right)\Rightarrow BDF=BCA\left(1\right)$ $\Delta AEF:\Delta ABC\Rightarrow AFE=ACB\left(2\right)$ Từ (1) và (2) suy ra: $BDF=AFE\Rightarrow EFH=DFH\Rightarrow FH$ là tia phân giác của EFD	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
	3	IFD có FH là tia phân giác trong của đỉnh F và $AF\perp FH$ suy ra FA là phân giác ngoài tại đỉnh F của tam giác. $\Rightarrow \frac{IA}{DA}=\frac{FI}{FD}$ (Tính chất đường phân giác ngoài) (3) Lại có $\frac{FI}{FD}=\frac{HI}{HD}$ (Tính chất đường phân giác trong) (4) Từ (3) và (4) suy ra $\frac{IA}{AD}=\frac{IH}{HD}$ Hay $IA.HD=IH.AD$	**0,5** **1,0** **0,5**
Câu 5 **1.0** **điểm**		Theo bài ra: $\left(x-3\right)\left(y-3\right)\left(z-3\right)\geq 0$ và $\left(5-x\right)\left(5-y\right)\left(5-z\right)\geq 0$ $\Leftrightarrow xyz-3\left(xy+yz+zx\right)+9\left(x+y+z\right)-27\geq 0$ (1) và $\Leftrightarrow -xyz+5\left(xy+yz+zx\right)-25\left(x+y+z\right)+125\geq 0$ (2) Cộng theo vế (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow 2\left(xy+yz+zx\right)-16\left(x+y+z\right)+98\geq 0$; Thay $50=x^2+y^2+z^2$, ta có: $\left(x^2+y^2+z^2\right)-16\left(x+y+z\right)+48\geq 0\Leftrightarrow\left(M^2-16M+64\right)-16\geq 0$ (3) Do $x;y;z\geq 3\Leftrightarrow M\geq 9$ Kết hợp với (3) thì: $M-8\geq 4\Leftrightarrow M\geq 12$ - Dấu "="xẩy ra khi $\left(x,y,z\right)=\left(3,4,5\right)$ và các hoán vị.	**0,5** **0,5**

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO DIỄN CHÂU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 9
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **Toán** – *(Thời gian làm bài 150 phút)*

Bài 1. *(5,0 điểm)*

1) Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

Thu gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M.

2) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Chứng minh rằng: $P = a^3 + b^3 + c^3$ có ít nhất 2 ước là số nguyên tố.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

1) Cho đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn P(1) = 2 và P(-1) = 4. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức P(x) cho đa thức $x^2 - 1$

2) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho: $p^2 - q^2 - 12 = p - 7q$.

Bài 3. *(4,0 điểm)* Giải các phương trình:

a) $4\sqrt{x-1} = x^2 - 9x + 28$

b) $(4x+2)\sqrt{x+8} = 3x^2 + 7x + 8$

Bài 4. *(2,0 điểm)* Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \frac{3}{4}\sqrt{xyz}$.

Bài 5. *(6,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy các điểm P sao cho $APC = 90^o$.

a) Chứng minh rằng: $APK = ABI$

b) Chứng minh rằng: $\frac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} \leq \frac{8}{27}$

c) Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác AMN. Giả sử $\frac{AH}{AO} = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng: 3 điểm K, I, O thẳng hàng.

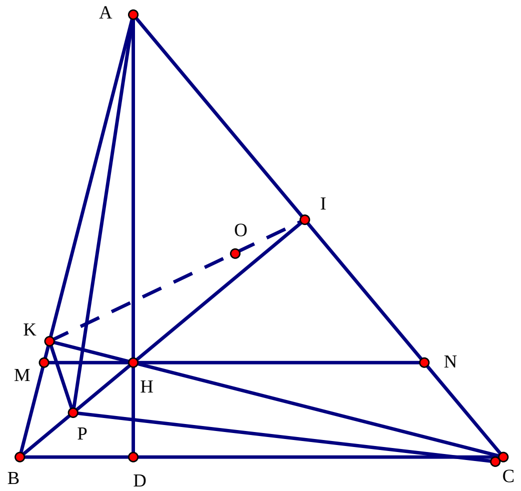
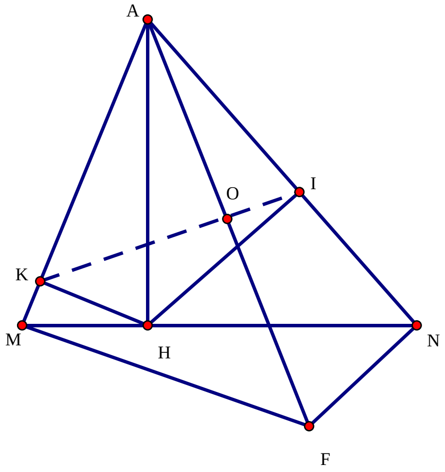
-----------*Hết*----------

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 9

Bài	***Ý***	***Nội dung trình bày***	***Điểm***
1. (5đ)	1) *(3,0đ)*	Với $x \ge 0; x \ne 9$ $M = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ $= \frac{x\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} - \frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} - \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ $= \frac{x\sqrt{x}-3-2\left(x-6\sqrt{x}+9\right)-\left(x+4\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ $= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ $= \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(x+8\right)-3\left(x+8\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$ $= \frac{\left(x+8\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$ $M = \sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1} = \left(\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}\right)-2$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho $\sqrt{x}+1>0, \frac{9}{\sqrt{x}+1}>0$ ta có $\left(\sqrt{x}+1\right)+\frac{9}{\sqrt{x}+1} \ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{9}{\sqrt{x}+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2 \ge 6-2$ $\Leftrightarrow M \ge 6-2 \Leftrightarrow M \ge 4$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\frac{9}{\sqrt{x}+1}$ hay x = 4 (t/mđk) Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 4 khi $x=4$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

	2) *(2,0đ)*	$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0$ $\Rightarrow a+b+c=0\ \ (\text{do}\, a,b,c\neq 0)$ Vì a + b + c = 0 $\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$ $\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$ $\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ Vì a, b, c nguyên nên $a^3+b^3+c^3=3abc \vdots 3\,(1)$ Lại có: a + b + c = 0 nên trong 3 số a, b, c có 1 số chia hết cho 2 $\Rightarrow abc \vdots 2 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \vdots 2\,(2)$ Từ (1) và (2) suy ra $a^3+b^3+c^3$ có ít nhất 2 ước nguyên tố là 2 và 3	0,25 0,25 0,5 0,25 0,5 0,25
	1) *(1,0đ)*	Đặt $P(x)=(x+1)(x-1).Q(x)+ax+b.$ Ta có $P(1)=a+b=2$ $P(-1)=-a+b=4.$ Suy ra $a=-1;b=3.$ Vậy đa thức dư là $-x+3.$	0,25 0,5 0,25
2. (3đ)	2) *(2,0đ)*	Ta có: $p^2-q^2-12=p-7q$ $\Rightarrow 4p^2-4q^2-48=4p-28q$ $\Rightarrow (2p-1)^2=(2q-7)^2$ * Nếu 2p – 1 = 2q – 7 $\Rightarrow$p + 3 = q , mà p, q là các số nguyên tố $\Rightarrow$ p = 2, q = 5 * Nếu 2p – 1 = 7 – 2q $\Rightarrow$p + q = 4 mà p, q là các số nguyên tố $\Rightarrow$p = q = 2	0,5 0,5 0,5 0,5
3. (4đ)	a) *(2,0đ)*	Điều kiện $x\geq 1$ $4\sqrt{x-1}=x^2-9x+28$ $\Leftrightarrow x^2-9x+28-4\sqrt{x+1}=0$ $\Leftrightarrow x^2-10x+25+x-1-4\sqrt{x-1}+4=0$ $(\Leftrightarrow (x-5)^2+\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases}$ Giải ra ta có x = 5 Vậy $x=5$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0,25 0,5 0,25 0,25 0,5 0,25

	b) *(2,0đ)*	Điều kiện $x \ge -8$ $(4x+2).\sqrt{x+8}=3x^2+7x+8$ $\Leftrightarrow x+8-3x.\sqrt{x+8}-(x+2)\sqrt{x+8}+3x(x+2)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+8}-3x\right)-(x+2)\left(\sqrt{x+8}-3x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}-x-2\right)\left(\sqrt{x+8}-3x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+8}=x+2 & (1)\\ \sqrt{x+8}=3x & (2)\end{array}\right.$ Giải (1) và (2) đều tìm được x = 1 (t/m) Vậy x = 1 là nghiệm của phương trình	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
4. *(2,0 đ)*		Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{4}\sqrt{xyz}.$	
		Ta đặt $\frac{1}{2+x}=a,\frac{1}{2+y}=b,\frac{1}{2+z}=c$ (ĐK: $a,b,c>0$) $\Rightarrow x=\frac{1-2a}{a}=2.\frac{b+c}{a},\quad y=\frac{1-2b}{b}=2.\frac{a+c}{b},\quad z=\frac{1-2c}{c}=2.\frac{a+b}{c}$ Do đó $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{4}\sqrt{xyz}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\le\frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}\le\frac{3}{2}(*)$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$ $\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right)$ $\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)$ Do đó: $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}$ $\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{2}$ Vậy BĐT(*) luôn đúng Dấu = xảy ra khi x = y = z = 4	0,25 0,25 0,25 0,5 0,5 0,25
	Hình vẽ:		

			
		a) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông APC ta có: $AP^2 = AI.AC$ Có $\Delta ABI \backsim \Delta ACK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AI} \Rightarrow AI.AC = AK.AB$ $\Rightarrow AP^2 = AK.AB$ $\Rightarrow \Delta ABP \backsim \Delta APK$ (g.g) $\Rightarrow APK = ABI$	0,5 0,5 0,5 0,5
	5. *(6,0 đ)*	b) Gọi S, S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác ABC, ABH, ACH, BCH ΔABC có các đường cao BK, CI cắt nhau tại H Chứng minh được: $\frac{AH}{AD} = \frac{S_{ABH}}{S_{ABD}} = \frac{S_{ACH}}{S_{ACD}} = \frac{S_1 + S_2}{S}$ $\frac{BH}{BI} = \frac{S_1 + S_3}{S}, \ \frac{CH}{CK} = \frac{S_2 + S_3}{S}$ $\Rightarrow \frac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} = \frac{(S_1 + S_2)(S_1 + S_3)(S_2 + S_3)}{S^3} \le \frac{(S_1 + S_2 + S_1 + S_3 + S_2 + S_3)^3}{27S^3}$ $\Rightarrow \frac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} \le \frac{8}{27} . \frac{(S_1 + S_2 + S_3)^3}{S^3} = \frac{8}{27}$ Dấu bằng xảy ra khi ΔABC đều	0,25 0,5 0,5 0,5 0,25
		c) 	

		Trên tia AO lấy F sao cho O là trung điểm của AF Ta có: $AH^2 = 2.AO^2 = AO.AF$ mà $AH^2 = AK.AM$ $\Rightarrow AK.AM = AO.AF$ $\Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AF}{AM}$ $\Rightarrow \Delta AOK \backsim \Delta AMF$ (c.g.c) $\Rightarrow AOK = AMF$ mà $AMF = 90^0 \Rightarrow AOK = 90^0$ Tương tự $AOI = 90^0$ Suy ra 3 điểm K, O, I thẳng hàng	0,5 0,5 0,5 0,5

UBND HUYỆN MỘC CHÂU
TRƯỜNG TH&THCS TÂY TIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU

Môn Thi: TOÁN. Ngày thi: 16.11.2023

(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

(Đề gồm 01 trang)

Bài 1. (5 điểm)

1) Cho biểu thức: $P=\frac{x}{x-\sqrt{x}}+\frac{2}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a) Rút gọn P.

b) Tính P khi $x=3+2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2) Cho hàm số $y=mx-2m-1 \quad (m\neq 0)$

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Xác định m để diện tích tam giác AOB bằng 4 (đvdt)

Bài 2. (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $y^2+2xy-3x-2=0$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+12$ là số chính phương

Bài 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{6} \\ x^3+y^3+z^3=3xyz \end{cases}$

Bài 4. (6 điểm)

Cho AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ tại M.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của $(O;R)$.

c) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 5. (2 điểm)

Cho $x, y, z>0$ thoả mãn $x+y+z=2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

- Hết –

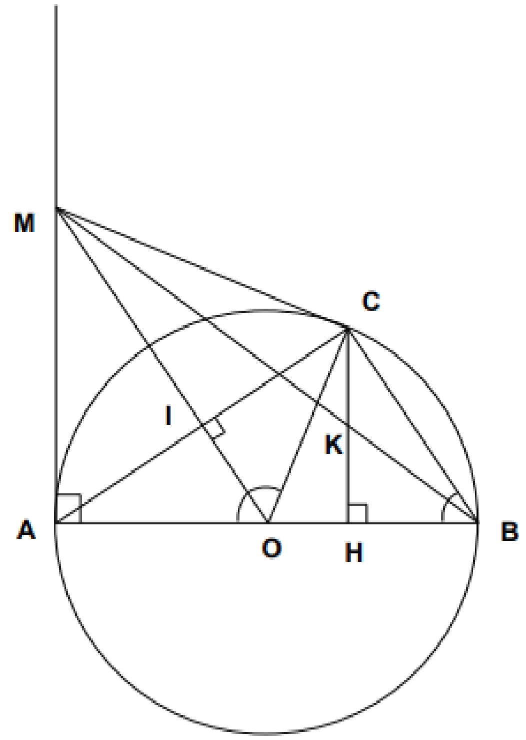
UBND HUYỆN MỘC CHÂU
TRƯỜNG TH&THCS TÂY TIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU

Bài	Nội dung	Điểm
1 **(5 đ)**	1. a) Với $x>0$; $x\neq 1$, ta có: $P=\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}+\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}+\frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $=\frac{x(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-1)+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$=\frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	1.b) $x=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$	0,5
	$P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$	0,5
	1.c) ĐK: $x>0$; $x\neq 1$: $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. $Ư(2)=\{-1;1;-2;2\}$	0,25
	Nếu $\sqrt{x}-1=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$(TM) Nếu $\sqrt{x}-1=-1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ (KTM) Nếu $\sqrt{x}-1=2\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$ (TM) Nếu $\sqrt{x}-1=-2\Leftrightarrow\sqrt{x}=-1$ (Vô lí)	0,25
	Vậy với $x=4$ hoặc $x=9$ thì P nhận giá trị nguyên.	0,25
	2.a) Giả sử đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(x_0,y_0\right)$ với mọi m. Ta có: $y_0=mx_0-2m-1$ với mọi m. $\Leftrightarrow mx_0-2m-1-y_0=0$ với mọi m. $\Leftrightarrow m\left(x_0-2\right)-\left(y_0+1\right)=0$ với mọi m. $\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-2=0\\y_0+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2\\y_0=-1\end{cases}$ Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm cố định $M(2;-1)$	0,5
	2.b) Đồ thị hàm số cắt hai trục Ox và Oy khi $m\neq 0$ và $-2m-1\neq 0$ Hay $m\neq 0$ và $m\neq\frac{-1}{2}$ A là giao điểm của đồ thị với trục Ox ta có $y=0$ thay vào hàm số ta được $x=\frac{2m+1}{m}$ B là giao điểm của đồ thị với trục Oy ta có $x=0$ thay vào hàm số ta được $y=-2m-1$ Vậy $A\left(\frac{2m+1}{m};0\right);B(0;-2m-1)$	0,5

	Diện tích tam giác là: $S=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\left\vert\frac{2m+1}{m}\right\vert\cdot\lvert-2m-1\rvert=\frac{(2m+1)^2}{2\lvert m\rvert}$ Mà $S=4\Leftrightarrow(2m+1)^2=8\lvert m\rvert$ +) Nếu $m>0$, ta có phương trình: $4m^2+4m+1=8m$ $\Leftrightarrow(2m-1)^2=0\Leftrightarrow 2m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}(TM)$ +) Nếu $m<0$, ta có phương trình: $4m^2+4m+1=-8m$ $\Leftrightarrow 4m^2+12m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}(TM)\\ m=\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}(TM)\end{array}\right.$ Vậy $m\in\left\{\frac{1}{2};\frac{-3+2\sqrt{2}}{2};\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}\right\}$	0,5 0,5
2 **(3 đ)**	a) $y^2+2xy-3x-2=0\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+3x+2\Leftrightarrow(x+y)^2=(x+1)(x+2)(*)$ Vế trái của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0. $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=1\\ x=-2\Rightarrow y=2\end{array}\right.$ Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(-2;2)$ thỏa mãn b) Vì $n^2+2n+12$ là số chính phương nên đặt $n^2+2n+12=k^2$ $(k\in N)$ $\Rightarrow\left(n^2+2n+1\right)+11=k^2\Leftrightarrow k^2-(n+1)^2=11$ $\Leftrightarrow(k+n+1)(k-n-1)=11$ Nhận thấy $k+n+1>k-n-1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết $(k+n+1)(k-n-1)=11.1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}k+n+1=11\\ k-n-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=6\\ n=4(TM)\end{cases}$ Vậy với $n=4$ thì $n^2+2n+12$ là số chính phương	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
3 **(4 đ)**	a) Giải phương trình: $x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$ ĐK: $x\ge\frac{2023}{2024}$ $x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}$ $\Rightarrow x^2-2x+1+2024x-2023-2\sqrt{2024x-2023}+1=0$ $\Leftrightarrow(x-1)^2+(\sqrt{2024x-2023}-1)^2=0$ Do $(x-1)^2\ge0$ và $(\sqrt{2024x-2023}-1)^2\ge0$ với mọi $x\ge\frac{2023}{2024}$ nên: $\begin{cases}x-1=0\\ \sqrt{2024x-2023}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \sqrt{2024x-2023}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2024x-2023=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0,25 0,25 0,5 0,5 0,5
	b) $\begin{cases}x+y+z=\sqrt{6}\,(1)\\ x^3+y^3+z^3=3xyz\,(2)\end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow\left(x^3+y^3\right)+z^3-3xyz=0$	0,5

	$\Leftrightarrow (x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz=0$ $\Leftrightarrow \left[(x+y)^3+z^3\right]-3x^2y-3xy^2-3xyz=0$ $\Leftrightarrow (x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)\cdot z+z^2\right]-\left(3x^2y+3xy^2+3xyz\right)=0$ $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2\right)-3xy(x+y+z)=0$ $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy\right)=0$ $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=0$ Kết hợp $(3),(1): x+y+z=\sqrt{6}$, ta có: $\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)=0$ $\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy\right)=0$ $\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$ $\Leftrightarrow \left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(z^2-2xz+x^2\right)=0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=0\\(y-z)^2=0\\(z-x)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\y-z=0\\z-x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z(4)$ Kết hợp $(4),(1): x+y+z=\sqrt{6}$, ta có: $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{3}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	0,5 0,5 0,5
4 **(6 đ)**		0,5
	a) Ta có $OI \perp AC$ (Đường kính đi qua trung điểm của dây cung), $CH \perp AB(gt)$. Suy ra: $CIO = CHO = 90^{\circ}$ vậy tứ giác CIOH là tứ giác nội tiếp, suy ra C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn. b) Xét ΔAOM và ΔCOM có: $OA = OC = R$	1,5 0,5

	OM là cạnh chung $AOM = COM$ (Vì ΔOCM cân tại O nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường phân giác) $\Rightarrow \mathrm{MC} \perp \mathrm{CO} \Rightarrow \mathrm{MC}$ là tiếp tuyến của $(O;R)$. c) Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$ Ta lại có: $(AC - CB)^2 \geq 0 \Rightarrow AC^2 + CB^2 \geq 2AC \cdot CB \Rightarrow 2AC^2 + 2B^2 \geq AC^2 + CB^2 + 2AC \cdot CB$ $2\left(AC^2 + CB^2\right) \geq (AC + CB)^2 \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2\left(AC^2 + CB^2\right)}$ $\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2}$ (Pitago) $\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2 \cdot 4R^2} \Rightarrow AC + CB \leq 2R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi $\mathrm{AC} = \mathrm{CB} \Leftrightarrow \mathrm{C}$ là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $P_{ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$. Dấu $"="$ xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AB Vậy $\max \mathrm{P}_{\mathrm{ACB}} = 2\mathrm{R}(1 + \sqrt{2})$ khi C là điểm chính giữa cung AB.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
5 **(2 đ)**	Vì $x, y, z > 0$ ta có: Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$ Tương tự ta có: $\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y(2); \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z(3)$ Cộng $(1),(2),(3)$ ta được $\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) + \frac{x+y+z}{2} \geq x + y + z$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq x + y + z - \frac{x+y+z}{2}$ $\Rightarrow P \geq (x + y + z) - \frac{x+y+z}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$ Dấu $"="$ xảy ra khi $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$ Vậy GTNN của P là $1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$	0,5 0,5 0,5 0,5

PHÒNG GD&ĐT HẠ HOÀ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi có 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: *(16 câu; 8,0 điểm)*

Câu 1. Cho a là nghiệm của phương trình $\sqrt{(x-3)(x-6)}-4\sqrt{3-x}=0$ với $x<3$. Khi đó a^2-a bằng

A. 110. **B.** 100. **C.** 90. **D.** -110.

Câu 2. Số các giá trị hữu tỉ của x để biểu thức $B=\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+1}$ nhận giá trị nguyên là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 3. Đường thẳng $(d): y=(2-2m)x+8m-10$ luôn đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ với mọi giá trị của m. Khi đó biểu thức $A=x_0^3+y_0^3$ có giá trị bằng

A. -56. **B.** 56. **C.** 72. **D.** -72.

Câu 4. Số các giá trị của m để phương trình $x^2-(m+1)x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm này bằng một nửa nghiệm kia là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-2;3); B(-4;-4); C(5;-1)$. Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Toạ độ của điểm H là

A. $\left(\frac{1}{10};\frac{-28}{10}\right)$. **B.** $(-3;7)$. **C.** $\left(\frac{-1}{10};\frac{-27}{10}\right)$. **D.** $(-3;4)$.

Câu 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=m-2 \\ (m-1)^2x-y=m^2-1 \end{cases}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên là

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (với m là tham số) cắt nhau tại A và B. Giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất là

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 8. Cho phương trình $x^2-2x+m-1=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=2m^2+|m-3|$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên vuông góc với nhau. Kẻ $AH \perp CD (H \in CD)$. Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

A. $AH^2=HD.HC.$ **B.** $AH^2=AD.BC.$

C. $AH\left(DC-AB\right)=AD.BC.$ **D.** $AH.DC=AD.BC.$

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD.$ Gọi M là trung điểm của $BC.$ Giá trị của $\sin AMD$ là

A. $\frac{4}{5}.$ **B.** $\frac{3}{5}.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB=14cm;\ AC=35cm,$ đường phân giác AD bằng $12cm.$ Diện tích của tam giác ADC là

A. $588\ cm^2.$ **B.** $440\ cm^2.$ **C.** $84\ cm^2.$ **D.** $168\ cm^2.$

Câu 12. Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành $AMON$ sao cho $M\in AB;O\in BC;N\in AC.$ Biết $S_{MOB}=a^2;S_{NOC}=b^2$ (đvdt). Diện tích S của hình bình hành $AMON$ bằng bao nhiêu ?

A. $S=ab.$ **B.** $S=2ab.$ **C.** $S=0,5\left(a^2+b^2\right).$ **D.** $S=\left(a^2+b^2\right).$

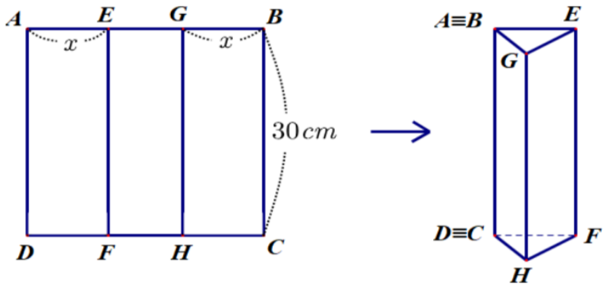
Câu 13. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $\left(O;R\right)$ có $AB=130cm;$ $BC=110cm;$ $AD=90cm.$ Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $60cm.$ **B.** $70cm.$ **C.** $80cm.$ **D.** $100cm.$

Câu 14. Cho hai đường tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';r\right)$ tiếp xúc ngoài tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d lần lượt tại các tiếp điểm S và T. Khi đó độ dài AT bằng

A. $\frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}.$ **B.** $\frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}.$ **C.** $\frac{4R^2r}{\sqrt{R+r}}.$ **D.** $\frac{4Rr^2}{\sqrt{R+r}}.$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $30\ cm.$ Trên cạnh AB lấy hai điểm E,G sao cho $AE=BG=x\ \left(cm\right)$ và điểm E nằm giữa hai điểm A và điểm $G.$ Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại $F.$ Qua G kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại H. Người ta gập hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng với cạnh BC như hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



A. $10\ cm.$ **B.** $3\ cm.$ **C.** $15\ cm.$ **D.** $5\ cm.$

Câu 16. Trong một đề thi có 3 bài toán (bài 1, bài 2, bài 3). Có 25 thí sinh tham gia giải đề, mỗi thí sinh đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài toán đó. Biết rằng, trong số thí sinh không giải được bài 1 thì số thí sinh đã giải được bài 2 nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài 3. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 nhiều hơn số thí sinh giải được bài 1 và thêm bài khác là một thí sinh. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 bằng số thí sinh chỉ giải được bài 2 cộng với số thí sinh chỉ giải được bài 3. Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài 2?

A. 4 thí sinh. **B.** 5 thí sinh. **C.** 6 thí sinh. **D.** 8 thí sinh.

II. PHẦN TỰ LUẬN: ***(4 câu; 12,0 điểm)***

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^2 + 2y - 3 = x^2 - 3x$.

b) Cho hai số tự nhiên a,b thỏa mãn $b > a$ và $(2a-1)^2 = 12b^2 - 4ab - a^2$.

Chứng minh rằng: $6b + a$ là một số chính phương.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho các số thực $a;b;c$ thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4;$

$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1$ (với $abc \neq 0; (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$).

Tính giá trị của biểu thức: $P = abc.$

b) Giải phương trình: $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (2-x)\sqrt[3]{x^4 - x^2}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 \\ (y-3)^5 + (x+3)^5 = (2x+1)^5 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm).

Cho $(O;R)$ và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$, đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE với OA.

a) Chứng minh rằng $AK.AI = AE.AC$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.

Câu 4 (1,0 điểm).

Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$.

--------------------- **Hết** ---------------------

Họ và tên thí sinh:..SBD:..................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHÒNG GD&ĐT HẠ HÒA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán
HƯỚNG DẪN CHẤM CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm có 07 trang)

I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận.

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – Thang điểm.

Phần I. TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm).

Mỗi câu trắc nghiệm đúng được 0,5 điểm

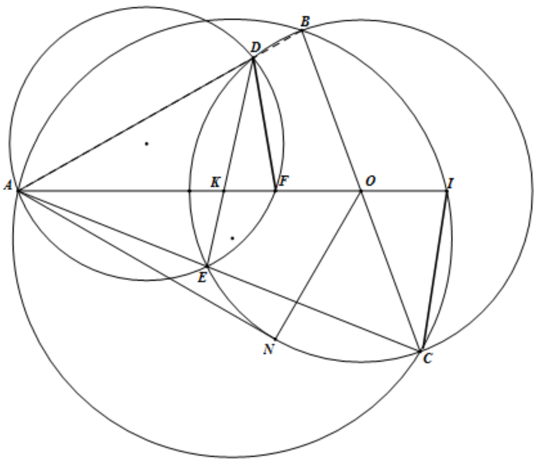
Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đ Án	**A**	**C**	**B**	**C**	**C**	**C**	**D**	**C**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**	**B**	**A**	**C**
Điểm	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Phần II. TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Câu	**NỘI DUNG**	**Điểm**
Câu 1 **3,0 Điểm**	a)Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^2+2y-3=x^2-3x$.	**1,5**
	PT $\Leftrightarrow 4y^2+8y-12=4x^2-12x \Leftrightarrow (2y+2)^2-(2x-3)^2=7$ $\Leftrightarrow (2y+2x-1)(2y-2x+5)=7$	0,5
	Với x, y nguyên dương thì $2y+2x-1>0$. Nên ta có $\begin{cases}2y+2x-1=1\\2y-2x+5=7\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2y+2x-1=7\\2y-2x+5=1\end{cases}$.	0,5
	Trường hợp 1: $\begin{cases}2y+2x-1=1\\2y-2x+5=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=-6\\2y+2x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ (loại). Trường hợp 2: $\begin{cases}2y+2x-1=7\\2y-2x+5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=6\\2y+2x-1=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ (TM). Vậy phương trình có nghiệm là $(x;y)=(3;1)$.	0,5
	b) Cho hai số tự nhiên a,b thỏa mãn $b>a$ và $(2a-1)^2=12b^2-4ab-a^2$. Chứng minh rằng: $6b+a$ là một số chính phương.	**1,5**
	Ta có $(2a-1)^2=12b^2-4ab-a^2 \Leftrightarrow (2a-1)^2=(2b-a)(6b+a)$	0,25
	Vì $(2a-1)^2$ là số chính phương lẻ nên $2b-a; 6b+a$ là các số tự nhiên $\Rightarrow a$ lẻ	0,25
	Gọi $d=(2b-a;\ 6b+a)$ với $d\in\mathbb{N}^* \Rightarrow d$ lẻ.	0,25
	Suy ra $\begin{cases}2b-a\,\vdots\,d\\6b+a\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6b-3a\,\vdots\,d\\6b+a\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow 4a\,\vdots\,d$	0,25

	Mặt khác $\begin{cases}2b-a\vdots d\\ 6b+a\vdots d\end{cases}\Rightarrow(2b-a)(6b+a)\vdots d^2$ suy ra $(2a-1)^2\vdots d^2\Rightarrow 2a-1\Rightarrow 4a-2\vdots d\Rightarrow 4a-(4a-2)\vdots d\Rightarrow 2\vdots d\Rightarrow d\in\{1;2\}$ Mà d lẻ nên $d=1$. Hay $(2b-a;\,6b+a)=1$.	0,25
	Từ đó suy ra $2b-a;6b+a$ đều là số chính phương. Vậy $6b+a$ là một số chính phương.	0,25
Câu 2 4,0 Điểm	a) Cho các số thực $a;b;c$ thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=4;$ $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$ (với $abc\neq 0;\,(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$). Tính giá trị của biểu thức $P=abc$.	**1,0**
	Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=4\Rightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=7$ $\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=7$	0,25
	Suy ra $a+b+c=7$ (1) (vì $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$) Mặt khác từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4\Rightarrow ab+bc+ca=4abc$ (2)	0,25
	Ta lại có $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$ $\Rightarrow(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)$ Hay $a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca=(a+b)(b+c)(c+a)$ $\Leftrightarrow(a+b+c)^2+ab+bc+ca=(a+b)(b+c)(c+a)$ $\Leftrightarrow(a+b+c)^2+ab+bc+ca=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ (3)	0,25
	Từ (1); (2) và (3) suy ra $7^2+4abc=7.4abc-abc\Rightarrow 23abc=49\Rightarrow abc=\frac{49}{23}$	0,25
	b) Giải phương trình: $x^3-4x^2+3x+2=(2-x)\sqrt[3]{x^4-x^2}$ (*)	**1,5**
	PT (*) $\Leftrightarrow x^3-4x^2+4x-x+2=(2-x)\sqrt[3]{x^4-x^2}$ $\Leftrightarrow x(x-2)^2-(x-2)+(x-2)\sqrt[3]{x^4-x^2}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-2x-1+\sqrt[3]{x^4-x^2}\right)=0$	0,25
	TH1: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$	0,25
	TH2: $x^2-2x-1+\sqrt[3]{x^4-x^2}=0$ Ta có $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Với $x\neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình cho x ta được: $x-\frac{1}{x}-2+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=0$.	0,25
	Đặt $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=y$ ta có PT: $y^3+y-2=0\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y+2)=0$	0,5

	$\Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1 \quad \left(Do\ y^2+y+2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \right)$	
	Với $y=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \quad (TM)$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2;\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	0,25
	c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+3x-12y+7=3x^2-6y^2 \ (1) \\ (y-3)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5 \quad (2) \end{cases}$	**1,5**
	Từ PT(1) ta có $(x-1)^3=(y-2)^3 \Leftrightarrow x-1=y-2 \Leftrightarrow y=x+1 \quad (3)$	0,25
	Thay(3) vào(2) ta được pt: $(x+1-3)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5$ $\Leftrightarrow (x-2)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5$ (*)	0,25
	Đặt $a=x-2; b=x+3 \Rightarrow a+b=2x+1$ thay vào (*) ta được $a^5+b^5=(a+b)^5$ $\Leftrightarrow a^5+b^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ $\Leftrightarrow 5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=0$ $\Leftrightarrow 5ab\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)=0$ $\Leftrightarrow 5ab\left[(a+b)^3-ab(a+b)\right]=0$ $\Leftrightarrow 5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)=0$	0,5
	+) Với $a=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ suy ra $y=2+1=3$. +) Với $b=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$ suy ra $y=-3+1=-2$. +) Với $a+b=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ suy ra $y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. +) Với $a^2+ab+b^2=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow x-2=x+3=0$ (vô lí). Vậy $S=\left\{(2;3);(-3;-2);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$	0,5
Câu 3 4,0 Điểm	Cho $(O;R)$ và điểm A cố định sao cho $OA=2R$, đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE với OA. a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$. b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R. c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc một đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.	**4,0**

		
	a) Chứng minh rằng $AK.AI = AE.AC.$	**1,5**
	Ta có tứ giác $BDEC$ nội tiếp $\Rightarrow ABC = AED = AEK$ (1)	0,25
	Ta lại có tứ giác $ABIC$ nội tiếp $\Rightarrow ABC = AIC$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $AIC = AEK$	0,25
	Mà CAI *chung*	0,25
	$\Rightarrow \Delta AEK \backsim \Delta AIC(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AI}{AC} \Rightarrow AK.AI = AE.AC$	0,5
	b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo $R.$	**1,5**
	Xét ΔBOI và ΔAOC có $IBC = IAC; BOI = AOC \Rightarrow \Delta BOI \backsim \Delta AOC(g.g)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OI}{OC} \Rightarrow OI = \frac{OB.OC}{OA} = \frac{R.R}{2R} = \frac{R}{2} \Rightarrow AI = AO + OI = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2}$	0,25
	Kẻ tiếp tuyến AN của $(O;R)$. Dễ có $\Delta AEN \backsim \Delta ANC(g.g) \Rightarrow AN^2 = AE.AC$	0,5
	Xét tam giác AON vuông tại N có $AN^2 = AO^2 - ON^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AE.AC = AN^2 = 3R^2$	0,25
	Theo câu a) ta có $AK = \frac{AE.AC}{AI} = \frac{3R^2}{\frac{5R}{2}} = \frac{6R}{5}$. Vậy $AK = \frac{6R}{5}$.	0,25
	c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc một đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.	**1,0**
	Gọi F là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với AI. Ta có $AFD = AED$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)	0,25
	Mà $AED = ABC$ ($BDEC$ nội tiếp) $AFD = ABC$. Suy ra tứ giác $BDFO$ nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow AF.AO = AD.AB \text{ và } AN^2 = AD.AB \Rightarrow AF.AO = AN^2$ $\Rightarrow AF = \frac{AN^2}{AO} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2}$	0,25
	Do AF không đổi, mà A cố định nên F cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AF cố định.	0,25

Câu 4 1,0 Điểm	Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2c+2}$	**1,0**
	Ta có: $ab+bc+ca+abc=2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)+(b+1)+(c+1)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(c+1)}+\frac{1}{(c+1)(a+1)}=1$ vì $a,b,c>0$ $M=\frac{a+1}{(a+1)^2+1}+\frac{b+1}{(b+1)^2+1}+\frac{c+1}{(c+1)^2+1}=\frac{\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{(a+1)^2}}+\frac{\frac{1}{b+1}}{1+\frac{1}{(b+1)^2}}+\frac{\frac{1}{c+1}}{1+\frac{1}{(c+1)^2}}$ Đặt $\frac{1}{a+1}=x;\ \frac{1}{b+1}=y;\ \frac{1}{c+1}=z$ Khi đó : $xy+yz+zx=1$ và $M=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$	0,25
	Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+z)(x+y)$ Tương tự $1+y^2=(y+x)(y+z)$; $1+z^2=(z+x)(z+y)$ Khi đó $M=\frac{x}{(x+y)(z+x)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(z+x)(y+z)}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ $M=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$	0,25
	Dễ dang chứng minh được $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$ $\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y)(y+z)(z+x)+8xyz$ $\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$ $\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)$. (vì $xy+yz+zx=1$)	0,25
	Mặt khác: $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\Rightarrow (x+y+z)^2\geq 3\Leftrightarrow x+y+z\geq\sqrt{3}$ $\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8\sqrt{3}\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\geq\frac{8\sqrt{3}}{9}$ $\Rightarrow \frac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\frac{9}{8\sqrt{3}}$ $\Rightarrow M=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\frac{18}{8\sqrt{3}}=\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}-1$	0,25

........................Hết........................

Hướng dẫn Câu 16:

Gọi a số thí sinh chỉ giải được bài 1, b là số thí sinh chỉ giải được bài 2, c là số thí sinh chỉ giải được bài 3, d là số thí sinh giải được 2 bài bài 2 và bài 3 nhưng không giải được bài 1. Khi đó số thí sinh giải được bài 1 và thêm ít nhất một bài trong hai bài còn lại (bài 2 và bài 3) là:

$25 - a - b - c - d$

Từ giả thiết ta có $b + d = 2(c + d)$; $a = 1 + 25 - a - b - c - d$ và $a = b + c$.

Suy ra $\begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 7 \\ 8b + 2c = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 7 \\ 52 < 9b \end{cases} \Rightarrow b = 6; c = 2$

Đáp số 6 thí sinh

PHÒNG GD&ĐT TP VINH **KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

Môn thi: Toán

TRƯỜNG THCS ĐẶNG THAI MAI Thời gian làm bài: ***150 phút***

Bài 1 ***(4,0 điểm).***

a) Cho biểu thức $A=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$. Rút gọn $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\frac{1}{4}$.

b) Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn $x-2y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}.$$

Bài 2 ***(6,0 điểm).*** a) Giải phương trình $3x^2+6=9x-2x\sqrt{x-2}$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1}+(x+3)\sqrt{x+4}=x^2+x$.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2+7y^2=61+4x$.

d) Cho hai số nguyên dương a,b thỏa mãn $a>b$ và $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a,b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 3 ***(2,0 điểm).*** a) Cho $a,b\ge 0, ab=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\le 2(a+b).$$

b) Cho ba số không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc+\frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

Bài 4 ***(7,0 điểm).*** Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH. Gọi E,F là các điểm lần lượt thuộc các tia HC,HB sao cho $\angle EAB=\angle FAC=90^o$.

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{FB}{CE}$.

b) Gọi P thuộc đoạn thẳng AH ($P\ne A; P\ne H$). Trên tia đối của tia PE lấy điểm M sao cho $BM=BA$. Trên tia đối của tia PF lấy N sao cho $CN=CA$. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với PF cắt đường thẳng AH tại K. Chứng minh $BP\perp KE$.

c) Các đường thẳng BM,CN cắt nhau tại S. Chứng minh $SM=SN$.

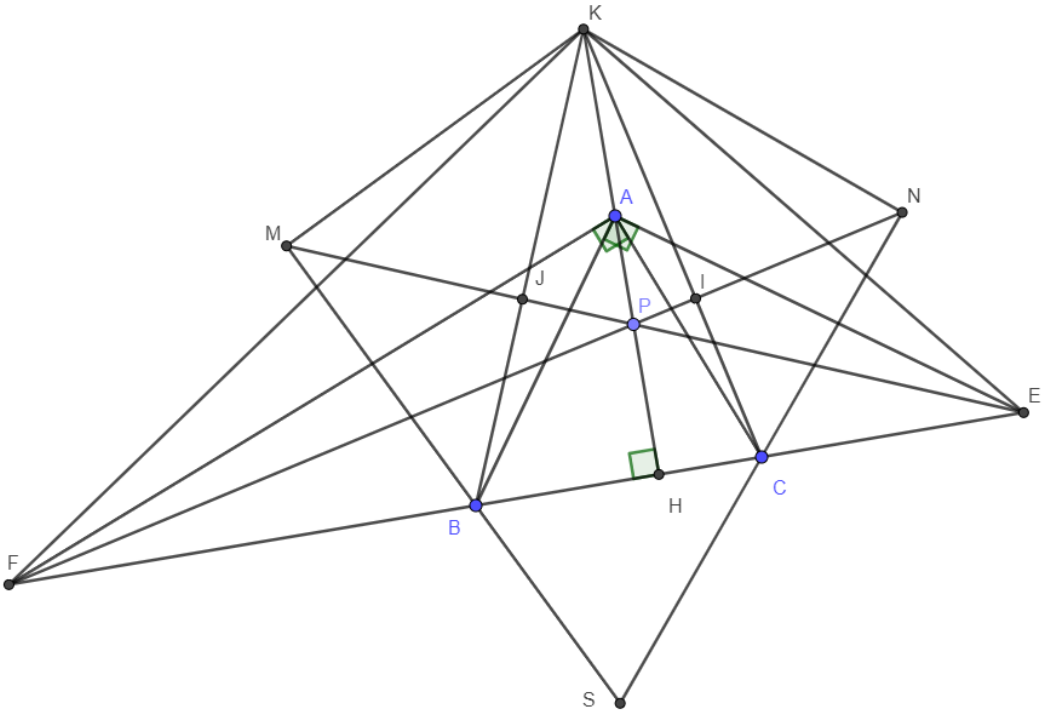
Bài 5 ***(1,0 điểm).*** Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Hết

ĐÁP ÁN

Bài	Câu	Đáp án	Điểm
1	a	Rút gọn A=2x	1
		Thay vào $B=1-\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}$ $=1-\left\|2\sqrt{x}-1\right\|$ $=1-\left(1-2\sqrt{x}\right)$ $=2\sqrt{x}$	0,5 0,5
	b)	Ta có $2y=x+z$ $\Leftrightarrow (x+z)+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=2y+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}+2\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$	0,5 0,5 0,5 0,5
2	a	ĐKXĐ: $x\ge 2$.	0,25
		Phương trình đã cho tương đương với $4x^2-8x+4=x^2-2x\sqrt{x-2}+x-2$ $\Leftrightarrow (2x-2)^2=\left(x-\sqrt{x-2}\right)^2$	0,5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=x-\sqrt{x-2}\\2x-2=\sqrt{x-2}-x\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=-\sqrt{x-2}\,(1)\\3x-2=\sqrt{x-2}\,(2)\end{array}\right.$	0,25
		Với $x\ge 2, VT(1)\ge 0\ge VP(1)$ Để (1) xảy ra thì $x=2$.	0,5
		Phương trình (2) tương đương với $3(x-2)-\sqrt{x-2}+4=0\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+5\sqrt{x-2}+1=0$ (vô nghiệm vì vế trái dương với mọi $x\ge 2$.	0,5
		Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{2\}$.	
	b	Điều kiện $x\ge 1$.	0,25
		$(1)\Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x-1}-2\right)+(x+3)\left(\sqrt{x+4}-3\right)=x^2-4x-5$	0,5

		$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3}=(x-5)(x+1)$ $\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}-x-1\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}=x+1\,(2) \end{array}\right.$	
		Ta có $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2}<\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+2}\leq\frac{x-1}{2};\ \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3}\leq\frac{x+3}{3}$. Suy ra $VT(2)<\frac{x-1}{2}+\frac{x+3}{3}=\frac{5x+3}{6}<\frac{6x+6}{6}=x+1=VP(2)$. Do đó (2) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{5\}$.	0,25
	c	$2x^2+7y^2=61+4x$ $\Leftrightarrow 2(x-1)^2+7y^2=63$ $\Rightarrow 7y^2\leq 63 \Rightarrow y^2\leq 9$ $\Rightarrow y^2\in\{0;1;4;9\}$	0,5 0,5
		Mà 65 lẻ, $2(x-1)^2$ chẵn nên $\Rightarrow y^2\in\{1;9\}$. TH1: $y^2=1\Rightarrow (x-1)^2=28$ (loại). TH2: $y^2=9\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow y=\pm3; x=1$	0,25 0,25 0,25
		Vậy $(x;y)\in\{(1;3);(1;-3)\}$	0,25
	d	$a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow (a-b-1)^2=4a\Leftrightarrow a=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2$ $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)\Leftrightarrow b=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2$	0,5
		Suy ra a, b đều chính phương. Lại có $\frac{a-b+1}{2}-\frac{a-b-1}{2}=1$ nên a,b là hai số chính phương liên tiếp.	0,5
3	a	Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt{2(a^2+1)}=\sqrt{2(a^2+ab)}=\sqrt{2(a+b)a}=\sqrt{2\text{a}(a+b)}\leq\frac{2\text{a}+a+b}{2}=\frac{3\text{a}}{2}+\frac{b}{2}$. Tương tự, ta có $\sqrt{2(b^2+1)}\leq\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}$. Do đó $\sqrt{2(a^2+1)}+\sqrt{2(b^2+1)}\leq 2\text{a}+2b=2(a+b)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.	0,5 0,25 0,25

	b	Ta có $\lvert a-b\rvert \le \lvert a\rvert+\lvert b\rvert=a+b$. Tương tự $\lvert b-c\rvert \le \lvert b\rvert+\lvert c\rvert=b+c;\lvert c-a\rvert \le \lvert c\rvert+\lvert a\rvert=c+a$.	0,25
		Suy ra $2\left(a+b+c\right)\ge \lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert+\lvert c-a\rvert \ge 3\sqrt[3]{\lvert\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\rvert}$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $\lvert a-b\rvert,\lvert b-c\rvert,\lvert c-a\rvert$). (1)	0,25
		Lại có $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2$ $\ge 3\sqrt[3]{\left(a-b\right)^2\left(b-c\right)^2\left(c-a\right)^2}$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $\left(a-b\right)^2,\left(b-c\right)^2,\left(c-a\right)^2$). (2) Nhân theo vế (1) và (2) suy ra $4\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)\ge 9\lvert\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\rvert \Rightarrow a^3+b^3+c^3$ $\ge 3abc+\frac{9}{4}\lvert\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\rvert$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c	0,25 0,25
4			
	a	a) Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: $HB.HE=AH^2$ Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: $HC.HF=AH^2$	0,5 0,5
		Từ đây ta suy ra $HB.HE=HC.HF$ $\Rightarrow \frac{HB}{HC}=\frac{HF}{HE}=\frac{HF-HB}{HE-HC}=\frac{FB}{CE}$	1 1

	b	Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN. Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm. Khi đó $\Delta HPF \backsim \Delta HCK\left(g.g\right) \Rightarrow HP.HK = HF.HC$	0,5
		Lại có $HF.HC = HE.HB \Rightarrow HP.HK = HE.HB \Rightarrow \Delta HBK \backsim \Delta HPE\left(c.g.c\right)$. $\Rightarrow \angle KBH = \angle HPE \Rightarrow \angle JKP + \angle KPJ = \angle JKP + \angle KBH = 90^o \Rightarrow EJ \perp BK$ Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.	0,5 0,5
		Do đó $BP \perp KE$	0,5
	c	Ta có $BM = BA \Rightarrow BM^2 = BA^2 = BH.BC = BJ.BK \Rightarrow BM \perp MK$	1,0
		$\Rightarrow KM^2 = KJ.KB = KI.KC = KN^2$	0,5
		$\Rightarrow KS^2 - KM^2 = KS^2 - KN^2 \Rightarrow MS = NS$	0,5
5		Bài 5- Theo nguyên lý Đi rích lê, 5=2.2+1 nên trong năm số có ba số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ. Vì 3=2.1+1 nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ. Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	0,5 0,5

PHÒNG GD&ĐT LÂM THAO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 – 2024
MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 03 trang)

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm): Hãy chọn phương án trả lời đúng

Câu 1. Cho a,b là các số tự nhiên thỏa mãn $\sqrt{23+\sqrt{448}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. 305. **B.** 65. **C.** 11. **D.** 263.

Câu 2. Cho $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}$. Biểu thức $T=f(2)+f(3)+f(4)+.....+f(100)$ có giá trị bằng

A. $\frac{9949}{100}$. **B.** $\frac{9849}{100}$. **C.** $\frac{20097}{202}$. **D.** $\frac{20299}{202}$.

Câu 3. Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x-3}-2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-1$ khi $3\le x\le 7$. **B.** $P=-1$ khi $3\le x<7$.

C. $P=-1$ khi $x>7$. **D.** $P=-1$ khi $x\ne 3$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x\sqrt{9-2x}+(3-x)\sqrt{2x+3}$ với $0\le x\le 3$ là

A. $\sqrt{7}+2\sqrt{5}$. **B.** $2+2\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 5. Cho hai đường thẳng: $(d): y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ và $(d'): y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng trên, B và C lần lượt là giao điểm của $(d)\,;(d')$ với trục hoành. Khi đó BAC bằng

A. 125^0. **B.** 135^0. **C.** 134^0. **D.** 136^0.

Câu 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $(d_1): y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$, $(d_2): y=\frac{-1}{6}x-\frac{2}{3}$, $(d_3):(3m+2)x-2my=0$. Giá trị của m để ba đường thẳng đã cho đồng quy là

A. $\frac{-1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$ và $\frac{-2}{3}$. **D.** $\frac{-2}{3}$.

Câu 7. Biết điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y=(2m-3)x+4m-3$ luôn đi qua với mọi giá trị của m. Giá trị của biểu thức $A=x_0^3+y_0^3$ bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 8. Giá trị của m để ba điểm $A(-1;-8)$, $B(2;1)$, $C(-2;19-3m)$ thẳng hàng

A. $m=14$. **B.** $m=12$. **C.** $m=13$. **D.** $m=10$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB=6cm, AC=4cm$, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB. Độ dài HE là

A. $\frac{36}{13}cm$. **B.** $\frac{60}{13}cm$. **C.** $\frac{18}{13}cm$. **D.** $\frac{36}{\sqrt{13}}cm$.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 3BC; E \in BC$, tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{9AF^2}$. **B.** $\dfrac{1}{3AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{9AF^2}$.

C. $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{9}{AF^2}$. **D.** $\dfrac{1}{9AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{3AF^2}$.

Câu 11. Cho tam giác $\Delta ABC,\ B = 45^0, A = 105^0,\ BC = 16cm$. Độ dài AB là

A. $8\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)cm.$ **B.** $8\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)cm.$ **C.** $8\left(\sqrt{3} - 1\right)\ cm.$ **D.** $16\left(\sqrt{3} - 1\right)\ cm.$

Câu 12. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M kẻ dây cung CD, qua N kẻ dây cung EF sao cho $CD // EF$ (C, F cùng thuộc nửa đường tròn đường kính AB) và $CMO = 30^0$. Diện tích tứ giác $CDEF$ theo R là

A. $\dfrac{R^2\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\dfrac{R^2\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\dfrac{R^2\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\dfrac{3R^2\sqrt{15}}{8}$.

Câu 13. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 3\sqrt{2}\,cm$, đường kính AB. Hai điểm C, D thuộc 2 nửa đường tròn đường kính AB. Chu vi tứ giác $ACBD$ lớn nhất là

A. $24\sqrt{2}\ cm.$ **B.** $20\sqrt{2}\ cm.$ **C.** $24\ cm.$ **D.** $32cm.$

Câu 14. Một hình hộp chữ nhật có đường chéo lớn bằng $17cm$, các kích thước của đáy lần lượt bằng $9cm, 12cm$. Thể tích hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $846\,cm^3$. **B.** $864\,cm^3$. **C.** $816\,cm^2$. **D.** $186\,cm^3$.

Câu 15. Khảo sát 45 học sinh lớp 9A của một trường THCS. Có 30 học sinh thích học môn Toán, 26 học sinh thích học môn Ngữ Văn, 32 học sinh thích học môn Tiếng Anh, 18 học sinh thích học 2 môn Toán và Ngữ văn, 24 học sinh thích học 2 môn Toán và Tiếng Anh, 20 học sinh thích học 2 môn Ngữ Văn và Tiếng Anh, 5 học sinh không thích học môn nào trong ba môn trên. Số học sinh thích học cả 3 môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh là

A. 10 *em.* **B.** 12 *em.* **C.** 16 *em.* **D.** 14*em.*

Câu 16. Bác An gửi tiền vào ngân hàng lãi xuất 0,5% trên 1 tháng lãi kép (lãi hàng tháng không rút ra) sau 5 năm bác An đó rút ra được $323724036,6$ đồng (cả gốc và lãi). Hỏi ban đầu bác An đã gửi bao nhiêu tiền

A. 250000000 đồng. **B.** 220000000 đồng.

C. 240000000 đồng. **D.** 280000000 đồng.

II. TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1. *(3,0 điểm):*

a) Chứng minh rằng nếu n và $n^2 + 2$ là số nguyên tố thì $n^3 + 2$ cũng là số nguyên tố.

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{abc}}$. Tính giá trị của biểu thức: $M = \dfrac{\sqrt{ab}}{1+c} + \dfrac{\sqrt{bc}}{1+a} + \dfrac{\sqrt{ac}}{1+b} + \sqrt{abc}\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(1+c)} + \dfrac{1}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)(1+a)}\right]$

Câu 2. *(3,5 điểm):*

a) Tìm nghiệm nguyên x, y của phương trình: $2x^2 + y - 15 = x(5 - 2y)$

b) Giải phương trình: $x^2 + 5x + 5 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Câu 3. *(4,0 điểm):*

Cho đường tròn $(O; R)$, và đường thẳng (d) cắt (O) tại 2 điểm A và B sao cho dây $AB = R\sqrt{3}$. Điểm M di động trên đường thẳng (d) (M nằm ngoài (O)), kẻ hai tiếp tuyến $MC; MD$ với đường tròn (O) (C, D là hai tiếp điểm). MO cắt (O) tại K (K nằm giữa M và O).

a) Khi $OM = 2R$. Chứng minh tam giác MCD đều và tứ giác $CKDO$ là hình thoi.

b) Gọi H là trung điểm AB. Chứng minh rằng 5 điểm M, C, O, H, D nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn này thuộc đường thẳng cố định.

c) Gọi CD cắt OH tại N. Chứng minh diện tích tam giác NAB không đổi.

d) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt MC, MD tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng (d) để diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

Câu 4. *(1,5 điểm):*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $2a + 3b + 4c \le 24abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{\sqrt{4a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{9b^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{16c^2 + 1}}$.

------------------------- Hết--------------------------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh ....

Lưu ý: Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay.

PHÒNG GD&ĐT LÂM THAO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 - 2024
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 9

A. Một số chú ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài cách khác với Hướng dẫn chấm mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa, tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với biểu điểm của Hướng dẫn chấm.
- **Điểm bài thi** là tổng các điểm thành phần không làm tròn số.

B. HƯỚNG DẪN CHẤM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm): Mỗi câu đúng 0,5 điểm

1. A	**2. C**	**3. B**	**4. D**	**5. B**	**6. A**	**7. C**	**8. D**
9. A	**10. A**	**11. B**	**12. C**	**13. C**	**14. B**	**15. D**	**16. C**

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1. *(3,0 điểm):*

a) Chứng minh rằng nếu n và n^2+2 là số nguyên tố thì n^3+2 cũng là số nguyên tố.

b) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{abc}}$. Tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{\sqrt{ab}}{1+c}+\frac{\sqrt{bc}}{1+a}+\frac{\sqrt{ac}}{1+b}+\sqrt{abc}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(1+c\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(1+a\right)}\right]$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
a) (1,5 điểm) +) Với n = 2, ta có $n^2+2=4+2=6$ không phải là số nguyên tố, không thỏa mãn giả thiết bài toán. +) Với n = 3, ta có $n^2+2=9+2=11$ là số nguyên tố, khi đó $n^3+2=3^3+2=29$ là số nguyên tố nên thỏa mãn bài toán	0,5
+) Với n là số nguyên tố lớn hơn 3 thì n không chia hết cho 3 nên n có các dạng $3k+1;3k+2$ với $k\in\mathbb{N}^*$. Khi n=$3k+1$, ta có $n^2+2=\left(3k+1\right)^2+2=(9k^2+6k+3)\vdots 3$ mà $n^2+2>3$ suy ra n^2+2 là hợp số nên không thỏa mãn giả thiết bài toán.	0,5

Khi n=$3k+2$, ta có $n^2+2=(3k+2)^2+2=(9k^2+12k+6)\vdots 3$ mà $n^2+2>3$ suy ra n^2+3 là hợp số nên không thỏa mãn giả thiết bài toán.

+) Vậy để n và n^2+2 đều là các số nguyên tố thì n = 3, khi đó $n^3+2=29$ là số nguyên tố

0,5

b) (1,5 điểm)

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{abc}} \Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}=1$

0,25

$$1+a=a+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$$

$$1+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right);1+c=\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

0,5

$$M=\frac{\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{bc}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}+\frac{\sqrt{ac}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

$$+\frac{2\sqrt{abc}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}$$

$$M=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{ac}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+2\sqrt{abc}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}$$

0,25

$$T=\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\sqrt{ac}\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)+2\sqrt{abc}$$

$$T=\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+b\sqrt{c}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c}+c\sqrt{a}+2\sqrt{abc}$$

$$T=\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

$$T=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{ab}+c+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)$$

$$M=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}=1$$

0,5

Câu 2 *(3,5 điểm):*

a) Tìm nghiệm nguyên x,y của phương trình: $2x^2+y-15=x(5-2y)$

b**)** Giải phương trình : $x^2+5x+5=(x+4)\sqrt{x^2+2x+2}$

ĐÁP ÁN | **ĐIỂM**

a) (1,5 điểm): Ta có

$$2x^2+y-15=x(5-2y) \Leftrightarrow 2x^2+x+2xy+y-6x-3=12 \Leftrightarrow (2x+1)(x+y-3)=12$$

0,5

Ta có $2x+1$; x + y-3 là Ư(12) ; $2x+1$ lẻ ta có bảng sau

2x+1	-3	-1	1	3
x+y-3	-4	-12	12	4
x	-2	-1	0	1
y	1	-8	15	6

0,75

Phương trình có 4 nghiệm $(x;y)\in\{(-2;1);(-1;-8);(0;15);(1;6)\ \}$	0,25
b) (2,0 điểm) Điều kiện: $x^2+2x+2\geq 0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+1\geq 0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $\left(2\right)\Leftrightarrow x^2+5x+5-3\left(x-4\right)=\left(x+4\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)$ $\Leftrightarrow x^2+2x-7=\left(x+4\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)\Leftrightarrow x^2+2x-7=\dfrac{\left(x+4\right)\left(x^2+2x+2-9\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}$ $\Leftrightarrow x^2+2x-7=\dfrac{\left(x+4\right)\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}\Leftrightarrow\left(x^2+2x-7\right)\left[1-\dfrac{\left(x+4\right)\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}\right]=0$	0,5
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-7=0\qquad(*)\\1-\dfrac{\left(x+4\right)\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}=0\ \ \left(**\right)\end{array}\right.$	0,5
Giải phương trình (*): $x^2+2x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1+2\sqrt{2}\\x=-1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$ (kiểm tra cả 2 nghiệm đều thỏa mãn	0,5
Giải phương trình (**): $\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}=1$ $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}+3=x+4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}=x+1$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x^2+2x+2=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\2=1\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1+2\sqrt{2};-1-2\sqrt{2}\right\}$	0,5

Câu 3. *(4,0 điểm):*

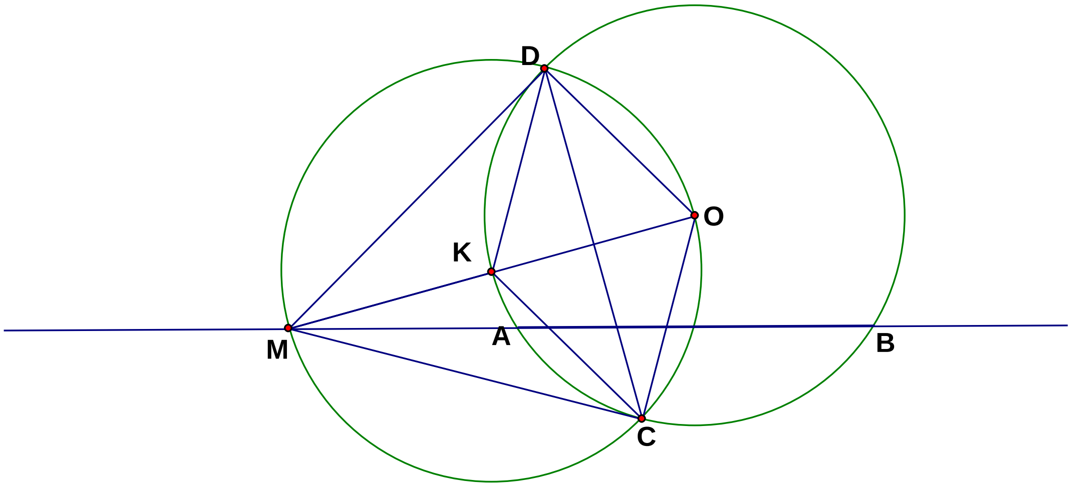
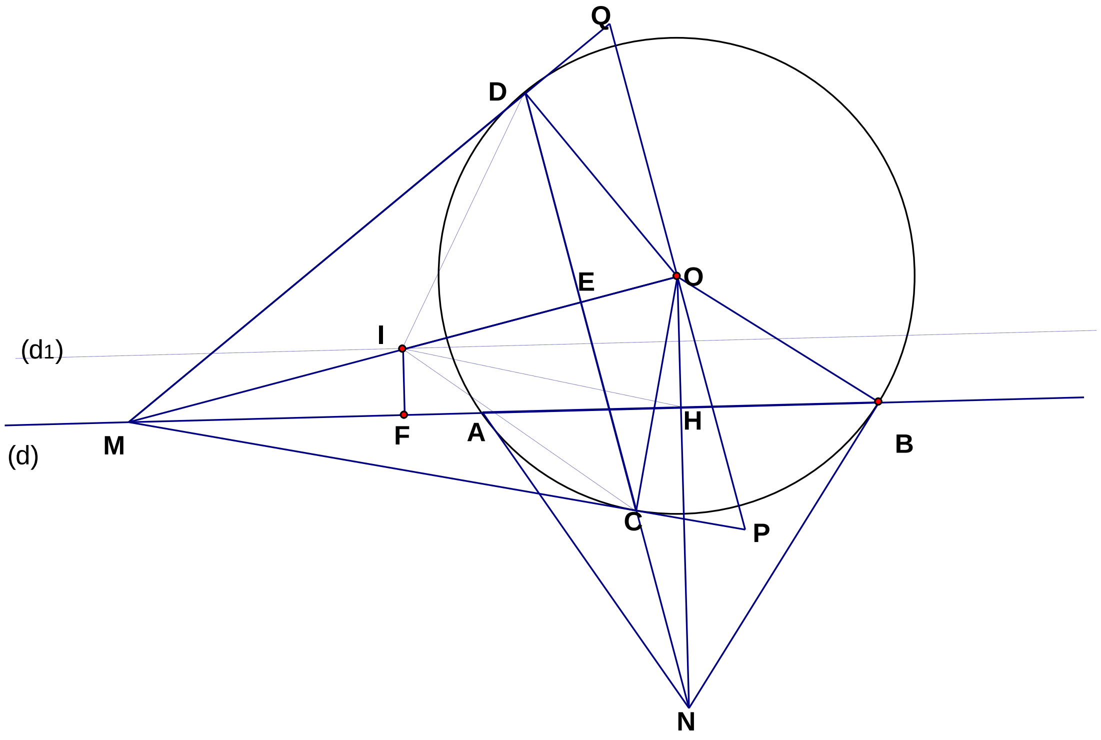
Cho đường tròn $\left(O;R\right)$, và đường thẳng $\left(d\right)$ cắt $\left(O\right)$ tại 2 điểm A và B sao cho dây $AB=R\sqrt{3}$. Điểm M di động trên đường thẳng $\left(d\right)$ (M nằm ngoài $\left(O\right)$), kẻ hai tiếp tuyến $MC;MD$ với đường tròn $\left(O\right)$ (C,D là hai tiếp điểm). MO cắt $\left(O\right)$ tại K (K nằm giữa M và O).

a) Khi $OM=2R$. Chứng minh tam giác MCD đều và tứ giác $CKDO$ là hình thoi.

b) Gọi H là trung điểm AB. Chứng minh rằng 5 điểm M,C,O,H,D nằm trên cùng một đường tròn và tâm đường tròn này thuộc đường thẳng cố định.

c) Gọi CD cắt OH tại N. Chứng minh diện tích tam giác NAB không đổi.

d) Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt MC,MD tại P và Q. Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng $\left(d\right)$ để diện tích tam giác MPQ nhỏ nhất.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
	
a) (1,0 điểm) Xét tam giác vuông MOD vuông tại M Sin $DMO=\frac{OD}{MO}=\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}$ suy ra $\angle DMO=30^0 \Rightarrow \angle DMC=60^0$ mà $MC=MD,$ suy ra ΔMCD đều $OD=OK=R,\angle DMO=30^0 \Rightarrow \angle DOK=60^0$ suy ra ΔDOK đều Vì ΔDOK đều suy ra $OD=DK=KC=CO=R$ nên tứ giác $CKDO$ là hình thoi	0,5 0,5
b) (1,0 điểm)  Gọi I là trung điểm MO do $\angle MDO=\angle MCO=\angle MHO=90^0$ suy ra $CI=DI=HI=OI=MI=\frac{1}{2}MO$ suy ra 5 điểm M,C,H,O,D nằm trên đường tròn tâm I đường kính MO	0,5

Ta có $OH=\sqrt{OB^2-HB^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{R}{2}$, Kẻ $IF\perp MB$ thì $IF=\frac{1}{2}OH=\frac{R}{4}$ suy ra I chạy trên đường thẳng $\left(d_1\right)$ cố định song song với $\left(d\right)$ cách đường thẳng $\left(d\right)$ một khoảng bằng $\frac{R}{4}$ không đổi.	0,5
c) (1,0 điểm) Gọi MO cắt CD tại E ta có $MO\perp CD$, ΔOEN đồng dạng với ΔOHM suy ra $OH.ON=OE.OM$ mà $OE.OM=OD^2=R^2$ $\Rightarrow OH.ON=R^2\Rightarrow ON=\frac{R^2}{\frac{R}{2}}=2R\Rightarrow NH=ON-OH=2R-\frac{R}{2}=\frac{3R}{2}$ $S_{NAB}=\frac{1}{2}AB.NH=\frac{1}{2}.R\sqrt{3}.\frac{3R}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ (không đổi)	0,5 0,5
d) (1,0 điểm) Ta có $OP=OQ,\ \Delta MOQ$ vuông tại O, $OD\perp MQ$ suy ra $OQ.OM=OD.MQ;\quad MD.DQ=OD^2=R^2$ $S_{MPQ}=\frac{1}{2}PQ.OM=OQ.OM=OD.MQ=OD\left(MD+DQ\right)$ $S_{MPQ}\geq R.2\sqrt{MD.DQ}=R.2\sqrt{R^2}=2R^2(const)$ $Min\left(S_{MPQ}\right)=2R^2\Leftrightarrow MD=DQ=R$, tức điểm M thuộc đường thẳng $\left(d\right)$ sao cho $OM=R\sqrt{2}$	0,5 0,5

Câu 4 *(1,5 điểm):* Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $2a+3b+4c\leq 24abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{3}{\sqrt{4a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{9b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{16c^2+1}}$

ĐÁP ÁN	**ĐIỂM**
$2a+3b+4c\leq 24abc\Leftrightarrow\frac{1}{12bc}+\frac{1}{8ac}+\frac{1}{6ab}\leq 1$ Đặt $\frac{1}{2a}=x,\frac{1}{3b}=y;\frac{1}{4c}=z;x,y,z>0;\frac{1}{12bc}+\frac{1}{8ac}+\frac{1}{6ab}\leq 1\Rightarrow xy+yz+zx\leq 1$ $\frac{1}{2a}=x,\frac{1}{3b}=y;\frac{1}{4c}\Rightarrow 2a=\frac{1}{x};3b=\frac{1}{y};4c=\frac{1}{z}$	0,25

$P=\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ $P\le\frac{3x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}=Q$ $P\le Q=\frac{3x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$	0,5
$Q=\frac{3x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{3y}{\sqrt{(x+y).9(y+z)}}+\frac{3z}{\sqrt{(x+z).9(y+z)}}$ $Q\le\frac{3x}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{3y}{2}\left[\frac{1}{x+y}+\frac{1}{9(y+z)}\right]+\frac{3z}{2}\left[\frac{1}{x+z}+\frac{1}{9(y+z)}\right]=M$ $M=\frac{3(x+y)}{2(x+y)}+\frac{3(y+z)}{18(y+z)}+\frac{3(x+z)}{2(x+z)}=\frac{19}{6}$	0,5
$Max(P)=\frac{19}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z>0;xy+yz+zx=1\\x=y=z\\x+y=x+z=9(y+z)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{17}{\sqrt{35}};y=z=\frac{1}{\sqrt{35}}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\sqrt{35}}{34}\\b=\frac{\sqrt{35}}{3}\\c=\frac{\sqrt{35}}{4}\end{cases}$	0,25

.... **HẾT** ....

HƯỚNG DẪN CHẤM TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN LỚP 9

I. TRẮC NGHIÊM KHÁCH QUAN(8 điểm): Hãy chọn phương án trả lời đúng

Câu 1. Cho a,b là các số tự nhiên thỏa mãn $\sqrt{23+\sqrt{448}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Khi đó a^2+b^2 bằng

A. 305. **B.** 65. **C.** 11. **D.** 263.

Hướng dẫn

$$\sqrt{23+\sqrt{448}}=\sqrt{23+8\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}=4+\sqrt{7}=\sqrt{16}+\sqrt{7}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\Rightarrow a=16;b=7\Rightarrow a^2+b^2=305$$

Câu 2. Cho $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}$. Biểu thức $T=f(2)+f(3)+f(4)+.....+f(100)$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{9949}{100}$. **B.** $\dfrac{9849}{100}$. **C.** $\dfrac{20097}{202}$. **D.** $\dfrac{20299}{202}$.

Hướng dẫn

$$f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-2.\frac{x+1}{x}.\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}$$

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2}=\left|1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right|=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Do đó

$$T=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+.....+1+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+1+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=99+\frac{1}{2}-\frac{1}{101}=\frac{20097}{202}$$

Câu 3. Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x-3}-2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-1$ khi $3\le x\le 7$. **B.** $P=-1$ khi $3\le x<7$.

C. $P=-1$ khi $x>7$. **D.** $P=-1$ khi $x\ne 3$.

Hướng dẫn

$$P=\frac{\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x-3}-2}=\frac{\sqrt{x-3-2\sqrt{x-2}+4}}{\sqrt{x-3}-2}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-2\right)^2}}{\sqrt{x-3}-2}=\frac{\left|\sqrt{x-3}-2\right|}{\sqrt{x-3}-2}=-1$$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-3}-2<0\Leftrightarrow x<7$

Kết hợp điều kiện $3\le x<7$

Câu 4. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x\sqrt{9-2x}+(3-x)\sqrt{2x+3}$ với $0\le x\le 3$ là

A. $\sqrt{7}+2\sqrt{5}$. **B.** $2+2\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn

Ta có: $P=\sqrt{x}.\sqrt{x.(9-2x)}+\sqrt{3-x}.\sqrt{(3-x).(2x+3)}$

Áp dụng BĐT Bunhia dãy 1: $\sqrt{x}$; $\sqrt{3-x}$ dãy 2: $\sqrt{x(9-2x)}$;$\sqrt{(3-x)(2x+3)}$

ta có $P^2\le 3\left[x(9-2x)+(3-x)(2x+3)\right]=3\left(9-4x^2+12x\right)=3\left[18-(2x-3)^2\right]\le 54$

$\Leftrightarrow P \leq 3\sqrt{6} \Rightarrow Max(P) = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Câu 5. Cho hai đường thẳng: $(d): y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ và $(d^{'}): y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}$. Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng trên, B và C lần lượt là giao điểm của $(d);(d^{'})$ với trục hoành. Khi đó BAC bằng

A. 125^0. **B.** 135^0. **C.** 134^0. **D.** 136^0.

Hướng dẫn

$\text{Tan}(ABC) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC \approx 26^0 34^{/}; \text{Tan}(ACB) = \left|\dfrac{-1}{3}\right| \Rightarrow \angle ACB \approx 18^0 26^{/};$

$\angle BAC = 180^0 - 18^0 26^{/} - 26^0 34^{/} = 135^0;$

Câu 6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba đường thẳng $(d_1): y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3}$, $(d_2): y = \dfrac{-1}{6}x - \dfrac{2}{3}$, $(d_3): (3m+2)x - 2my = 0$. Giá trị của m để ba đường thẳng đã cho đồng quy là

A. $\dfrac{-1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{-2}{3}$. **D.** $\dfrac{-2}{3}$.

Hướng dẫn

$y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x - 3y = 5; (1); y = \dfrac{-1}{6}x - \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x + 6y = -4, (2)$

(1) *và* $(2) \Rightarrow x = 2; y = -1$ thay vào $(d_3): (3m+2)x - 2my = 0$

$$(3m+2).2 - 2my = 0 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$$

Câu 7. Biết điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y = (2m-3)x + 4m - 3$ luôn đi qua với mọi giá trị của m. Giá trị của biểu thức $A = x_0^3 + y_0^3$ bằng

A. 36. **B.** $\sqrt{19}$. **C.** 19. **D.** 18.

Hướng dẫn

$$y_0 = (2m-3)x_0 + 4m - 3 \Leftrightarrow y_0 + 3x_0 + 3 = 2m(x_0 + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ y_0 + 3x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

$A = x_0^3 + y_0^3 = (-2)^3 + 3^3 = 19$

Câu 8. Giá trị của m để ba điểm $A(-1;-8)$, $B(2;1)$, $C(-2;19-3m)$ thẳng hàng

A. $m = 14$. **B.** $m = 12$. **C.** $m = 13$. **D.** $m = 10$.

Hướng dẫn

Gọi phương trình đường thẳng đi qua AB là $y = ax + b$ trong đó a,b là nghiệm của hệ phương trình

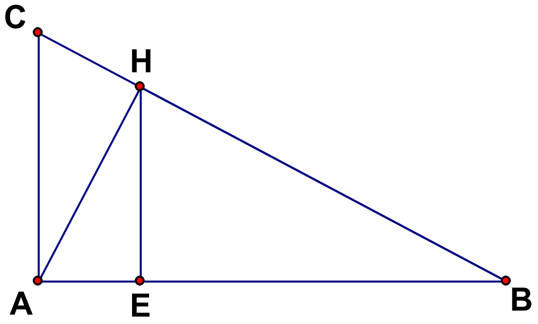
$$\begin{cases} -a + b = -8 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow y = 3x - 5$$

thay $x = -2, y = 19 - 3m \Rightarrow 19 - 3m = -6 - 5 \Leftrightarrow 3m = 30 \Leftrightarrow m = 10$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 6cm, AC = 4cm$, đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB. Độ dài HE là

A. $\frac{36}{13}cm.$ **B.** $\frac{60}{13}cm$. **C.** $\frac{18}{13}cm.$ **D.** $\frac{36}{\sqrt{13}}cm.$

Hướng dẫn:



Ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13};$$

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{36}{2\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$$

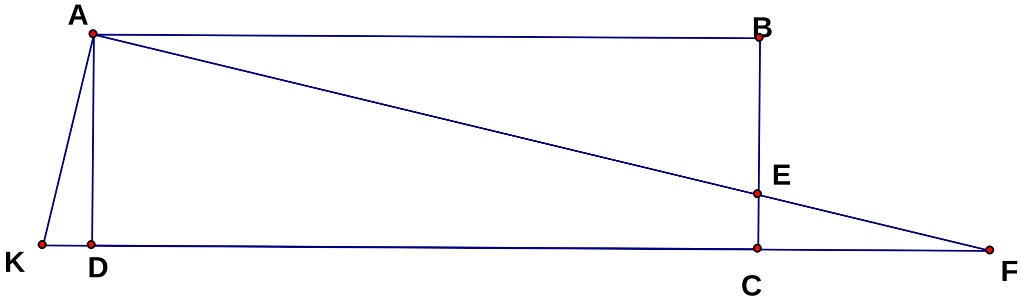
$$\frac{HE}{AC} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow HE = \frac{AC.BH}{BC} = \frac{4.\frac{18\sqrt{13}}{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{36}{13}$$

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 3BC; E \in BC$, tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{9AF^2}$. **B.** $\frac{1}{3AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{9AF^2}$.

C. $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{9}{AF^2}$. **D.** $\frac{1}{9AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{3AF^2}$.

Hướng dẫn:



Kẻ $AK \perp AF, \Delta ABE$ đồng dạng ΔADK nên $\frac{AE}{AK} = \frac{AB}{AD} = 3 \Rightarrow AK = \frac{1}{3}AE$.

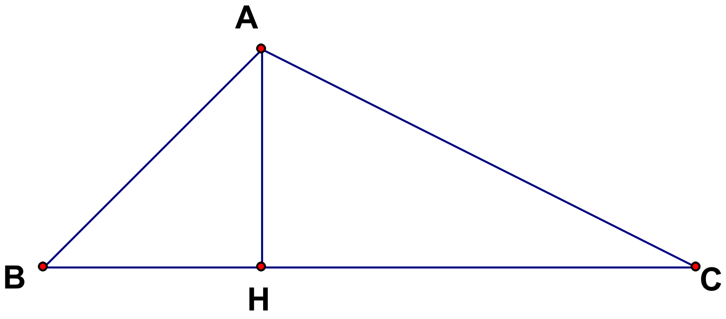
Trong tam giác vuông ΔAKF, ta có:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{AB}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{AE}{3}\right)^2} + \frac{1}{AF^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{9AF^2}$$

Câu 11. Cho tam giác ΔABC, $B = 45^0$, $A = 105^0$, $BC = 16cm$. Độ dài AB là

A. $8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cm.$ **B.** $8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)cm.$ **C.** $8\left(\sqrt{3}-1\right)cm.$ **D.** $16\left(\sqrt{3}-1\right)cm.$

Hướng dẫn:



Kẻ $AH \perp BC$, $\angle B = 45^0$ thì ΔABH vuông cân tại H,

$$AH = BH; \angle C = 30^0 \Rightarrow \angle HAC = 60^0; HC = AH.\tan HAC = AH \tan 60^0 = AH\sqrt{3}$$

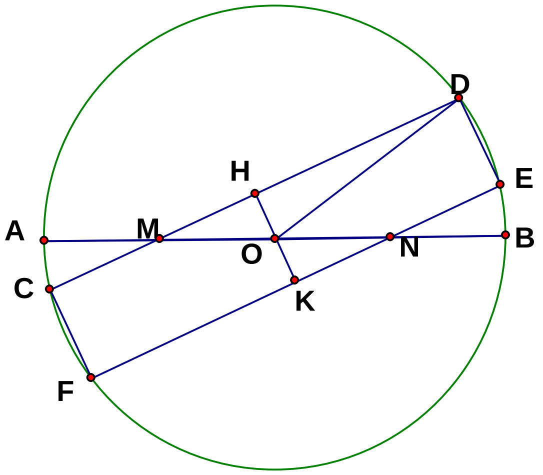
$$BH + CH = 16 \Leftrightarrow AH + AH\sqrt{3} = 16 \Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)AH = 16 \Rightarrow AH = \frac{16}{\sqrt{3}+1} = 8\left(\sqrt{3}-1\right) = BH$$

ΔABH vuông cân tại H$\Rightarrow AB = AH\sqrt{2} = 8\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2} = 8\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Câu 12. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M kẻ dây cung CD, qua N kẻ dây cung EF sao cho $CD // EF$ (C, F cùng thuộc nửa đường tròn đường kính AB) và $CMO = 30^0$. Diện tích tứ giác $CDEF$ theo R là

A. $\frac{R^2\sqrt{15}}{8}$. **B.** $\frac{R^2\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{R^2\sqrt{15}}{4}$. **D.** $\frac{3R^2\sqrt{15}}{8}$.

Hướng dẫn:



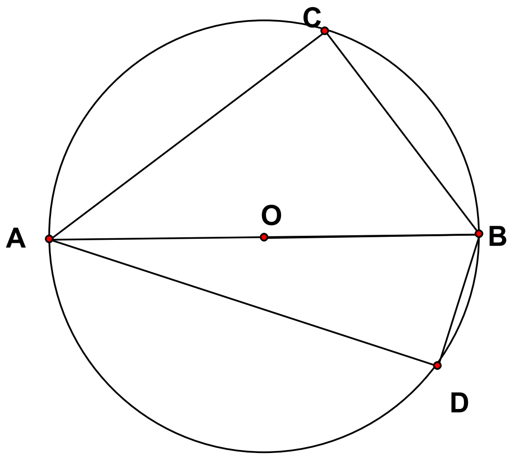
$$HK = 2.OH = OM = \frac{R}{2}; CD = 2HD = 2.\sqrt{OD^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{CDEF} = HK.CD = \frac{R}{2}.\frac{R\sqrt{15}}{2} = \frac{R^2\sqrt{15}}{4}$$

Câu 13. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 3\sqrt{2}\,cm$, đường kính AB. Hai điểm C, D thuộc 2 nửa đường tròn đường kính AB. Chu vi tứ giác $ACBD$ lớn nhất là

A. $24\sqrt{2}$ cm. **B.** $20\sqrt{2}$ cm. **C.** 24 cm. **D.** $32cm$.

Hướng dẫn



Áp dụng BĐT Bunhia

$$(CA+CB)^2 \le 2(CA^2+CB^2) = 2.AB^2 = 2.(6\sqrt{2})^2 = 144 \Leftrightarrow CA+CB \le 12$$

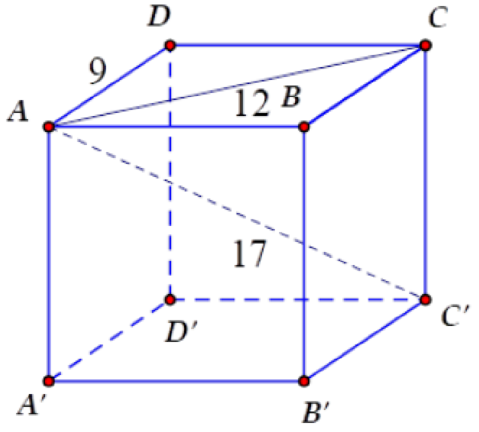
$$(DA+DB)^2 \le 2(DA^2+DB^2) = 2.AB^2 = 2.(6\sqrt{2})^2 = 144 \Leftrightarrow DA+DB \le 12$$

$$CA+CB+DB+DA \le 24(cm)$$

Câu 14. Một hình hộp chữ nhật có đường chéo lớn bằng $17\,cm$, các kích thước của đáy lần lượt bằng $9cm, 12cm$. Thể tích hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $846\,cm^3$. **B.** $864\,cm^3$. **C.** $816\,cm^2$. **D.** $186\,cm^3$.

Hướng dẫn:



Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD = BC = 9cm; AB = DC = 12cm$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ADC ta được:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15cm$$

Ta có $CC' \perp (ABCD)$ nên $CC' \perp CD$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông $AC'C$ ta được:

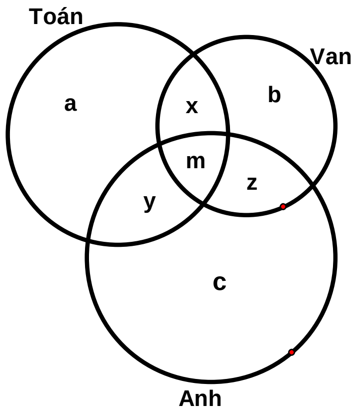
$$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8cm$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật bằng $9.12.8 = 864(cm^3)$

Câu 15. Khảo sát 45 học sinh lớp 9A của một trường THCS. Có 30 học sinh thích học môn Toán, 26 học sinh thích học môn Ngữ Văn, 32 học sinh thích học môn Tiếng Anh, 18 học sinh thích học 2 môn Toán và Ngữ văn, 24 học sinh thích học 2 môn Toán và Tiếng Anh, 20 học sinh thích học 2 môn Ngữ Văn và Tiếng Anh, 5 học sinh không thích học môn nào trong ba môn trên. Số học sinh thích học cả 3 môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh là

A. 10 *em.* **B.** 12 *em.* **C.** 16 *em.* **D.** 14*em.*

Hướng dẫn



ta có

$$a + b + c + x + y + z + m = 45 - 5 = 40;(1)$$

$$\begin{cases} a + x + m + y = 30 \\ b + x + m + z = 24 \\ c + y + z + m = 32 \end{cases} \Leftrightarrow a + b + c + 2x + 2y + 2z + 3m = 30 + 26 + 32 = 88;(2)$$

$$(1);(2) \Rightarrow x + y + z + 2m = 88 - 40 = 48(3); x + y + z + 3m = 18 + 24 + 20 = 62(4)$$

$$(3);(4) \Rightarrow m = 62 - 48 = 14$$

Vậy có 14 em thích học 3 môn Toán, Tiếng Việt, Anh Văn

Câu 16. Bác An gửi tiền vào ngân hàng lãi xuất 0,5% trên 1 tháng lãi kép (lãi hàng tháng không rút ra) sau 5 năm bác An đó rút ra được $323724036,6$ đồng (cả gốc và lãi). Hỏi ban đầu bác An đã gửi bao nhiêu tiền

A. 250000000 đồng. **B.** 220000000 đồng.

C. 240000000 đồng. **D.** 280000000 đồng.

Hướng dẫn

Gọi số tiền gửi là A lãi x%/tháng số tháng là t ; S là số tiền có được sau t tháng

$$S = A\left(1 + x\right)^t \Rightarrow A = \frac{S}{\left(1 + x\right)^t} = \frac{323724036,6}{(1 + 0,005)^{60}} = 240000000 \text{ (đồng)}$$

PHÒNG GD& ĐT THÀNH PHỐ
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

Thứ 7 ngày 11 tháng 11 năm 2023

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: Toán. Lớp: 9.

(*Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề*)

Bài 1. (*5,0 điểm*)

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P, biết $P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}$.

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $xy=1$. Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x+y}\geq 3$.

Bài 2. (*5,0 điểm*)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)\left(x^2+xy+2\right)=8\end{cases}$

Bài 3. (*5,0 điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH.BD = BC.BK$ và $BH.BD + CHCE = BC^2$.

b) Chứng minh $BH = AC.\cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP = MQ$.

Bài 4. (3*,0 điểm*)

a) Cho các số nguyên $a_1; a_2; ...; a_n$. Đặt S = $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$ và $P=a_1+a_2+...+a_n$. Chứng minh rằng S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x\text{-}3y=2xy\text{-}11$.

Bài 5. (2*,0 điểm*)

Các số nguyên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.

-----Hết-----

Chú ý:

+ Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

+ Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

PHÒNG GD& ĐT THÀNH PHỐ
TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

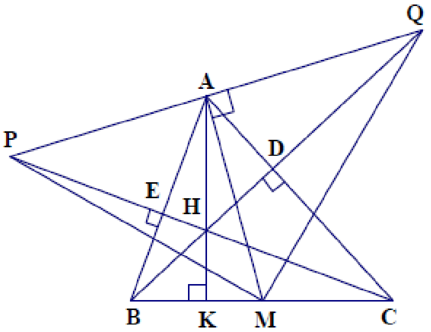
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn Toán. Lớp 9

Thời gian: 150 phút

BÀI/Ý	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Bài 1	a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P, biết $P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}$. b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $xy=1$. Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x+y}\geq 3$.	**5**
a (2đ)	Điều kiện để P xác định là $x>0;x\neq 1$	0,5
	Ta có $P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{x-\sqrt{x}}=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$	0,5
	Vậy Ta có $P=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ (với $x>0;x\neq 1$).	0,5
b (3đ)	Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x+y}=\frac{xy}{x}+\frac{xy}{y}+\frac{2}{x+y}=x+y+\frac{2}{x+y}=\frac{x+y}{2}+\left(\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\right)$	1
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}\geq 1\ (1)$ (vì $xy=1$)	0,5
	$\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\geq 2.\sqrt{\frac{x+y}{2}.\frac{2}{x+y}}\Leftrightarrow\frac{x+y}{2}+\frac{2}{x+y}\geq 2\ (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{x+y}\geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.	0,5 0,5
Bài 2.	Giải các phương trình sau: a) Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$ b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)\left(x^2+xy+2\right)=8\end{cases}$	**5**
a (2,5đ)	Điều kiện: $x\geq 1$ Ta có: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$	1

	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{x-1}-1$. $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\sqrt{x-1}-1$ $\Leftrightarrow \left\lvert\sqrt{x-1}-1\right\rvert=\sqrt{x-1}-1$	1
	$\Rightarrow \sqrt{x-1}-1\geq 0\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\geq 1\Leftrightarrow x\geq 2$ (TMĐK) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}$.	0,5
b ***(2,5đ)***	$\begin{cases}3x^2+y^2+4xy=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)(3x+y)=8\\(x+y)(x^2+xy+2)=8\end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow x^2+xy+2=3x+y\Leftrightarrow (x-1)(x+y-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2-y\end{array}\right.$	0,5
	$x=1\Leftrightarrow 3+y^2+4y=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right.$	0,5
	$x=2-y\Leftrightarrow (2-y+y)\left[3(2-y)+y\right]=8\Leftrightarrow 2(6-2y)=8\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=1$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $(1;-5)$	0,5 0,5
Bài 3. a	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H. a) Chứng minh: $BH\,.\,BD=$ $BC\,.\,BK$ và $BH\,.\,BD$ $+$ $CHCE=$ BC^2. b) Chứng minh $BH=AC\,.\cot ABC$. c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.	*5,0*
		*0,5*
	Xét tam giác: ΔBHK; ΔBCD có: KBH chung $BKH=BDC=90^\circ$. $\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BCD$(g.g) nên $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{BK}{BD}$ $\Rightarrow BH\cdot BD=BCBK$ Tương tự: ΔCHK $\backsim$ ΔCBE nên $\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{KC}{CE}\Rightarrow CH\cdot CE=BC\cdot KC$	*0,5* *0,5* *0,5*

<table>
<tr><td></td><td>Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được: $BH\cdot BD+CH.CE=BCBK+BC\cdot KC$
hay $BH\cdot BD+CH\cdot CE=BC(BK+KC)=BC^2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$\Delta BEH \backsim \Delta CEA(g\cdot g)\Rightarrow \frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}$
Xét ΔBEC vuông tại $E\Rightarrow \cot ABC=\frac{BE}{CE}$
$\Rightarrow \frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}=\cot ABC\Rightarrow BH=AC\cdot \cot ABC$</td><td>0,5
0,5
0,5</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.
Chứng minh $\Delta PAH \backsim \Delta AMB\ (g.g)\Rightarrow \frac{PA}{AM}=\frac{AH}{MB}$
Chứng minh: $\Delta QAH \backsim \Delta MAC\,(g.g)\Rightarrow \frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}$
Do $MB=MC\,(\text{gt})\Rightarrow \frac{QA}{AM}=\frac{PA}{AM}$
$\Rightarrow PA=QA\Rightarrow \Delta QMP$ cân tại $M\Rightarrow MP=MQ$.</td><td>0,5
0,5</td></tr>
<tr><td>Bài 4</td><td>a) Cho các số nguyên a$_1$, a$_2$, a$_3$, ..., a$_n$. Đặt S = $a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$ và $P=a_1+a_2+...+a_n$. Chứng minh rằng S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x-3y=2xy-11$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3"><i>a
(1,5đ)</i></td><td>Với $a\in Z$ thì $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, Mà (2.3) =1</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow a^3-a\vdots 6$
$\Rightarrow S-P=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+...+(a_n^3-a_n)\vdots 6$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Vậy $S\vdots 6\Leftrightarrow P\vdots 6$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2"><i>b
(1,5đ)</i></td><td>$5x-3y=2xy-11\Rightarrow x(5-2y)+\frac{3}{2}(5-2y)-\frac{15}{2}+11=0$
$\Leftrightarrow (5-2y)\left(x+\frac{3}{2}\right)=\frac{-7}{2}\Leftrightarrow (2y-5).\frac{2x+3}{2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow (2y-5)(2x+3)=7$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>(2x + 3) và (2y - 5) là các ước số của 7 nên ta có:
<table>
<tr><td>2x + 3</td><td>1</td><td>-1</td><td>7</td><td>-7</td></tr>
<tr><td>2y - 5</td><td>7</td><td>-7</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>
Vập phương trình có các nguyện nguyên là
$(x,y)\in\{(-1;6);(-2;-1);(2;3);(-5;2)\}$</td><td>0,5
0,5
0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Các số nguyên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.</td><td>1</td></tr>
</table>

5	Giả sử 10 số được xếp theo thứ tự tùy ý là a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. Khi đó có 10 bộ ba số theo thứ tự liên tiếp là: (a; b; c); (b; c; d); (c; d; e); ... (j; a; b). Mỗi số từ 1 đến 10 xuất hiện đúng 3 lần trong 10 bộ số trên. Suy ra tổng các bộ số trên là: S = (a + b + c) + (b + c + d) + ...+ (j + a + b) = 3(1 + 2 + 3 + ... + 10) = 165.	0,5 0,5
	Giả sử tất cả các bộ 3 số trên đều có tổng nhỏ hơn hoặc bằng 16 thì: S ≤ 16. 10 = 160 (mâu thuẫn). Vậy luôn tồn tại một bộ có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.	0,5 0,5

PHÒNG GD VÀ ĐT THỊ XÃ BA ĐỒN **ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI**

MÔN TOÁN 9- NĂM HỌC 2023-2024

(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm):

Cho biểu thức $P=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ Với $x\geq 0$ và $x\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2+5x+1=(x+5)\sqrt{x^2+1}$.

b) Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx-2y=2\\2x+my=5\end{cases}$ (với m là tham số).

Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x+y-2014=\frac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}.$$

Câu 3 (1,5 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\geq a+\frac{b}{2}$$

Câu4 (3,5 điểm): Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O;R).Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với OA. Gọi M là điểm bất kì trên đường thẳng d. Từ M vẽ hai tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O) (E, F là tiếp điểm). N và B là giao điểm của EF với OM và OA.

a) Chứng minh ON.OM = OA.OB

b) Vẽ tiếp tuyến AD, AC đến (O) (C, D là tiếp điểm). Chứng minh rằng ba điểm C, D, B thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của M để diện tích tam giác MEF nhỏ nhất.

Câu 5 (1,0 điểm):

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

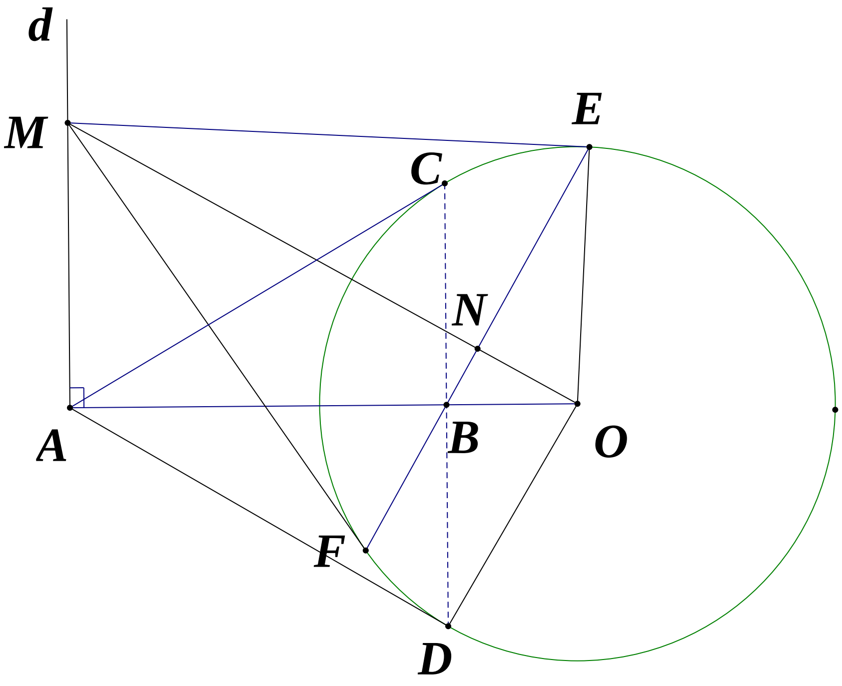
-----------------------------------Hết------------------------------------

PHÒNG GD VÀ ĐT TX BA ĐỒN

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN TOÁNLỚP 9 NĂM HỌC 2023 – 2024

Câu	Nội dung	Điểm
1 **(2,0đ)**	a) ĐKXĐ: $x \ge 0$ và $x \ne 1$ Ta có $P=\frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ $=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-x+1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$ $=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ Vậy với $x \ge 0$ và $x \ne 1$ ta có $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Ta có $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow x^3=40+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\left(20-14\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$ $\Leftrightarrow x^3=40+6x \Leftrightarrow x^3-6x-40=0$ $\Leftrightarrow \left(x-4\right)\left(x^2+4x+10\right)=0 \Leftrightarrow x=4$ (vì $x^2+4x+10=\left(x+2\right)^2+6>0$) Thay $x=4$ vào biểu thức thu gọn ta được $P=3$	0,25 0,25 0,25 0,25
2 **(2,0đ)**	$x^2+5x+1=\left(x+5\right)\sqrt{x^2+1}$ $\Leftrightarrow x^2+1+5x=\left(x+5\right)\sqrt{x^2+1}$ $\Leftrightarrow x^2+1+5x-x\sqrt{x^2+1}-5\sqrt{x^2+1}=0$ $\Leftrightarrow (x^2+1-x\sqrt{x^2+1})-(5\sqrt{x^2+1}-5x)=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-5\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-5\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}-x=0\\ \sqrt{x^2+1}-5=0.\end{array}\right.$ TH1: $\sqrt{x^2+1}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2+1=x^2\end{cases}$ (không có giá trị nào của x thỏa mãn). TH2: $\sqrt{x^2+1}-5=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=5 \Leftrightarrow x^2+1=25 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{24}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là	0,25 0,25 0,25 0,25

	$S=\left\{-\sqrt{24};\sqrt{24}\right\}$	
	b) $\begin{cases} mx-2y=2 \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+my=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ 2x+m\dfrac{mx-2}{2}=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{mx-2}{2} \\ \left(m^2+4\right)x=2m+10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in R$ Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x=\dfrac{2m+10}{m^2+4} \\ y=\dfrac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}$ Thay $x=\dfrac{2m+10}{m^2+4}$ và $y=\dfrac{5m-4}{m^2+4}$ vào hệ thức: $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ Ta được: $\dfrac{-2014m^2+7m-8050}{m^2+4}=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ $\Leftrightarrow -2014m^2+7m-8050=-2015m^2+14m-8056$ $\Leftrightarrow m^2-7m+6=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right.$ Vậy để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn hệ thức: $x+y-2014=\dfrac{-2015m^2+14m-8056}{m^2+4}$ thì $m=1$ hoặc $m=6$.	0,25 0,25 0,25 0,25
3 **(1,5đ)**	Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^2}{b+c} \ge a+\dfrac{b}{2}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương ta được $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c+a}{4} \ge \dfrac{3}{2}a; \dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{a+b}{4} \ge \dfrac{3}{2}b; \dfrac{c^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4} \ge c$ Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^2}{b+c}+\dfrac{a}{2}+b+c \ge \dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}b+c$ $\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^2}{b+c} \ge a+\dfrac{b}{2}$ Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$	0,75 0,25 0,25 0,25

Câu4 **(3,5 đ)**		0,5
	a) ME = MF (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $=> \Delta$MEF cân tại M Mà MO là đường phân giác (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Nên MO củng là đường cao $=> MO \perp EF$ tại N $=> \angle ONB = 90^0$ Ta có $\angle MAO = 90^0$ (gt) Xét ΔONB và ΔOMA có $\angle NOB$ chung $\angle ONB = \angle MAO = 90^0$ $=> \Delta ONB \backsim \Delta OAM$ (g.g) $=> \frac{ON}{OA} = \frac{OB}{OM}$ $=> ON.OM = OA.OB$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) $ME \perp OE$ (Tính chất của tiếp tuyến) ΔMEO vuông tại E có $EN \perp OM$ Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OE^2 = ON.OM$ Mà ON.OM = OA.OB (chứng minh câu a) OE = OD (bán kính) $=> OD^2 = OA.OB$ $=> \frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA}$ Xét ΔOBD và ΔODA ta có $\angle BOD$ chung $\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA}$ $=> \Delta OBD \backsim \Delta ODA$ (c.g.c) $=> \angle OBD = \angle ODA$	0,25 0,25

	Mà $\angle ODA = 90^0$ nên $\angle OBD = 90^0$ = > BD $\perp$ OA tại B (*) AC = AD (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) = > ΔCAD cân tại A Mà AO là đường phân giác (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Nên AO củng là đường cao = > DC $\perp$ OA (**) Từ (*) và (**) suy ra BD và DC trùng nhau = > C,B,D thẳng hàng.	0,25 0,25
	c) Xét (O) ta có ON là khoảng cách từ O đến dây EF OB là khoảng cách từ O đến dây CD ON $\le$ OB (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) = >EF $\ge$ CD = > $\frac{1}{2}$ EF $\ge \frac{1}{2}$ CD (1) Ta có OM $\ge$ OA (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc) (2) OB $\ge$ ON (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc) (3) Công vế theo vế của (1) và (2) ta có OM + OB $\ge$ OA+ON = > OM - ON $\ge$ OA- OB = > MN $\ge$ AB (4) Từ (1) và (4) ta có $\frac{1}{2}$ EF.MN $\ge \frac{1}{2}$ CD.AB = > $S_{\Delta MEF} \ge \frac{1}{2}CD.AB$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ON = OB \\ OM = OA \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv A$ Vậy diện tích tam giác MEF nhỏ nhất khi M trùng A	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5 (1,0đ)	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x.$ Ta có: . Ta có $(1) \Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$ $\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$ $\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$ Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại. Như vậy ta có +) $56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9).$ +) $56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3).$ +) $56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3).$ +) $56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6).$	0,25 0,25 0,25

	+) $56=\left(-8\right).7.\left(-1\right)\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(-7;9\right)$. +) $56=7.\left(-8\right).\left(-1\right)\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(8;-6\right)$. Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.	0,25

UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH
PHÒNG GIÁO DỤC&ĐÀO TẠO

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
NĂM HỌC: 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN
(Thời gian làm bài 150 phút)
(Đề thi gồm có 05 câu, 01 trang)

Câu I (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$, với $x>4$.

   a) Rút gọn biểu thức A .

   b) Tìm giá trị của x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất

2.Cho các số x,y,z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ và $\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x+2y+z\right)^{2024}$

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2\left(x+1\right)}$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$

Câu III (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $16\left(x^3-y^3\right)=15xy+371$
2. Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=c\left(a+b\right)+ab.$

   Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Câu IV (6 điểm) Cho điểm M thuộc đường tròn (O) đường kính AB (M khác A,B và $MA<MB$). Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C, vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM và BM lần lượt tại D và H.

1. a) Chứng minh hai đường thẳng AH và BD cắt nhau tại điểm N nằm trên đường tròn (O)

   b) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A của thuộc đường tròn (O) Chứng minh tứ giác $ACHE$ là hình vuông.
2. Gọi F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của thuộc đường tròn (O) Chứng minh bốn điểm E,M,N,F thẳng hàng.
3. Gọi S_1,S_2 là diện tích của các tứ giác $ACHE,BCDF$.Chứng minh $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$

Câu V (2 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$

Câu	Nội dung	Điểm
I	1. a) $A=\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{x}-1\right)^2}}$ $\frac{\sqrt{x-4}+2+\left\lvert\sqrt{x-4}-2\right\rvert}{\left\lvert\frac{4}{x}-1\right\rvert}$	0,5
	Khi $4<x<8$ thì $A=\frac{\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}}{\frac{x-4}{x}}=\frac{4x}{x-4}$ Khi $x\geq 8$ thì $A=\frac{\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2}{\frac{x-4}{x}}=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}$	0,5
	b) Xét $4<x<8$ ta có $A=\frac{4x}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}$ Do $4<x<8$ nên $0<x-4<4\Rightarrow\frac{16}{x-4}>4$, do đó $A>8$.	0,5
	Xét $x\geq 8$, ta có $A=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}=\frac{2x}{\sqrt{x-4}}=2\left(\sqrt{x-4}+\frac{4}{\sqrt{x-4}}\right)$ $\geq 2.2\sqrt{\sqrt{x-4}.\frac{4}{\sqrt{x-4}}}=8.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x-4}=\frac{4}{\sqrt{x-4}}\Leftrightarrow x=8.$ So sánh hai trường hợp ta được Min A=8 tại x=8	0,5
	2. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4.$	0,5
	Do đó $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0.$ $\Leftrightarrow x=y=-z$	0,5
	Thay vào $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ta được $x=y=\frac{1}{2};z=\frac{-1}{2}$	0,5
	Khi đó $P=\left(\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\right)^{2024}=1.$	0,5

II	1. Điều kiện $x>0$. Phương trình tương đương $2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7$. Chia hai vế cho $x\neq 0$.ta được $2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\frac{4}{x}=0$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$ Trường hợp 1: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{3}{x}}=2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x\in\{1;3\}$ Trường hợp 2: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^3+3x-4=0$ $\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1$. Vậy $x\in\{1;3\}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2. Điều kiện $\frac{1}{2}\le xy\le\sqrt{2}$. Ta có $\sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}\le\frac{2xy-1+1}{2}+\frac{2-x^2y^2+1}{2}=2$ Dấu "=" xảy ra khi $xy=1$ và thu được hệ phương trình tương đương $\begin{cases}xy=1\\x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu III	1. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x,y thỏa mãn đề bài. Ta có $15xy+371=16(x-y)(x^2+xy+y^2)$ Do vế trái dương nên $x-y>0$ hay $x-y\ge 1$. Suy ra $15xy+371\ge 16(x^2+xy+y^2)=1+15xy+16(x^2+y^2)$ $\Leftrightarrow 16(x^2+y^2)\le 370\Leftrightarrow x^2+y^2\le 23$. Mặt khác từ đề bài $16(x^3-y^3)=15xy+371\Rightarrow 16(x^3-y^3)=14xy+370+(xy+1)$ Suy ra $xy+1$ là số chẵn do đó x,y cùng lẻ. Do $x\ge y\ge 1$ và $x^2\le 23$ nên cgir xảy ra $x=3$. Thay vào đề bài ta có $y=1$ Cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài $(x,y)=(3,1)$ 2. Với a,b,c đã cho, ta có $4c^2=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(b+c)\quad(*)$ Ta đặt $(a+c,b+c)=d$, Khi đó $(a+c)-(b+c)=a-b$. Do $a-b$ là số nguyên tố nên ta suy ra $d=1$ hoặc $d=a-b$. Nếu $d=a-b$, ta đặt $c+a=(a-b)x^2, c+b=(a-b)y^2$ trong đó	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

x, y là các số tự nhiên. Lấy hiệu hai vế ta được 0,5

$$a-b=(a-b)(x^2-y^2)\Rightarrow(x-y)(x+y)=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$$

Ta thu được $c+b=0$, tức là $c=b=0$. Khi đó $8c+1=1$ là một số chính phương.

Nếu $d=1$ thì $c+b, c+a$ là các số chính phương. 0,5

Ta đặt $c+a=m^2, c+b=n^2$, trong đó m, n là các số tự nhiên.

Lấy hiệu hai vế ta được $a-b=m^2-n^2\Rightarrow a-b=(m-n)(m+n)$
$\Rightarrow m-n=1\Rightarrow m=n+1.$

Kết hợp $m=n+1$ với $(*)$ ta được

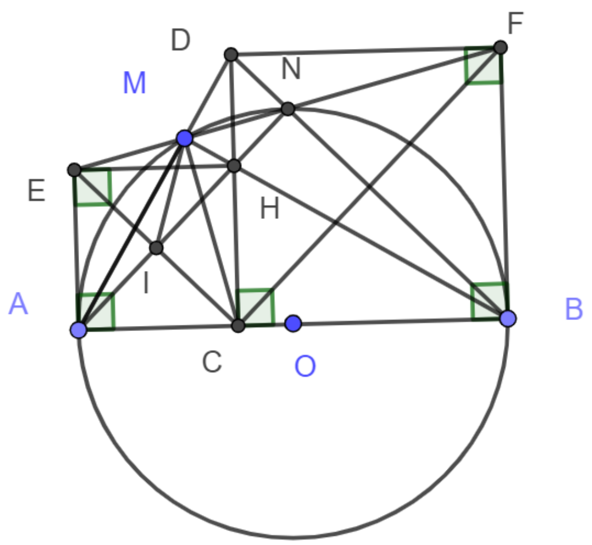
$$4c^2=(c+a)(b+c)=\text{m}^2\text{n}^2=\text{n}^2(n+1)^2.$$

$$\Rightarrow 2\text{c}=\text{n}(n+1)$$

Khi đó $8c+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ là một số chính phương. 0,5

Câu IV

1\.



0,5

a) Ta có M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\angle AMB=90^0$ 0,5

Xét ΔABD có $DC\perp AD, BM\perp AD\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác suy ra AH là đường cao thứ ba $AH\perp BD$ tại N nên N nằm trên đường tròn (O) 0,5

b) Tứ giác ACHE là hình chữ nhật

Mà $\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{MA}{MB}$ (tính chất phân giác)

$\dfrac{CH}{CB}=\dfrac{MA}{MB}$ suy ra $CA=CH$ nên ACHE là hình vuông. 0,5

2\. Tứ giác ACHE là hình vuông nên $AH=CE$ và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

ΔMAH vuông tại M, MI là đường trung tuyến nên

$MI=\dfrac{1}{2}AH\Rightarrow MI=\dfrac{1}{2}CE\Rightarrow\Delta MCE$ vuông tại M nên $ME\perp MC$ (1) 0,5

Chứng minh tương tự ta cũng có tứ giác BCDF là hình vuông và $MF\perp MC$ (2)

	Xét ΔDMN và ΔDBA có : $ABD\ chung, \frac{DM}{DB} = \frac{DN}{DA}\left(=\cos ADB\right) \Rightarrow \Delta DMN \sim \Delta DBA\left(cgc\right)$ $\Rightarrow DMN = DBA = 45^0$	0,5
	Mà $AMC = \frac{1}{2}AMB = 45^0$ (tính chất phân giác) $CMN = 180^0 - \left(AMC + DMN\right) = 90^0 \Rightarrow MN \perp MC\left(3\right)$	0,5
	Từ (1) , (2) và (3) ta có 4 điểm E, M,N,F thẳng hàng.	0,5
	3. Ta có $ECD = DCF = 45^0$ (tính chất hình vuông) $\Rightarrow ECF = ECD + DCF = 90^0$ Xét ΔCEF vuông tại C có đường cao CM: $\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \ge \sqrt{\frac{1}{CE^2}.\frac{1}{CF^2}}$	0,5
	$= 2\sqrt{\frac{1}{\left(CA\sqrt{2}\right)^2}.\frac{1}{\left(CB\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{CA^2}.\frac{1}{CB^2}} = \sqrt{\frac{1}{S_1}\cdot\frac{1}{S_2}} = \frac{1}{\sqrt{S_1.S_2}}$ $\Rightarrow CM^2 \le \sqrt{S_1.S_2}$	0,5
	Dấu “=” trong bất đẳng thức không xảy ra vì: $\begin{cases} MA < MB \\ \frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} \end{cases} \Rightarrow CA < CB \Rightarrow \frac{1}{CE^2} > \frac{1}{CF^2}$ Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1.S_2}$	0,5
Câu V	Ta có $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và $a, b, c > 0.$Mà $abc > 0$ Do đó $\frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$.	0,5
	Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7. \end{cases}$ Khi đó $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$	0,5
	$\Rightarrow C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - \left(2x + y + 4x + z + y + z\right)$ $= \left(\frac{2}{\sqrt{2x+y}} - \sqrt{2x+y}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z}\right)^2 + 7 \ge 7$	0,5
	Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1 \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 1.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $C = 7\ khi\ a = 2, b = 1, c = 1.$	0,5

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA VIỄN

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học. 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 05 câu, 01 trang)

Câu 1: ***(4,0 điểm).***

1. Cho biểu thức $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ và $x>0, x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

2.Tính: $S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2024\sqrt{2023}+2023\sqrt{2024}}$

Câu 2: ***(4,0 điểm).***

1. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c} và: a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$

Chứng minh rằng: $\frac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

2. Cho d: $y=(m^2+1)x+4$. Tìm m sao cho d cắt Ox tại A cắt Oy tại B mà

a) S_{OAB} đạt giá trị lớn nhất

b) Khoảng cách từ O đến d đạt giá trị lớn nhất

Câu 3: ***(4,0 điểm).***

1. Giải phương trình $x^2-x-4=2(x-1)\sqrt{x-1}$

2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.

Câu 4: ***(6 điểm).*** Cho (O;R) và đường thẳng a không có điểm chung với đường tròn. Điểm M bất kì thuộc đường thẳng a. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm). Kẻ OH vuông góc với đường thẳng a tại H. kẻ AB cắt OH tại K, cắt OM tại I.

1. Chứng minh rằng: $OI.OM=OK.OH$

2. Chứng minh: khi M chuyển động trên đường thẳng a thì AB luôn đi qua 1 điểm cố định.

3. Tìm vị trí của M để S_{OIK} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5: ***(2,0 điểm).***

1. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$2abc\left(a+b+c\right)\leq\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$.

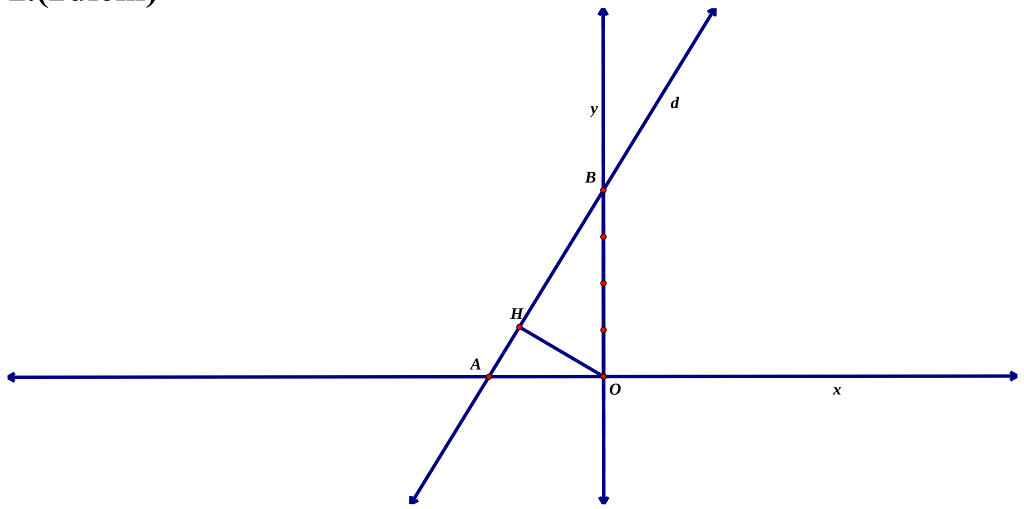
2. Số nguyên a được gọi là "đẹp" nếu với mọi cách sắp xếp theo thứ tự tùy ý của 100 số 1, 2, ..., 100 luôn tồn tồn tại 10 số hạng liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng a. Tìm số "đẹp" lớn nhất.

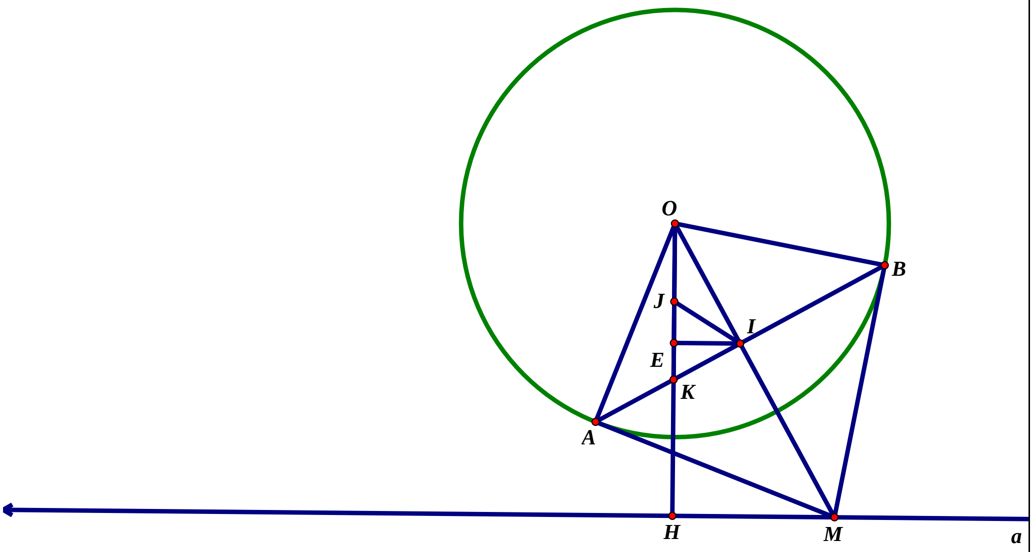
-----------------**Hết**---------------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN GIA VIỄN

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG LỚP 9
Năm học. 2023-2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4 điểm)	**1a. (1,0điểm)**	
	ĐKXĐ: $x>0, x\neq 1$	
	Ta có: $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ $P=\frac{2x+3}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $P=\frac{2x+3+x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$	0.75
	Vậy $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$	0,25
	1b. (1,0điểm)	
	Ta có $P=\frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+2+\frac{3}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+2$	
	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{x}.\frac{3}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{6}\Rightarrow P\geq 2\sqrt{6}+2$	0,5
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x}}\Rightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2+2\sqrt{6}$ đạt tại $x=\frac{3}{2}$.	0,5
	2.(2,0 điểm)	
	Xét số hạng tổng quát dạng: với n là số nguyên dương ta có: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	1,0
	$S=(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+...+(\frac{1}{\sqrt{2023}}-\frac{1}{\sqrt{2024}})$ $S=1-\frac{1}{2\sqrt{506}}=\frac{2\sqrt{506}-1}{2\sqrt{506}}$	1,0

Câu 2 (4 điểm)	**1.(2,0 điểm)**	
	Ta có : $a+b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow a=\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)$(vì b>0) Chứng minh tương tự : $b=\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)$(vì a>0)	1,0
	Biến đổi vế trái ta có : $\dfrac{a+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{b+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}$ $=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c}\right)}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ Vậy đẳng thức được chứng minh	1,0
	2.(2điểm) 	0,25
	Cho $x=0\Rightarrow y=4$, d cắt Oy tại $B(0;4)$ Cho $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-4}{m^2+1}$, d cắt Ox tại $A(\dfrac{-4}{m^2+1};0)$ Ta có : $OA=\left\lvert\dfrac{-4}{m^2+1}\right\rvert=\dfrac{4}{m^2+1}$ và OB = 4	0,75
	a. $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{m^2+1}.4=\dfrac{8}{m^2+1}\le 8$ Dấu “=” xảy ra khi m = 0 Vậy max $S_{OAB}=8$ khi m = 0	0,5
	b. Xét ΔOAB vuông tại A, đường cao AH ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{(\dfrac{4}{m^2+1})^2}+\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{m^4+2m^2+2}{16}$ $\Rightarrow OH^2=\dfrac{16}{m^4+2m^2+2}\le 8$ $\Rightarrow OH\le 2\sqrt{2}$ Dấu “=” xảy ra khi m = 0 Vậy khoảng cách từ O đến d lớn nhất là $OH=2\sqrt{2}$ khi m = 0	0,5

Câu 3(4điểm)	**1. (2,0 điểm)**	
	Điều kiện: $x \ge 1$ (*). Ta có: $\begin{aligned} & x^2 - x - 4 = 2(x-1)\sqrt{x-1} \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x - \sqrt{x-1}) - 3 = 0 \end{aligned}$ $\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x-1}\right)^2 - 2\left(x - \sqrt{x-1}\right) - 3 = 0$	0,75
	Đặt $x - \sqrt{x-1} = y$ phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$. $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right.$	0,5
	+Với $y = -1$ ta có phương trình: $x - \sqrt{x-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x + 1$ $\Leftrightarrow x - 1 = x^2 + 2x + 1 (vì : x \ge 1)$ $\Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0 (ptvn)$ + Với $y = 3$ ta có phương trình: $x - \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.	0,75
	2. (2,0 điểm) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.	
	Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{8} > 0; (x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = (2x + \frac{9}{4})^2 + \frac{15}{16} > 0$	1,0
	$\rightarrow x^3 < y^3 < (x+2)^3 \rightarrow x < y < x + 2 \rightarrow y = x + 1 \rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right.$	0,75
	Vậy phương trình có 2 nghiệm: $(1;2);(1;0)$	0,25
Câu 4 *(6,0 điểm)*	Vẽ hình đúng theo yêu cầu chung của đề: 	0,5

	1. (2,0 điểm) Chứng minh rằng: $OI.OM = OK.OH$	
	Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau của (O;R) ⇨ MA = MB Lại có: OA = OB Do đó OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow MO \perp AB$ tại I	0,25 0,25 0,25
	$x\acute{e}t\Delta OIK v\grave{a}\Delta OHM c\acute{o}:$ $HOM chung$ $OIK = OHM = 90^0$ $\Rightarrow \Delta OIK \sim \Delta OHM\,(g.g)$ $\Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OK}{OM}$	0,5 0,5
	$\Rightarrow OI.OM = OK.OH(dpcm)$	0,25
	2. (2,0 điểm) Chứng minh: khi M chuyển động trên đường thẳng a thì AB luôn đi qua 1 điểm cố định.	
	Ta có: $OI.OM = OK.OH(cmt)$	0,25
	Xét ΔBMO vuông tại B, $BI \perp OM$ ta có: $OI.OM = OB^2 = R^2$	0,5
	Do đó: $OK.OH = R^2$ $\Rightarrow OK = \dfrac{R^2}{OH}$	0,5
	Vì O và H cố định nên OH không đổi ⇨ OK không đổi	0,5
	Mà $K \in OH$ cố định => K cố định Vậy AB đi qua K cố định khi M chuyển động trên đường thẳng a	0,25
	3. (1,5 điểm) Tìm vị trí của M để S_{OIK} đạt giá trị lớn nhất.	
	Gọi J là trung điểm của OK => J cố định Kẻ $IE \perp OK$ tại E Ta có : ΔOIK có OK không đổi	0,5
	Ta có: $S_{OIK} = \dfrac{1}{2}.OK.IE$ vì OK không đổi nên S_{OIK} lớn nhất khi IE lớn nhất Mà $IE \le IJ = \dfrac{1}{2}OK$ (quan hệ đường vuông góc và đường xiên, trung tuyến thuộc cạnh huyền trong tam giác vuông)	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv J \Leftrightarrow \Delta IKO$ vuông cân tại I $\Rightarrow IOK = 45^0 \Rightarrow \Delta HMO$ vuông cân tại H Vậy S_{OIK} lớn nhất $\Leftrightarrow HM = HO$	0.5
Câu 5 *(2,0 điểm)*	**1.(1điểm) Cho các số thực dương** a,b,c **sao cho** $ab+bc+ca=1$**.** **Chứng minh rằng:** $2abc\left(a+b+c\right) \le \dfrac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$	
	Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$. Ta có: $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \ge a^2b.b^2c + b^2c.c^2a + c^2a.a^2b = abc\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$	0,25

	Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức: SVac - Xơ và giả thiết $ab+bc+ca=1$ta có: $ab^2+bc^2+ca^2=\frac{b^2}{\frac{1}{a}}+\frac{c^2}{\frac{1}{b}}+\frac{a^2}{\frac{1}{c}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=abc\left(a+b+c\right)^2$. Từ đó suy ra $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge\left[abc\left(a+b+c\right)\right]^2$.	0,25
	Bây giờ ta sẽ chứng minh: $\left[abc\left(a+b+c\right)\right]^2-2abc\left(a+b+c\right)+\frac{5}{9}\ge0\Leftrightarrow t^2-6t+5\ge0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t-5\right)\ge0$ (với $t=3abc\left(a+b+c\right)$	0,25
	Mặt khác ta có: $3abc\left(a+b+c\right)=3(ab.ac+bc.ba+ca.cb)\le\left(ab+bc+ca\right)^2=1\Rightarrow0<t\le1$. Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.	0,25
	2. Tổng của cả dãy 100 số là: $\frac{(1+100)100}{2}=5050$ Chia 100 số thành 10 bộ 10 số liên tiếp thì trung bình tổng của 10 bộ số này là $\frac{5050}{10}=505$. Nên tồn tại ít nhất 1 bộ 10 số liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 505. Ta chứng minh số a lớn nhất có thể bằng 505 bằng cách chọn ra ví dụ mà tổng 10 số liên tiếp bất kỳ nhỏ hơn hoặc bằng 505, khi đó mọi số a lớn hơn 505 đều không thỏa mãn.	0,5
	Thật vậy, xét cách sắp xếp sau: 100, 1, 99, 2, 98, 3, ... , 51, 50 (Chia thành các cặp có tổng bằng 101, viết số lớn đứng trước rồi xếp các cặp cạnh nhau theo thứ tự giảm dần của số lớn hơn). Nếu 10 số liên tiếp gồm 5 cặp số như vậy thì tổng 10 số này là 505. Nếu không, 10 số này sẽ gồm số đầu là số nhỏ hơn trong 1 cặp và kết thúc là số lớn hơn trong 1 cặp khác. Các số này thuộc 6 cặp khác nhau là: x, 101 – x, x – 1, 102 – x, ..., x – 4, 105 – x, x – 5, 106 – x Và 10 số được chọn là các số từ 101 – x đến x – 5 (trong dãy trên), dễ thấy tổng 10 số như vậy là 500. Do đó tổng 10 số liên tiếp bất kỳ đều không quá 505. Vậy a = 505.	0,5

--------Hết--------

UBND HUYỆN CẨM GIÀNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 9
NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề gồm 02 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau: $M = \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$

với $x > 1$ và $x \neq 2$.

b) Cho *x, y* là các số dương thoả mãn: $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=\sqrt{2024}$

Tính giá trị của biểu thức: $S = x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x}=x^2+x+1$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+xy=y^2-3y+2\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên a để a + 1, $4a^2+8a+5$ và $6a^2+12a+7$ đồng thời là các số nguyên tố.

b) Cho *x* và *y* là các số hữu tỉ dương và thoả mãn đẳng thức $x^3+y^3=2x^2y^2$

Chứng minh rằng $\sqrt{1-\dfrac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ

Câu 4 (3,0 điểm) :

Cho đường tròn (*O ; R*) và điểm *S* cố định bên ngoài đường tròn (*O*). Từ *S* kẻ các tiếp tuyến *SA, SB* và cắt tuyến *SCD* đến đường tròn (*O*), với *A, B* là tiếp điểm và *C, D* thuộc (*O*) sao cho *SC* < *SD, CD* < *2R*, $\mathrm{ASC} < \mathrm{BSC}$. Gọi *E* là trung điểm của *CD ; H, F* lần lượt là giao của *AB* với *SO* và *OE*.

a) Chứng minh rằng *FC* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*).

b) Qua *C* kẻ đường thẳng song song với *AD* cắt *AS, AB* lần lượt tại *P* và *Q*. Chứng minh rằng *PC* = *CQ*.

c) Gọi *G* là điểm nằm trên cung nhỏ AB của đường tròn (*O*). Tiếp tuyến tại *G* của đường tròn (*O*) cắt *SA, SB* tại *T, J.* Tìm vị trí của *G* cung nhỏ AB để diện tích tam giác *STJ* đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\le\frac{3}{2}$$

----------Hết---------

UBND HUYỆN CẨM GIÀNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM
ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 9 LẦN 1
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN

Câu	**ý**	**Nội dung**	**Điểm**
1 **(2,0đ)**	a (1đ)	$M=\dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$ $=\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{(x-1)}}+\sqrt{x+2\sqrt{(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4x+4}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$	0,25
		$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$ $=\dfrac{\lvert\sqrt{x-1}-1\rvert+\sqrt{x-1}+1}{\lvert x-2\rvert}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)$	0,25
		$TH1: x>2$ $M=\dfrac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		$TH2: 1<x<2$ $M=\dfrac{-\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}+1}{-(x-2)}.\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)=\dfrac{-2}{x-1}$	0,25
	b (1đ)	Với x, y > 0 $2024=\left(x.y+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right)^2$ $=x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+(1+x^2)(1+y^2)$	0,25
		$=x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+1+x^2+y^2+x^2.y^2$ $=\left[\ x^2(1+y^2)+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+y^2(1+x^2)\ \right]+1$	0,25
		$=\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2+1$	0,25
		Do đó: 2024 = S^2 +1 suy ra S = $\sqrt{2023}$ (Vì S > 0) Vậy S = $\sqrt{2023}$	0,25

Câu	ý	Nội dung	Điểm
2 **(2,0đ)**	a (1đ)	$\left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x}=x^2+x+1$ ĐK: $0\le x\le 2$ $\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}+1\right)\sqrt{2-x}=\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$	0,25
		$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1-\sqrt{2-x}\right)=0$ $\Leftrightarrow x-\sqrt{2-x}+1-\sqrt{x}=0 \qquad \left(x+\sqrt{x}+1>0\right)$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+\sqrt{2-x}}-\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x+2}{x+\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=0$	0,25
		Vì $0\le x\le 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2>x+\sqrt{2-x}>0 \\ \sqrt{x}+1>1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x+\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}>1-1=0$ *(Không chứng minh được -0,25)* $\Rightarrow x=1$(TM). Vậy nghiệm của phương trình là x = 1	0,25
	b (1đ)	$2x^2+xy=y^2-3y+2 \Leftrightarrow y^2-\left(x+3\right)y+2-2x^2=0$. $\Leftrightarrow$ (y-2x-2)(y+x-1) = 0	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+2 \\ y=-x+1 \end{array}\right.$.	0,25
		+) $\begin{cases} y=2x+2 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2 \\ (3x+4)^2+5=0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases}$.	0,25
		+) $\begin{cases} y=-x+1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; -1)	0,25

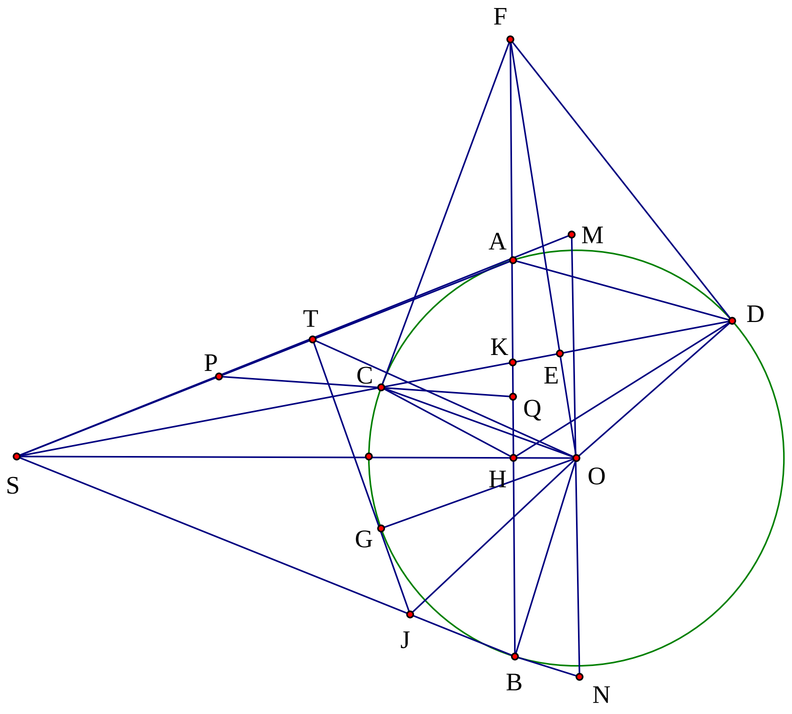
3 **(2,0 điểm)**	a)Tìm tất cả các số tự nhiên a để a + 1, $4a^2+8a+5$ và $6a^2+12a+7$ đồng thời là các số nguyên tố.	**1,00**
	Đặt $a+1=p$. $\Rightarrow 4a^2+8a+5=4\left(a+1\right)^2+1=4p^2+1$ và	0,25

	$6a^2+12a+7=6\left(a+1\right)^2+1=6p^2+1$ Do p là số nguyên tố nên $4p^2+1>5$ và $6p^2+1>5$	
	Ta có $4p^2+1=5p^2-\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ và $6p^2+1=5p^2+5+\left(p+2\right)\left(p-2\right)$ Nếu p chia 5 dư 1 hoặc 4 thì $\left(p-1\right)\left(p+1\right)\ \vdots\ 5$ $\Rightarrow 4p^2+1$ là không số nguyên tố	0,25
	Nếu p chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì $\left(p-2\right)\left(p+2\right)\ \vdots\ 5$ $\Rightarrow 6p^2+1$ không là số nguyên tố	0,25
	Vậy để $4p^2+1$ và $6p^2+1$ là nguyên tố thì $p\ \vdots\ 5$ Mà p là số nguyên tố nên $p=5\ \Rightarrow a=4$ Thử lại với a = 4 thì a + 1 = 5 nguyên tố; $4a^2+8a+5=101$ nguyên tố; $6a^2+12a+7=151$ nguyên tố. Vậy a = 4 là giá trị cần tìm.	0,25

3 **(2,0 điểm)**	b) Cho x và y là các số hữu tỉ dương và thoả mãn đẳng thức $x^3+y^3=2x^2y^2$ Chứng minh rằng $\sqrt{1-\frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ	**1,00**
	Ta có $x^3+y^3=2x^2y^2$ Hay $\left(x^3+y^3\right)^2=4x^4y^4$	0,25
	$\Leftrightarrow x^6+2x^3y^3+y^6=4x^4y^4$ $\Leftrightarrow x^6-2x^3y^3+y^6=4x^4y^4-4x^3y^3$ $\Leftrightarrow (x^3-y^3)^2=4x^3y^3(xy-1)$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(x^3-y^3\right)^2=4x^4y^4\left(1-\frac{1}{xy}\right)$ vì x, y dương	0,25
	$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{xy}=\left(\frac{x^3-y^3}{2x^2y^2}\right)^2$	0,25

	$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{1}{xy}} = \frac{\left\|x^3 - y^3\right\|}{2x^2y^2}$ là số hữu tỉ	

Câu 4 (3,0 điểm)

Phần	Đáp án	Điểm
		
a	Ta có : OH.OS = OB^2 = OC^2	0,25
	ΔOES ~ Δ OHF (g.g) $\Rightarrow \frac{OE}{OH} = \frac{OS}{OF} \Rightarrow$ OH.OS = OE.OF	0,25
	Suy ra OE.OF = OC^2 ⇒ΔOCF ~ ΔOEC (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow OCF = OEC = 90^0 \Rightarrow$ FC ⊥ CO nên FC là tiếp tuyến của (O).	025
b	Từ OH.OS = OC^2 ⇒ ΔOHC ~ ΔOCS $\Rightarrow OHC = OCS \Rightarrow CHS = OCD = ODS$ ⇒ΔSHC ~ ΔSDO $\Rightarrow SCH = HOD$ Từ ΔOHC ~ ΔOCS $\Rightarrow \frac{OH}{HC} = \frac{OC}{CS} \Rightarrow \frac{OH}{HC} = \frac{OD}{CS}$ ⇒ΔHOD ~ Δ HCS	0,25
	$\Rightarrow OHD = SHC$ suy ra HA là phân giác của góc CHD.	0,25
	Gọi K là giao của HA và CD, mà HS ⊥ HA nên HI và HS là phân giác trong và ngoài của ΔCHD $\Rightarrow \frac{SC}{SD} = \frac{KC}{KD}$	0,25

	PQ // AD $\Rightarrow \frac{PC}{AD}=\frac{SC}{SD}=\frac{KC}{KD}=\frac{CQ}{AD}\Rightarrow$ CP = CQ.	025
c	Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với SO cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Chứng minh được ΔMOT ~ ΔOJT ~ ΔNJO (g.g) $\Rightarrow \frac{MT}{ON}=\frac{MO}{NJ}$ ⇒MT.NJ = OM.ON = MO^2 = $\frac{MN^2}{4}$ (*)	0,25
	Ta có $S_{STJ} = S_{SMN} - S_{MTJN}$ Do S_{SMN} không đổi nên S_{STJ} đạt GTLN khi và chỉ khi S_{MTJN} đạt GTNN . Ta có $S_{MTJN} = S_{MOT} + S_{TOJ} + S_{JON} = \frac{1}{2}$r(MT + TJ + JN) (vì OF = OG = OE = r)	0,25
	Lại có MT + TJ + JN = MA + 2TA + 2JB + NB = 2.(MT + NJ) – 2MA (do MA = NB, AT = TG, JG = JB).	0,25
	Mà MT + NJ $\geq 2\sqrt{MT.JN}$. Do đó MT + TJ + JN $\geq 2.2\sqrt{MT.JN}$ - 2MA = 2MN – 2MA (do (*)) ⇒ $S_{MTJN} \geq$ r(MN – MA). Dấu « = » xảy ra khi MT=NJ ⇔ TJ // MN ⇔ G là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.	025

Bài 5: (1,0 điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
	Ta có BĐT Bu nhia cop ky $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)^2=...=\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(x-z\right)^2\geq 0$ $\Rightarrow\left(x+y+z\right)^2\leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ nên với x,y,z>0 ta có $x+y+z\leq\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, áp dụng ta có $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\leq\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}\right.}$ $\left.2\right)$ -Với x,y>0 ta có $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\left(x+y\right)^2\geq 4xy\Rightarrow\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ áp dụng ta có	*0,25*

	$\frac{1}{ab+a+2}=\frac{1}{ab+1+a+1}=\frac{1}{ab+abc+a+1}=\frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$ $\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab(c+1)}+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ Vậy ta có $\frac{1}{ab+a+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$ Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)$; $\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$ nên $\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\right)}$ $\le\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)}=\frac{3}{2}$	*0,25* *0,25*
	Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+2}}+\frac{1}{\sqrt{ca+c+2}}\le\frac{3}{2}$ dấu “=” có khi a=b=c=1	0,25

Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu I. ***(4,0 điểm)***

1. Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm giá trị của x để M >1

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$

Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$

Câu II. ***(4,0 điểm)***

1. Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26. \end{cases}$

Câu III. ***(4,0 điểm)***

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$

2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn n^3+2023 chia hết cho 6.

Câu IV. ***(6,0 điểm)*** Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E. Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F $(0<FA\le FB)$. Đường thẳng CF cắt AB tại M và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).

a) Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$

b) Chứng minh $CE.CB=CP.CM$.

c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB. Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K. Chứng minh $AKF=90^0$ và tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\dfrac{AB}{FH}+\dfrac{BD}{FI}+\dfrac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu V. ***(2,0 điểm)*** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\dfrac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\dfrac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$

--- HẾT---

Họ và tên thí sinh:…………………………Số báo danh:...
Người coi thi số 1………………………………Người coi thi số 2………………..........................

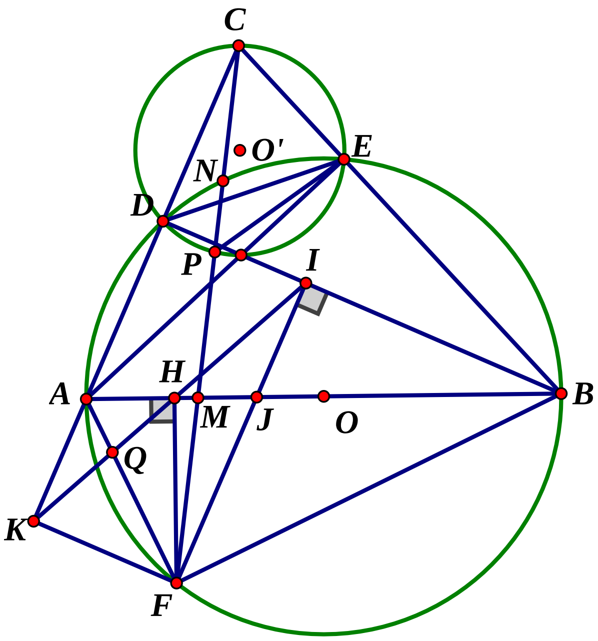
HƯỚNG DẪN CHẤM

(*Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*)

Câu	**Sơ lược lời giải**	**Điểm**
I. (3,0 điểm)	1. Cho biểu thức: $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$ Rút gọn M và tìm giá trị của x để M >1	**2,0**
	Điều kiện với $x\ge 0; x\ne 1,3,4$ $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}+\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)}\right)$ $=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$ $=\frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$	0,25 0.5 0.5
	Vậy M=$\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x\ge 0; x\ne 1,3,4$ M>1 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}-1>0\Leftrightarrow\frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)}>0\Leftrightarrow\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}2-\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 1<x<4$. Vậy M>1 khi 1<x<4 và x$\ne$3	0,25 0,5
	2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$ Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$	**2,0**

Câu	**Sơ lược lời giải**	**Điểm**
	Ta có: $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$ $\Rightarrow (2-Q)^2=\left[xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$ $\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$ Ta lại có $Q^2=x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$ $\Rightarrow Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$ Do đó $4-4Q=1\Rightarrow Q=\frac{3}{4}\cdot$	0,5 0,5 0.5 0,5
II. **(4,0 điểm)**	**1.** Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0$.(1)	**2,0**
	Điều kiện $x^3-3x^2+4x-2\geq 0$	0,25
	Có $x^3-3x^2+4x-2=(x-1)(x^2-2x+2)$ nên $x^3-3x^2+4x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\forall x$	0,25
	$(1)\Leftrightarrow 2(x-1)+(x^2-2x+2)-3\sqrt{(x-1)(x^2-2x+2)}=0$ $\Leftrightarrow 2.\frac{x-1}{x^2-2x+2}-3.\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}+1=0$	0,25
	Đặt $t=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}},t\geq 0$ ta được phương trình $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$	0,5
	$t=1\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}=1\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-2x+2}=1\Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ (vô nghiệm)	0,25
	$t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x^2-6x+6=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy pt có 2 nghiệm $x=3\pm\sqrt{3}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 \quad (1) \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26(2) \end{cases}$	**2,0**
	Điều kiện $\begin{cases} x\geq -\frac{3}{2} \\ y\geq 0 \end{cases}$	0,25
	$(1)\Leftrightarrow (x+2)^2=(y+3)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=y+3 \\ x+2=-y-3 \end{array}\right.$	0,5
	$+)x+2=-y-3\Leftrightarrow (x+5)+y=0$ vô nghiệm vì $(x+5)+y>0\ \forall x\geq -\frac{3}{2},y\geq 0.$	0,5

Câu	**Sơ lược lời giải**	**Điểm**
	+)$x+2=y+3\Leftrightarrow y=x-1$ thay vào (2) ta được $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2(x-1)}+2x^2+x=26$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+3}-3\right)+\left(\sqrt{2x-2}-2\right)+2x^2+x-21=0$ $\Leftrightarrow\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}+2}+(x-3)(2x+7)=0$ $\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7\right)=0$ $\Leftrightarrow x=3, do\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7>0\ \forall x\geq 1$	0,5
	+)$x=3\Rightarrow y=2$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$	0,25
III. (4,0 điểm)	1.Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$	**2đ**
	Ta có: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$ $\Leftrightarrow(y^2+y-1)^2=x^2+x+1$ (*) Nếu x > 0 thì $x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*). Nếu x <-1 thì $(x+1)^2<x^2+x+1<x^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*). Nếu x =-1 hoặc x = 0 thì từ (*) suy ra $y^2+y-1=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=-1\\y=0\\y=1\end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm nguyên: $(x;y)=\{(-1;-2),(-1;-1),(-1;0),(-1;1),(0;-2),(0;-1),(0;0),(0;1)\}$	0,5 0,5 0,75 0,25
	2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn n^3+2023 chia hết cho 6.	**2,0**
	Đặt $n=6q+r,\ r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Khi đó n^3+2023 chia hết cho 6 khi r^3+1 chia hết cho 6.	0,25
	Nếu r chẵn thì r^3+1 lẻ, do đó r^3+1 không chia hết cho 6. Suy ra $r\in\{1,3,5\}$.	0,5
	Với $r=1\Rightarrow r^3+1=2$ không chia hết cho 6. Với $r=3\Rightarrow r^3+1=28$. không chia hết cho 6. Với $r=5\Rightarrow r^3+1=126$ chia hết cho 6.	0,5
	Suy ra $n=6q+5$. Mà $0\leq n\leq 2023\Rightarrow 0\leq q\leq 336$. Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.	0,5 0,25
V. (7,0 điểm)	Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA,CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là	

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$D, E.$ Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F $(0 < FA \leq FB)$. Đường thẳng CF cắt AB tại M, và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).	
	a) Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$	**2,0**
		
	Ta chứng minh được $\triangle CEA$; $\triangle CDB$ là 2 tam giác vuông đồng dạng(g.g)	1
	$\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle EDC$ (c.g.c)	1
	b) Chứng minh $CE.CB = CP.CM$.	**2**
	Theo câu a) $\triangle ABC \backsim \triangle EDC \Rightarrow CBA = CDE$ (1) Mà dễ thấy $CDE = \frac{1}{2} CO'E$ (kéo dài DO' và dùng tính chất góc ngoài tam giác) Tương tự $CPE = \frac{1}{2} CO'E$ nên $CDE = CPE$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $CBA = CPE$ Hay $CBM = CPE$	0,5 0,5 0,5
	Xét $\triangle CPE$ và $\triangle CBM$ có: $CBM = CPE$ và BCM chung Suy ra $\triangle CPE \backsim \triangle CBM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{CP} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CE.CB = CM.CP$ (Đpcm)	0,5
	c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng $BD, AB.$ Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại $K.$ Chứng minh $AKF = 90^0$ và tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	**2**

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Gọi J là giao điểm của FI và BH; Q là giao điểm của HK và AF. Ta chứng minh được $\triangle FHJ \backsim \triangle BIJ(g.g) \Rightarrow \triangle HIJ \backsim \triangle FBJ(c.g.c) \Rightarrow HIJ = FBJ$ Dễ thấy $HFA = FBJ$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) Và $HIJ = HKA$ (So le trong, do FI//KD) $\Rightarrow HFA = HKA \Rightarrow \triangle AQK \backsim \triangle HQF$ (g.g) $\Rightarrow \triangle AQH \backsim \triangle KQF$ $\Rightarrow AHQ = KFQ$. Mà $\Rightarrow AHQ = IHJ$ (đối đỉnh) và $IHJ = BFJ$ (Do $\triangle HIJ \backsim \triangle FBJ$) $\Rightarrow BFJ = KFQ$. Hay $\Rightarrow BFI = KFA$ (*) Xét tứ giác BDAF có tổng 4 góc bằng 360^0. Mà dễ thấy $ADB = AFB = 90^0$ Suy ra: $DBF + DAF = 180^0$ Mà $KAF + DAF = 180^0$ (kề bù) $\Rightarrow DBF = KAF$ Hay $IBF = KAF$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $\triangle FAK \backsim \triangle FBI$ (g.g) $\Rightarrow BIF = AKF = 90^0$	0,25 0,25 0,25 0,25
	Xét ΔDFK và ΔBFH có $FKD = FHB = 90^0$ Và ta chứng minh được $FBH = FDA (= \frac{1}{2} AOF)$ $\Rightarrow \Delta DFK \sim \Delta BFH \Rightarrow \frac{DK}{FK} = \frac{BH}{FH}$ (1)	0,25
	Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác HAF $\Rightarrow \frac{ID}{IF} = \frac{HA}{HF}$	0,25
	Mà $\triangle FAK \backsim \triangle FBI$ nên: $\frac{AK}{FK} = \frac{BI}{FI}$ (2) Từ (1) , (2) $\Rightarrow \frac{DK}{FK} - \frac{AK}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$ hay: $\frac{DA}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$ $\Rightarrow \frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{BD}{FI} - \frac{BI}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{ID}{FI}$ Mà $\frac{ID}{FI} = \frac{HA}{FH}$ suy ra: $\frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{HA}{FH} = \frac{AB}{FH}$	0,25
	Vậy $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK} = \frac{2AB}{FH}$ nên $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung AB	0,25
VI. **(2,0 điểm)**	Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$.	
	Ta có $\frac{2x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} = \frac{x^4 + y^4 + (x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)(x + y)} = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + x - y$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$\geq \dfrac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}{x+y}+x-y \geq \dfrac{1}{4}(x+y)+x-y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{3}{4}y$.	0,5
	Tương tự $\dfrac{2y^4}{\left(y^2+z^2\right)(y+z)} \geq \dfrac{5}{4}y-\dfrac{3}{4}z$, $\dfrac{2z^4}{\left(z^2+x^2\right)(z+x)} \geq \dfrac{5}{4}z-\dfrac{3}{4}x$.	0,5
	Vậy 2F $\geq \dfrac{5}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}(x+y+z)=\dfrac{x+y+z}{2}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow F \geq \dfrac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\dfrac{1}{4}$.	0,5

UBND HUYỆN THANH SƠN
PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề có 03 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
Năm học 2023 - 2024
Môn: Toán
(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (8,0 điểm)

Hãy chọn phương án trả lời đúng rồi ghi vào tờ giấy thi.

Câu 1: Cho biểu thức $P=\frac{x}{\sqrt{xy}+y}+\frac{y}{\sqrt{xy}-x}-\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ với $x+y=7$ và $xy=10$. Khi đó giá trị của biểu thức P là

A. $P=\pm\frac{7}{3}$.   B. $P=\frac{7}{3}$.   C. $P=-\frac{7}{3}$.   D. $P=\frac{1}{5}$.

Câu 2: Cho $A=\frac{x\left(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\right)}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x>4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là

A. 6.   B. 7.   C. 8.   D. 9.

Câu 3: Gọi *S* là tổng các giá trị nguyên của x để biểu thức $N=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$ có giá trị nguyên. Giá trị của *S* là

A. $S=36$.   B. $S=38$.   C. $S=41$.   D. $S=44$.

Câu 4: Các đường thẳng $y=-5(x+1);\ y=ax+3;\ y=3x+a$ đồng quy với giá trị của a là

A. $a=13$.   B. $a=3$.   C. $a=-13$.   D. $a\in\{-13;3\}$.

Câu 5: Với giá trị nào của m thì đồ thị 2 hàm số $y=2x+m+3$ và $y=3x+5-m$ cắt nhau tại 1 điểm nằm trên trục tung ?

A. $m=1$.   B. $m=-1$.   C. $m=2$.   D. $m=3$.

Câu 6: Cho đường thẳng $mx+(2-3m)y+m-1=0$ (d). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất. Khi đó giá trị của m bằng

A. $m=12$.   B. $m=-12$.   C. $m=-\frac{1}{2}$.   D. $m=\frac{1}{2}$.

Câu 7: Tổng các nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x+9}=\sqrt{4-x}+\sqrt{3x+1}$ là

A. 2.   B. 3.   C. -2.   D. $\frac{11}{3}$.

Câu 8: Cho phương trình: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x-4=0$. Phương trình có số nghiệm là

A. 1.   B. 2.   C. 12.   D. 18.

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại đỉnh A, $AC = 8, AB = \sqrt{192}$, $AH \perp BC \ (H \in BC)$. Khi đó tỉ số đồng dạng k của tam giác HAB và ACB là

A. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $k = \sqrt{3}$. C. $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. D. $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10: Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo vuông góc tại O. Biết $AB = \frac{1}{2}CD$, $AO = \frac{1}{3}AC$, $S_{AOB} = a^2$. Khi đó diện tích S của tứ giác ABCD là

A. $S = 7a^2$. B. $S = 8a^2$. C. $9a^2$. D. $S = 10a^2$.

Câu 11: Cho tam giác cân ABC có $A = 120^0$; $AB = AC$; $BC = 2$; $BH \perp AC \ (H \in AC)$. Độ dài HC nhận giá trị nào sau đây?

A. HC = 0,5. B. $HC = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. C. $HC = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. D. $HC = \sqrt{3}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại B. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{1}{3}CA$. Vẽ $DF \perp AB \ (F \in AB)$. Gọi E là trung điểm của DF. Đáp án nào đúng?

A. $AC = 3BE$. B. $BD = 2CD$. C. $BE = \frac{1}{2}AC$. D. $BE = \frac{1}{4}AC$.

Câu 13: Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành AMON sao cho $M \in AB, O \in BC$, $N \in AC$. Biết $S_{MOB} = a^2, S_{NOC} = b^2$. Diện tích S của hình bình hành AMON bằng

A. $S = ab$. B. $S = 2ab$. C. $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. D. $S = (a^2 + b^2)$.

Câu 14: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và điểm A nằm trên nửa đường tròn (A khác B, C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I và K lần lượt đối xứng với H qua AB và AC. Diện tích tứ giác BIKC lớn nhất bằng

A. R^2. B. $2R^2$. C. $3R^2$. D. $4R^2$.

Câu 15: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. Các điểm D và E thuộc nửa đường tròn sao cho HC là tia phân giác của góc DHE. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $HE^2 = HC.HD$. B. $HC = \frac{HD + HE}{2}$. C. $HC^2 = HD.HE$. D. $HD^2 = HC.HE$.

Câu 16: Một người mang trứng gà ra chợ bán. Tổng số trứng gà bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng gà bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Số ngày người đó bán hết số trứng gà là

A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

II. PHẦN TỰ LUẬN. (12,0 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0$.

Bài 2. (3,5 điểm)

a) Giải phương trình $6x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$, DC là một dây cố định không đi qua O. Gọi S là điểm di động trên tia đối của tia DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O;R)$, (A, B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DC.

a) Chứng minh 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn;

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB. Chứng minh: $SC.SD = SH.SO$;

c) Chứng minh: $DHC = DOC$;

d) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Bài 4. (1,5 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy}$$

---------------------**HẾT**--------------------

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:......................

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN 2023 - 2024

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Lưu ý: Nếu học sinh làm cách khác, tổ chấm thống nhất cho điểm. Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai không tính điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm). Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	**C**	**B**	**C**	**A**	**D**	**D**	**A**
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	D	**C**	**D**	**A**	**B**	**B**	**C**	**B**

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0$.

Nội dung cần đạt	**Điểm**
a) $A = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$	0,25
$n(n-1) \vdots 2 \Rightarrow A \vdots 2 \quad (1)$	0,25
- Nếu $n \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$. Với mọi số nguyên k ta xét - Nếu $n = 5k + 1 \Rightarrow (n-1) \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$	0,25
- Nếu $n = 5k + 2 \Rightarrow (n^2+1) = (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$ - Nếu $n = 5k + 3 \Rightarrow (n^2+1) = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$	0,25
- Nếu $n = 5k + 4 \Rightarrow (n+1) \vdots 5 \Rightarrow A \vdots 5$. Suy ra $A \vdots 5, \forall n \in Z^+ \quad (2)$	0,25
Từ (1), (2) và 2; 5 nguyên tố cùng nhau => $A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n.	0,25
b) Giả sử tồn tại x, y nguyên thỏa mãn $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0 \Leftrightarrow y(x-2) = -x^2 + x + 5 \quad (*)$	0,25
Với x = 2 thì: $(*) \Leftrightarrow 0 = 3$ (Không thỏa mãn)	0,25
Với $x \neq 2$ ta có: $(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{-x^2 + x + 5}{x - 2} = -x - 1 + \dfrac{3}{x-2}$	0,25
Để y nguyên thì x – 2 là ước của 3 $\Rightarrow x - 2 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow x \in \{-1; 1; 3; 5\}$	0,25
Tương ứng với $y \in \{-1; -5; -1; -5\}$	0,25
Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y) = (-1;-1); (1;-5); (3;-1); (5;-5)$	0,25

Bài 2. (3,5 điểm)

a) Giải phương trình $6x^3 - x^2 + x = \dfrac{1}{3}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Nội dung cần đạt	**Điểm**
a) $6x^3 - x^2 + x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 17x^3 + (x-1)^3 = 0$	0,5

$\Leftrightarrow 17x^3=\left(1-x\right)^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{17}x\right)^3=\left(1-x\right)^3$	0,5
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{17}x=1-x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{17}+1\right)x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{17}+1}$	0,25
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt[3]{17}+1}$	0,25
b) PT viết lại thành $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5$	0,25
Vì $\sqrt{x^2+12}>\sqrt{x^2+5}$ nên để phương trình có nghiệm thì $3x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$	0,25
Ta nhận thấy x = 2 là nghiệm của phương trình, như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $\left(x-2\right)A\left(x\right)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách như sau : $\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3\left(x-2\right)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$ $\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \quad (1)$	0,5
Ta thấy $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\left(x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}\right)<0$	0,25
Do $\left(x+2\right)>0$ với $x>\frac{5}{3}$ và $\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}$ vì $\sqrt{x^2+12}+4>\sqrt{x^2+5}+3>0$	0,25
Suy ra $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0 \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0$	0,25
Từ (1) suy ra x = 2 là nghiệm duy nhất của bài toán.	0,25

Bài 3. (4,0 điểm)

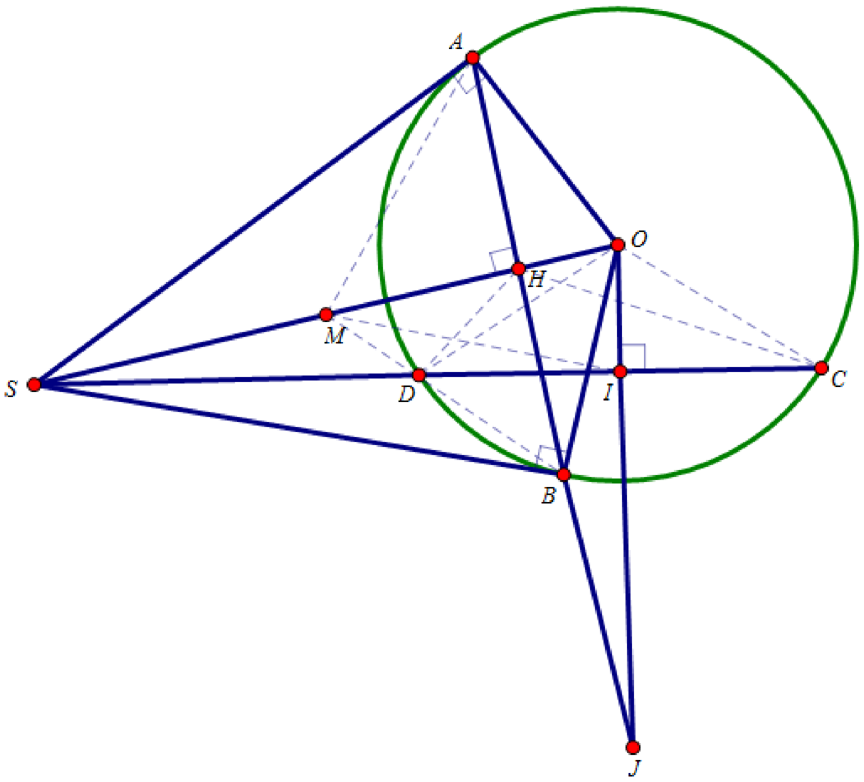
Cho đường tròn $\left(O;R\right)$, DC là một dây cố định không đi qua O. Gọi S là điểm di động trên tia đối của tia DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $\left(O;R\right)$, (A,B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DC.

a) Chứng minh 5 điểm S,A,B,I,O cùng thuộc một đường tròn;

b) Gọi H là giao điểm của SO và AB. Chứng minh: $SC.SD=SH.SO$;

c) Chứng minh: $DHC=DOC$;

d) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Hình vẽ 	
a) (0,75 điểm) Vì SA, SB là các tiếp tuyến nên $SA \perp OA$, $SB \perp OB$, mặt khác I là trung điểm của CD nên, $OI \perp CD$.	0,25
Gọi M là trung điểm của SO. Khi đó ta có $MS = MO = MA = MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông). Suy ra 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn (M).	0,5
b) (1,0 điểm) Xét hai ΔSDB và ΔSBC có $\begin{cases} \hat{S} \text{ chung} \\ SBD = SCB \end{cases}$ suy ra $\Delta SDB \backsim \Delta SBC$ (g-g)	0,5
Suy ra $SB^2 = SD.SC\,(1)$ Xét ΔSBO có $SB^2 = SH.SO$ (2) Từ (1) và (2) $SD.SC = SH.SO \Leftrightarrow \dfrac{SC}{SH} = \dfrac{SO}{SD}$.	0,5
c) (1,0 điểm) Xét hai ΔSDH và ΔSOC có $\begin{cases} \hat{S} \text{ chung} \\ \dfrac{SC}{SH} = \dfrac{SO}{SD} \end{cases}$ suy ra $\Delta SDH \backsim \Delta SOC$ (c-g-c) Suy ra $SDH = SOC$ (hai góc tương ứng).	0,5
Xét tứ giác DHOC có: $HOC + HDC = SOC + HDC = SDH + HDC = 180^0$ suy ra tứ giác DHOC nội tiếp. Suy ra $DHC = DOC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DC).	0,5

d) (1,25 điểm). Gọi J là giao điểm của AB và OI. Xét hai ΔOIS và ΔOHJ có $\begin{cases} OIS = OHJ = 90^0 \\ O \text{ chung} \end{cases}$	0,25
Suy ra $\Delta OIS \backsim \Delta OHJ$ (g-g) => $OI.OJ = OH.OS$	0,25
Mặt khác $OH.OS = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông SBO) Từ đó $OI.OJ = OH.OS = R^2 \Leftrightarrow OJ = \dfrac{R^2}{OI}$	0,5
Hệ thức này chứng tỏ J là điểm cố định. Hay đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định J khi S di động.	0,25

Bài 4. (1,5 điểm) a) Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy}$$

Nội dung cần đạt	**Điểm**
a) Ta có, a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1 $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 3(ab + bc + ac) \geq 0$ Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + [1 - 3(ab + bc + ca)] \geq 0$	0,25
Theo trên $1 - 3(ab + bc + ac) \geq 0$, ta đi CM $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ Thật vậy, $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ Đẳng thức luôn đúng	0,25
b) Ta có $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \leq 3$.	0,25
Với $x, y, z > 0$, theo BĐT Cauchy ta được $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ $x^4 + yz \geq 2\sqrt{x^4 yz} = 2x^2\sqrt{yz} \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^4 + yz} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{yz}}$	0,25
Tương tự ta được: $\dfrac{y^2}{y^4 + zx} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{zx}}; \dfrac{z^2}{z^4 + xy} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$ $P = \dfrac{x^2}{x^4 + yz} + \dfrac{y^2}{y^4 + zx} + \dfrac{z^2}{z^4 + xy} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{xz}} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$	0,25
$\leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{xy + yz + zx}{xyz}\right) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}\right) \leq \dfrac{3}{2}$. GTLN của $P = \dfrac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$	0,25

--------------------------HẾT----------------------

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi có 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho biểu thức $P=\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{\sqrt{xy}\left(x+y\right)-xy}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$ (với $x>0;y>0$). Biết $xy=16$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 2. Cho $\text{x}=\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}$. Giá trị biểu thức $P=20x^{20}+2003x^{2003}$ bằng

A. -1. **B.** 2023. **C.** 1983. **D.** 0.

Câu 3. Cho $\left(d_1\right):\left(m^2-1\right)x-y+2m+5=0$ và $\left(d_2\right):3x-y+1=0$. Giá trị của m để hai đường thẳng song song là

A. $m=2$ hoặc $m=-2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Câu 4. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\x-y=3m-1\end{cases}$ có nghiệm $\left(x,y\right)$ thỏa $x>y$?

A. $m<\frac{1}{2}$. **B.** $m>\frac{1}{3}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>\frac{1}{2}$.

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=3m\\mx-y=m^2-2\end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2-12x-12y<0$?

A. 13. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 6. Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=2x-m^2$ có đồ thị lần lượt là Parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng d. Tổng các giá trị nguyên của m để đường thẳng d và Parabol $\left(P\right)$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7. Cho Parabol $\left(P\right):y=x^2$ cắt đường thẳng $\left(d\right):y=\left(m-2\right)x+m^2-3m+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m, $\left(m\le 2023\right)$ để $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt nằm về hai phía trục tung?

A. 2022. **B.** 2021. **C.** 0. **D.** 2023.

Câu 8. Cho phương trình bậc hai $mx^2-(2m+1)x+m-2=0$. Giả sử $m=m_0$ là giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho tổng bình phương hai nghiệm bằng 22. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m_0<0$. **B.** $1<m_0<2$. **C.** $2<m_0<4$. **D.** $0<m_0<1$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$, một đường thẳng d đi qua A lần lượt cắt BD,BC,DC theo thứ tự tại E,K,G. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $AE^2=EK.EG$. **B.** $AE^2=EK.KG$.

C. $AE^2=AE.AK$. **D.** $AE^2=AE.AG$.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi điểm P,Q lần lượt nằm trên các cạnh BC,CD sao cho $BP=1$, tam giác APQ vuông cân và góc $APB=60^{\circ}$. Diện tích tam giác ADQ bằng

A. $3\ \text{cm}^2$. **B.** $\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **C.** $1\ \text{cm}^2$. **D.** $2\ \text{cm}^2$.

Câu 11. Một hình hộp chữ nhật được ghép bởi 42 hình lập phương cạnh 1cm. Biết chu vi đáy của hình hộp chữ nhật là 18cm. Độ dài cạnh lớn nhất của hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. 6 cm. **B.** 7 cm. **C.** 3 cm. **D.** 9 cm.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh AB, AC sao cho $MN // BC$. Biết $AB = 9$ cm, $AM = 3$ cm, $AN = 4$ cm. Độ dài đoạn BC bằng

A. 15 cm. **B.** 12 cm. **C.** 10 cm. **D.** 16 cm.

Câu 13. Cho tam giác ABC đều có diện tích bằng $8+4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Gọi M là trung điểm của BC, phân giác của góc MAB cắt BM tại N. Diện tích của tam giác ABN bằng

A. $2\ \text{cm}^2$. **B.** $3\ \text{cm}^2$. **C.** $4\ \text{cm}^2$. **D.** $1\ \text{cm}^2$.

Câu 14. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 10$. Dây cung CD vuông góc với AB tại $E, AE = 1$. Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở K. Độ dài đoạn BK bằng

A. 9. **B.** 15. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn cắt nhau tại M. Biết rằng $BAC = 2BMC$. Số đo góc BAC bằng

A. 75°. **B.** 90°. **C.** 80°. **D.** 72°.

Câu 16. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50 ngàn đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1 ngàn đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30 ngàn đồng.

A. 45 ngàn đồng. **B.** 40 ngàn đồng. **C.** 42 ngàn đồng. **D.** 50 ngàn đồng.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $(x-4)y^2 = x^2$.

2) Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10, P(2) = 20,\ P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12)+P(-8)}{10} + 25$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-3} = y+\sqrt{y^2+3} \\ x^3 - y^3 = 3x - 3y + 4 \end{cases}$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, AC tương ứng tại K, L. Tiếp tuyến của (O) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M, N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

1) Chứng minh rằng $MON = 90^\circ - \dfrac{1}{2}BAC$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL = EM.EN$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c và thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh $ab + bc + ca \le abc + 2$.

HẾT

- Họ và tên thí sinh:………………………………………………………… SBD:…………………………

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
CẤP HUYỆN NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: TOÁN

*(Hướng dẫn chấm có **04** trang)*

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Đáp án	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**	**A**	**D**	**D**
Câu	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đáp án	**A**	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**

II. PHẦN TỰ LUẬN

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

Hướng dẫn chấm tự luận

Câu 1 (3,0 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $(x-4)y^2=x^2 \ (1)$

2) Chứng minh rằng trong ba số chính phương tùy ý luôn tồn tại hai số mà hiệu của chúng chia hết cho 4.

<table>
<tr><th>Ý</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Câu 1.1 (1,5 điểm)</td><td>Với $x=4$ thì (1) trở thành: $0.y^2=16$ (vô lý) $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Với $x\neq 4$ thì $y^2=\dfrac{x^2}{x-4}=\dfrac{x^2-16+16}{x-4}=x+4+\dfrac{16}{x-4}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Do $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $y^2\in\mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{16}{x-4}\in\mathbb{Z}$.
Do đó $x-4$ là ước của $16 \Rightarrow x-4\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8;\pm16\}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>$x-4$</td><td>-16</td><td>-8</td><td>-4</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>x</td><td>-12</td><td>-4</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>12</td><td>20</td></tr>
<tr><td>y^2</td><td>-9</td><td>-2</td><td>0</td><td>-2</td><td>-9</td><td>25</td><td>18</td><td>16</td><td>18</td><td>25</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>±5</td><td>$\pm3\sqrt{2}$ (loại)</td><td>±4</td><td>$\pm3\sqrt{2}$ (loại)</td><td>±5</td></tr>
</table>
</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Kết luận: Phương trình có các nghiệm nguyên là:
$(5;5),(5;-5),(4;4),(4;-4),(-4;0),(20;5),(20;-5)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.2</td><td>Vì một số nguyên bất kỳ phải là số chẵn hoặc là số lẻ. Do đó theo nguyên lý Đirichlet trong 3 số nguyên bất kỳ luôn chọn ra được 2 số có cùng tính chẵn lẻ.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Áp dụng ta có trong 3 số chính phương bất kỳ luôn chọn ra được hai số có cùng tính chẵn lẻ. Gọi 2 số chính phương được chọn ra đó là a^2 và b^2. Khi đó ta có $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

(1,5 điểm)	+) Vì a^2 và b^2 cùng tính chẵn lẻ nên a, b cũng cùng tính chẵn lẻ. Do đó $a-b$ là số chẵn và $a-b$ cũng là số chẵn $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\vdots 4$ (đpcm).	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$ là các hằng số). Biết rằng $P(1)=10, P(2)=20,\ P(3)=30.$ Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{P(12)+P(-8)}{10}+25.$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-3}=y+\sqrt{y^2+3} & (1) \\ x^3-y^3=3x-3y+4 & (2) \end{cases}.$

Ý	Đáp án	Điểm
Câu 2.1 (2,0 điểm)	Đặt $Q(x)=P(x)-10x$ Có $Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$	0,5
	Giả sử $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$	0,5
	Khi đó $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)+10x$	0,5
	Từ đó tính được $\dfrac{P(12)+P(-8)}{10}+25=2009.$	0,5
Câu 2.2 (2,0 điểm)	Điều kiện: $\lvert x\rvert \ge \sqrt{3}.$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u=x+\sqrt{x^2-3} \\ v=y+\sqrt{y^2+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\ge x, v\ge y \\ x=\dfrac{u^2+3}{2u} \\ y=\dfrac{v^2-3}{2v} \end{cases}$	0,25
	Từ phương trình $(1)\Rightarrow u=v\Rightarrow y=\dfrac{u^2-3}{2u}\Rightarrow x-y=\dfrac{3}{u}.$	0,25
	Phương trình $(2)\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)=3(x-y)+4$ $\Leftrightarrow (x-y)\left[(x-y)^2+3xy-3\right]=4$	0,25
	Biến đổi sang ẩn phụ ta được phương trình mới $\dfrac{3}{u}\left(\dfrac{9}{u^2}+3.\dfrac{u^2+3}{2u}.\dfrac{u^2-3}{2u}-3\right)=4\Leftrightarrow 9u^4-16u^3-36u^2+27=0$ $\Leftrightarrow (u-3)\left(9u^3+11u^2-3u-9\right)=0\ (*)$	0,25
	Nếu $x\le 0\Rightarrow x+\sqrt{x^2-3}<x+\lvert x\rvert=x-x=0$ Mặt khác $y+\sqrt{y^2+3}>y+\lvert y\rvert\ge 0$ do đó (1) vô nghiệm. Vậy $x>0,$ kết hợp điều kiện $\lvert x\rvert\ge\sqrt{3}\Rightarrow x\ge\sqrt{3}\Rightarrow u\ge\sqrt{3}>1$	0,25
	Khi đó $9u^3+11u^2-3u-9>9.1^3+3u(u-1)+8u^2-9>0.$ Do đó $(*)\Leftrightarrow u=3\Rightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x^2-3}=3 \\ y+\sqrt{y^2+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$	0,25

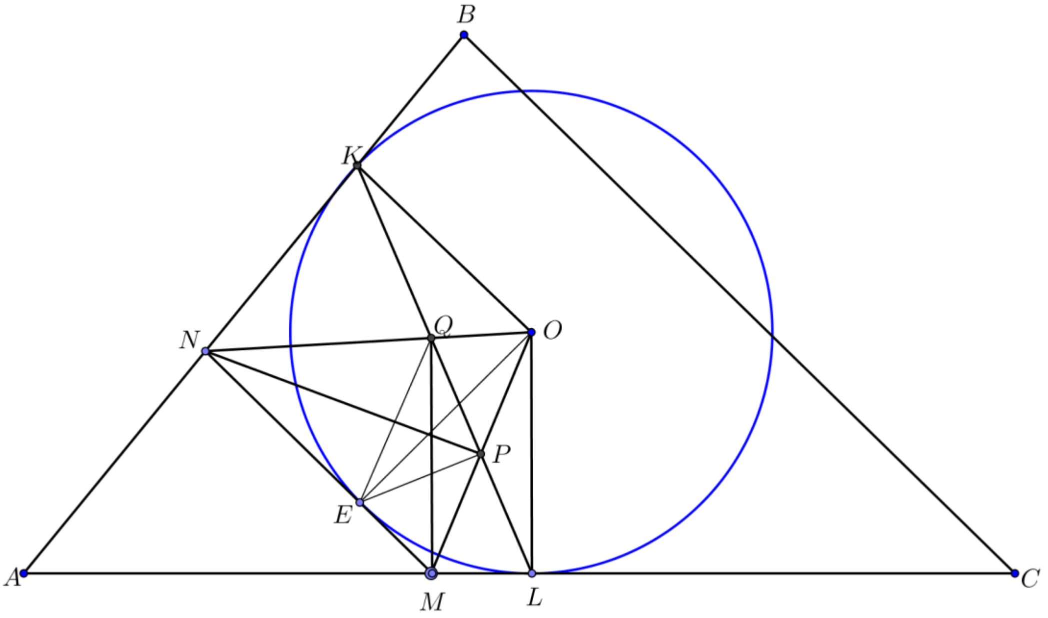
	Đối chiếu điều kiện kết luận nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;1)$.	0,25

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các đoạn thẳng AB,AC tương ứng tại K,L. Tiếp tuyến của (O) tại điểm E thuộc cung nhỏ KL cắt đường thẳng AL, AK tương ứng tại M,N. Đường thẳng KL cắt OM tại P và cắt ON tại Q.

1) Chứng minh rằng $MON=90°-\frac{1}{2}BAC$.

2) Chứng minh rằng đường thẳng MQ, NP và OE cùng đi qua một điểm.

3) Chứng minh $KQ.PL=EM.EN$.

Ý	Đáp án	Điểm
3.1 **(1,5 điểm)**		
	1) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $MOL=MOE; NOE=NOK$ (1)	0,25
	Tứ giác $ALOK$ có $AKO+ALO=90°+90°=180° \Rightarrow BAC+KOL=180°$	0,25
	$\Rightarrow BAC+MOL+MOE+EON+NOK=180°$ $\Rightarrow \frac{1}{2}BAC+\frac{1}{2}\left(MOL+MOE+EON+NOK\right)=90°$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}BAC+\left(MOE+EON\right)=90°$	0,25
	Hay $\frac{1}{2}BAC+MON=90° \Rightarrow MON=90°-\frac{1}{2}BAC$ (ĐPCM)	0,25
3.2 **(1,5 điểm)**	2) Từ giả thiết và 1) suy ra $OEP=OLK$ (3)	0,25
	Do tam giác OKL cân tại O nên $OKL=OLK$ (4). Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $OKEP$ nội tiếp. Mặt khác do tứ giác $OKNE$ nội tiếp đường tròn đường kính ON	0,25
	Từ đó suy ra 5 điểm O,K,N,E,P cùng thuộc đường tròn đường kính ON	0,25
	$\Rightarrow NPO=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow NP\perp OM$ (5)	0,25
	Chứng minh tương tự cũng có $MQ\perp ON$ (6) mà $OE\perp MN$ (7)	0,25
	Từ $(5),(6),(7)\Rightarrow$ ba đường cao MQ, NP và OE của tam giác OMN đồng quy (ĐPCM)	0,25

3.3 (1,0 điểm)	3) Từ giả thiết và câu 1) ta có $QK = QE, PE = PL\ (8)$	0,25
	Theo phần 2) tứ giác $ONEP$ nội tiếp $\Rightarrow QNE = EPM\ \ (9)$ tứ giác $OMEQ$ nội tiếp $\Rightarrow NQE = PME\ \ (10)$	0,25
	Từ (9) và (10) suy ra $\Delta NQE \sim \Delta PME\,(g.g) \Rightarrow \frac{NE}{EP} = \frac{EQ}{EM} \Rightarrow EM.EN = EQ.EP\ \ (11)$	0,25
	Từ (1) và (11) suy ra $KQ.PL = EM.EN$ (đpcm)	0,25

Câu 4 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a,b,c và thoả mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh $ab+bc+ca \le abc+2\ (*)$

Ý	Đáp án	Điểm
4 (1,0 điểm)	Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2+abc=4$, ta suy ra: trong ba số a,b,c có ít nhất một trong ba số bé hơn hoặc bằng 1. Thật vậy nếu $a>1, b>1, c>1$ thì $a^2+b^2+c^2+abc>4$ (mâu thuẫn)	0,25
	Nếu cả ba số a,b,c đều ≤ 1 hoặc ≥ 1 thì $a^2+b^2+c^2+abc \le 4$, hoặc $a^2+b^2+c^2+abc \ge 4$. Theo giả thiết thì dấu bằng xảy ra nên $a=b=c=1$. Bất đẳng thức $(*)$ đã được chứng minh	0,25
	Trường hợp còn lại, tồn tại chỉ hai trong ba số a,b,c cùng ≤ 1 hoặc cùng ≥ 1. Không mất tính tổng quát giả sử 2 số đó là a và c thì ta có $(a-1)(c-1) \ge 0 \Leftrightarrow ac+1 \ge a+c \Leftrightarrow abc+b \ge ab+bc \Leftrightarrow abc \ge ab+bc-b$ $\Leftrightarrow 2+abc \ge 2+ab+bc-b$.	0,25
	Ta cần chứng minh $2+ab+bc-b \ge ab+bc+ca$ hay $2-b \ge ac$ Theo giả thiết ta có: $4 = abc+a^2+b^2+c^2 \ge (a^2+c^2)+b(b+ac) \ge 2ac+b(b+ac)$ Suy ra $(b+2)(b+ac-2) \le 0 \Leftrightarrow b+ac \le 2$ (do $b+2>0$). Vậy ta đã chứng minh được $(*)$ .Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.	0,25

-------------------------------HẾT-------------------------------

UBND TP. TAM KỲ
PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI LỚP 9 LẦN 2
NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN
Ngày 02 tháng 11 năm 2023
Thời gian: 120 phút(Không tính thời gian giao đề)

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Tính giá trị của

$$P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$$

b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

Câu 3. (4.0điểm)

a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a,b sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B\in(O), C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM//O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

Câu 5. (3 điểm)

Cho a,b,c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\geq a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

……………………………………**HẾT**……………………………………

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1. (4.0 điểm) a) Tính giá trị của $P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$ b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$		
	a) (1,5 điểm) Ta có: $P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$ $=\left(9+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)$ $=9^2-\left(2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)^2 81-440=-359$	
	b) (2,4 điểm) Ta có: $\sqrt{2ab}=a-4b\Leftrightarrow\sqrt{2ab}+2b=a-2b$ $\Leftrightarrow\sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)$ Vì $a>0,b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$ Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=2\sqrt{2b}\Leftrightarrow a=8b$ Thay $a=8b$ vào biểu thức Q ta được $Q=\dfrac{\sqrt[3]{8b^2}\cdot\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16y^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$ $=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\cdot2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\dfrac{2\cdot2025b}{4b}=\dfrac{2025}{2}$	
Câu 2. (4.0 điểm) a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$ b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1):y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2):y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.		
	a) (2,0 điểm) Điều kiện: $7\le x\le9$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7)\cdot1}+\sqrt{(9-x)\cdot1}\le\dfrac{(x-7)+1}{2}+\dfrac{(9-x)+1}{2}=2$ (Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0,5 điểm) Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-7=1\\9-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=8$	

Mặt khác, ta có: $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2\geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0\Leftrightarrow x=8$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$

Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng BĐT Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên.

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}\leq\sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=8$

b) (2,0 điểm)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là

$$\frac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1$$

Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$

Vì C,D lần lượt là hình chiếu của B và A lên trục hoành nên ta có

$$BC=2,AD=m^2+2,CD=m^2+2$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot(BC+AD)=\frac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$$

$$=\frac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\frac{1}{2}(m^4+6m+8)$$

$$S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\frac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0$$

Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm 1$

Câu 3. (4.0điểm)

a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a,b sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

a) (2,0 điểm)

Giả sử $(P,P+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$.

* Nếu p có dạng $6m+1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Nên mâu thuẫn.

* Nếu p có dạng $6m-1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$.

Vậy ta hoàn thành chứng minh.

b) (2,0 điểm)

Do cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên a^2-4b+1 chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho

$$a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$$

Đẳng thức này tương đương với

$$a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$$

$$\Leftrightarrow(2b-1)^2=(a-2b)\left[k(2b-1)-(a+2b)\right]$$

Đặt $\left(a-2b, k\left(2b-1\right)-\left(a+2b\right)\right)=d$. Khi đó

$$\begin{cases}\left(a-2b\right)\vdots\, d\\ \left[k\left(2b-1\right)-\left(a+2b\right)\right]\vdots\, d\\ \left(2b-1\right)\vdots\, d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(a-2b\right)\vdots\, d\\ \left(a+2b\right)\vdots\, d\\ \left(2b-1\right)\vdots\, d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4d\,\vdots\, d\\ \left(2b-1\right)\vdots\, d\end{cases}$$

Do $\left(2b-1\right)\vdots\, d$ và $2b-1$ là số lẻ nên d lẻ.

Mặt khác $\begin{cases}4b\,\vdots\, d\\ \left(2b-1\right)\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b\,\vdots\, d\\ \left(4b-2\right)\vdots\, d\end{cases}\Rightarrow 2\,\vdots\, d$ nên $d=1$

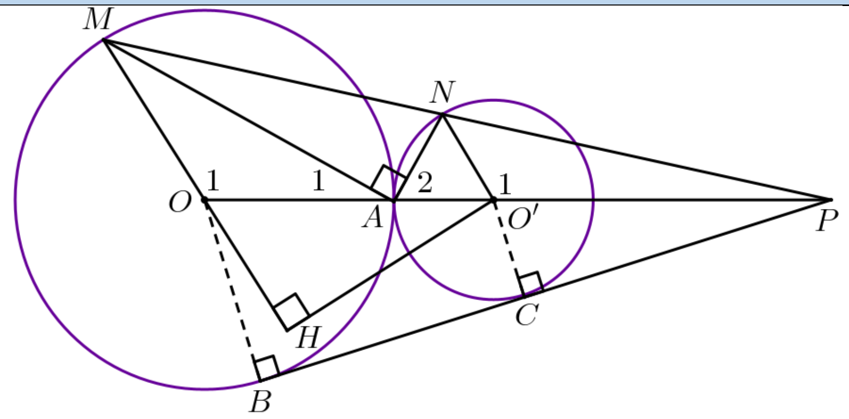
Vậy $\left|a-2b\right|$ là số chính phương.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho hai đường tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R'\right)$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường AM của đường tròn $\left(O\right)$ và dây AN của đường tròn $\left(O'\right)$ sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$ trong đó $B\in\left(O\right), C\in\left(O'\right)$.

a) Chứng minh rằng $OM//O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.



a) (1,5 điểm)

Ta có: $O_1=180°-2A_1$ (do ΔOAM cân tại O).

$O_1^{'}=2A_2=2\left(90°-A_1\right)=180°-2A_1$ (do $\Delta O'AN$ cân tại O' và $A_1+A_2=90°$)

Do đó $O_1=O_1^{'}$ hay $OM//O'N$

b) (1,5 điểm)

Gọi P là giao điểm của MN và OO'. Ta có: $\dfrac{PO'}{PO}=\dfrac{O'N}{OM}=\dfrac{R'}{R}$

Gọi P' là giao điểm của BC và OO'.

Vì $OB//O'C$ nên $\dfrac{P'O'}{P'O}=\dfrac{O'C}{OB}=\dfrac{R'}{R}$

Suy ra $\dfrac{PO'}{PO}=\dfrac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P\equiv P'$.

Vậy ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) (1,5 điểm)

Gọi H là hình chiếu của O' trên OM

Do $MNO'O$ là hình thang nên $S=\dfrac{\left(OM+O'N\right)\cdot O'H}{2}$

$$S=\frac{R+R'}{2}\cdot O'H\le\frac{R+R'}{2}\cdot OO'=\frac{\left(R+R'\right)^2}{2}\ \text{(do } OO'=R+R'\text{)}$$

Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\dfrac{\left(R+R'\right)^2}{2}$ khi và chỉ khi $H\equiv O$ $\Leftrightarrow OM\perp OO',O'N\perp OO'$.

Câu 5. (3 điểm)

Cho a,b,c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\ge a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}=\frac{a\left(a^2+3bc\right)}{\sqrt{(b+c)^2\left(a^2+3bc\right)}}\ge\frac{2a\left(a^2+3bc\right)}{(b+c)^2+\left(a^2+3bc\right)}=\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$$

Trong đó $S=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $\dfrac{2a^3+6abc}{S+5bc}-a\ge\dfrac{a^3+abc-a\left(b^2+c^2\right)}{S+5bc}$

Ta sẽ chứng minh BĐT $AX+BY+CZ=0$ trong đó

$$A=\frac{1}{S+5bc},B=\frac{1}{S+5ca},C=\frac{1}{S+5ab}$$

$$X=a^3+abc-a\left(b^2+c^2\right),Y=b^3+abc-b\left(c^2+a^2\right),\ Z=c^3+abc-c\left(a^2+b^2\right)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $A\ge B\ge C$;

$X=a\left(a^2-b^2\right)+ac(b-c)\ge 0$; $Z=c\left(c^2-b^2\right)+ac(b-a)\le 0$

$$X+Y+Z=a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)$$

$$=c(a-c)+(a-b)\left[a(a-c)-b(b-c)\right]\ge 0$$

(Nếu có thí sinh nào ghi “áp dụng BĐT Schur” ta có: $X+Y+Z\ge 0$ mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0,5 điểm)

Ta có: $AX+BY+CZ\ge BX+BY+BZ=B(X+Y+Z)\ge 0$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0,b=c$; $b=0,c=a;c=0,a=b$

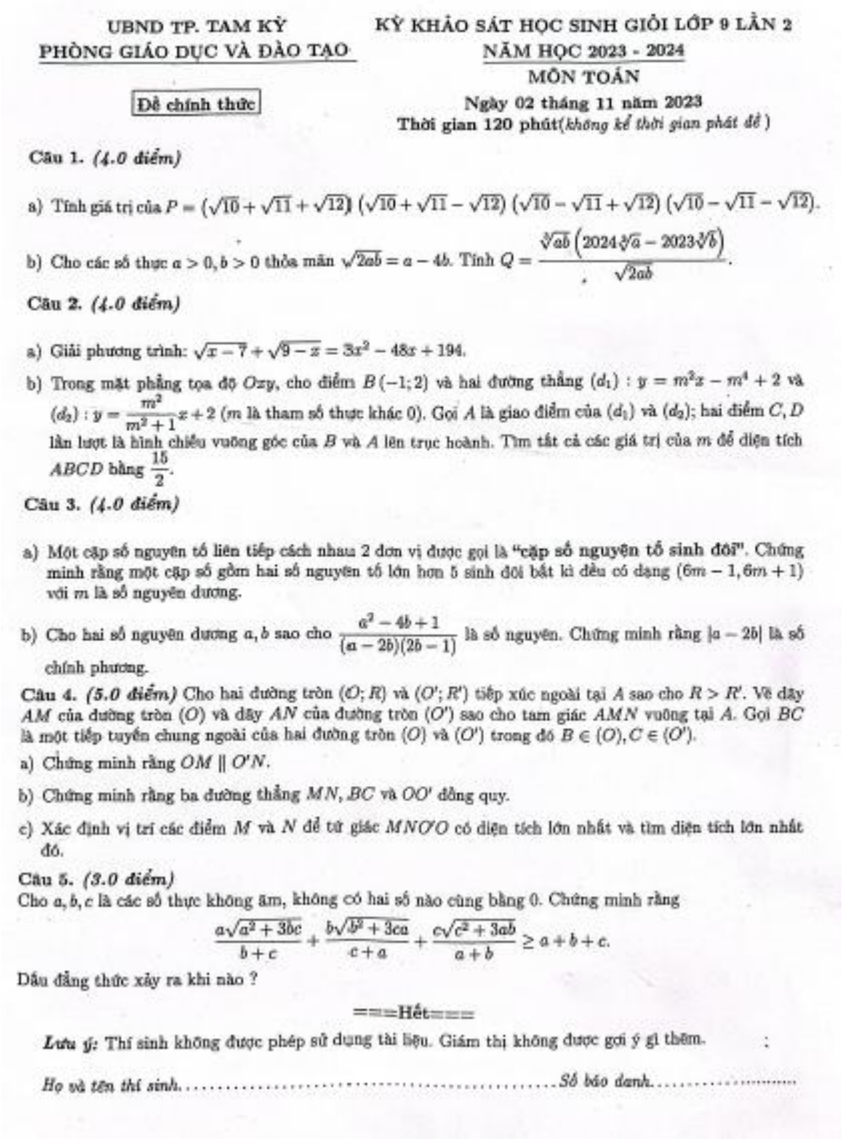
	(nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0,25 điểm)	

-----------Hết-----------

Chú ý:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.



UBND TP. TAM KỲ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Đề chính thức

KỲ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9 LẦN 2
NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN TOÁN
Ngày 02 tháng 11 năm 2023
Thời gian 120 phút(*không kể thời gian phát đề*)

Câu 1. ***(4.0 điểm)***

a) Tính giá trị của $P = (\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$.

b) Cho các số thực $a>0, b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab} = a - 4b$. Tính $Q = \dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a} - 2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$.

Câu 2. ***(4.0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x} = 3x^2 - 48x + 194$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và hai đường thẳng $(d_1): y = m^2x - m^4 + 2$ và $(d_2): y = \dfrac{m^2}{m^2+1}x + 2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

Câu 3. ***(4.0 điểm)***

a) Một cặp số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là **"cặp số nguyên tố sinh đôi"**. Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1, 6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. ***(5.0 điểm)*** Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R > R'$. Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B \in (O), C \in (O')$.

a) Chứng minh rằng $OM \parallel O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

Câu 5. ***(3.0 điểm)***
Cho a, b, c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \ge a+b+c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

===Hết===

Lưu ý: Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không được gợi ý gì thêm.

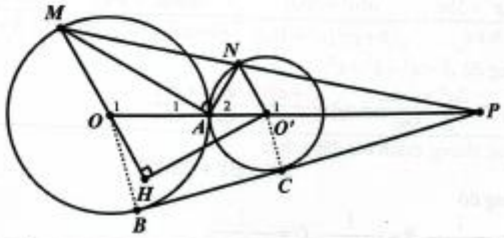
Họ và tên thí sinh...*Số báo danh*..............................

UBND THÀNH PHỐ TAM KỲ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9-LẦN 2
Năm học: 2023 – 2024
Ngày 02 tháng 11 năm 2023
Môn: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
	a) (*1.5 điểm*) Ta có $P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$	0.5
	$=\left(9+2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)$	0.5
	$=9^2-\left(2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)^2=81-440=-359$.	0.5
1 **(*4.0 điểm*)**	**b) (*2.5 điểm*)** Ta có $\sqrt{2ab}=a-4b\Leftrightarrow\sqrt{2ab}+2b=a-2b$ $\Leftrightarrow\sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)$.	0.5
	Vì $a>0,b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$.	0.5
	Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=2\sqrt{2b}\Leftrightarrow a=8b$.	0.5
	Thay $a=8b$ vào biểu thức Q ta được $Q=\frac{\sqrt[3]{8b^2}.\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16b^2}}=\frac{2\sqrt[3]{b^2}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$	0.5
	$=\frac{2\sqrt[3]{b^2}.2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\frac{2.2025b}{4b}=\frac{2025}{2}$.	0.5
2 **(*4.0 điểm*)**	**a) (*2.0 điểm*)** Điều kiện: $7\le x\le 9$	0.25
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7).1}+\sqrt{(9-x).1}\le\frac{(x-7)+1}{2}+\frac{(9-x)+1}{2}=2$. ***(Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0.5 điểm)***	1.0
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-7=1\\9-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=8$.	0.25
	Mặt khác, ta có $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2\ge 2$.	0.25
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0\Leftrightarrow x=8$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.	0.25
	Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên. $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=8$.	
	b) (*2.0 điểm*) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $\frac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1$. Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$.	0.5
	Vì C,D lần lượt là hình chiếu của B và A lên trục hoành nên ta có $BC=2,AD=m^2+2,CD=m^2+2$.	0.5
	$S_{ABCD}=\frac{1}{2}.CD.(BC+AD)=\frac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$ $=\frac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\frac{1}{2}(m^4+6m^2+8)$.	0.5
	$S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\frac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0$. Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm1$.	0.5
	a) (*2.0 điểm*) Giả sử $(p,p+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$. • Nếu p có dạng $6m+1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Đây là điều mâu thuẫn.	1.0
	• Nếu p có dạng $6m-1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$. Vậy ta hoàn thành chứng minh.	1.0
3 **(*4.0 điểm*)**	**b) (*2.0 điểm*)** Do cho $\frac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên a^2-4b+1 chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho $a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$	0.5
	Đẳng thức này tương đương với $a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$ $\Leftrightarrow(2b-1)^2=(a-2b)[k(2b-1)-(a+2b)]$	0.5

	Đặt $(a-2b,k(2b-1)-(a+2b))=d$. Khi đó $\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ [k(2b-1)-(a+2b)]\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ (a+2b)\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}$	**0.5**
	Do $(2b-1)\vdots d$ và $2b-1$ là số lẻ nên d lẻ. Mặt khác $\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b\vdots d\\ (4b-2)\vdots d\end{cases}\Rightarrow 2\vdots d$ nên $d=1$. Vậy $\lvert a-2b\rvert$ là số chính phương.	**0.5**
4 **(5.0 điểm)**	Vẽ hình đúng đến câu a) được ***0.5 điểm*** 	**0.5**
	a) (*1.5 điểm*) Ta có $\widehat{O_1}=180^0-2\widehat{A_1}$ (do tam giác OAM cân tại O).	**0.5**
	$\widehat{O'_1}=2\widehat{A_2}=2(90^0-\widehat{A_1})=180^0-2\widehat{A_1}$ (do tam giác $O'AN$ cân tại O' và $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=90^0$).	**0.5**
	Do đó $\widehat{O_1}=\widehat{O'_1}$ hay $OM//O'N$.	**0.5**
	b) (*1.5 điểm*) Gọi P là giao điểm của MN và OO'. Ta có $\frac{PO'}{PO}=\frac{O'N}{OM}=\frac{R'}{R}$.	**0.5**
	Gọi P' là giao điểm của BC và OO'. Vì $OB//O'C$ nên $\frac{P'O'}{P'O}=\frac{O'C}{OB}=\frac{R'}{R}$.	**0.5**
	Suy ra $\frac{PO'}{PO}=\frac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P\equiv P'$. Vậy ba đường thẳng MN,BC và OO' đồng quy.	**0.5**
	c) (*1.5 điểm*) Gọi H là hình chiếu của O' trên OM. Do $MNO'O$ là hình thang nên $S=\frac{(OM+O'N).O'H}{2}$.	**0.5**
	$S=\frac{R+R'}{2}.O'H\le\frac{R+R'}{2}.OO'=\frac{(R+R')^2}{2}$ (do $OO'=R+R'$).	**0.5**
	Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$ khi và chỉ khi $H\equiv O\Leftrightarrow OM\perp OO',O'N\perp OO'$.	**0.5**
5 **(3.0 điểm)**	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}=\frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}}\ge\frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)}=\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$ trong đó $S=a^2+b^2+c^2$. Suy ra $\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}-a\ge\frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{S+5bc}$.	**0.5**
	Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $AX+BY+CZ\ge 0$ trong đó $A=\frac{1}{S+5bc},B=\frac{1}{S+5ca},C=\frac{1}{S+5ab}$ $X=a^3+abc-a(b^2+c^2),Y=b^3+abc-b(c^2+a^2),Z=c^3+abc-c(a^2+b^2)$	**0.5**
	Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $A\ge B\ge C$; $X=a(a^2-b^2)+ac(b-c)\ge 0$; $Z=c(c^2-b^2)+ac(b-a)\le 0$.	**0.5**
	$X+Y+Z=a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)$ $=c(a-c)(b-c)+(a-b)[a(a-c)-b(b-c)]\ge 0$. ***(Nếu có thí sinh nào ghi "áp dụng bất đẳng thức Schur" ta có $X+Y+Z\ge 0$ " mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0.5 điểm).***	**0.5**
	Ta có $AX+BY+CZ\ge BX+BY+BZ=B(X+Y+Z)\ge 0$.	**0.5**
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0,b=c$; $b=0,c=a$; $c=0,a=b$. ***(Nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0.25 điểm).***	**0.5**

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÙ CÁT

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
KHÓA NGÀY 07/10/2023

Môn thi: **Toán**
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: **07/10/2023** *(Đề thi gồm 01 trang)*

Bài 1 (4,5 điểm).

Cho biểu thức $A=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ $\left(x\ge 0;x\ne 9\right)$

a/ Rút gọn biểu thức A.

b/ Tính giá trị của biểu thức A với $x=14-6\sqrt{5}$.

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Bài 2 (4,0 điểm).

1/ Giải phương trình: $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

2/ Giải bất phương trình: $\sqrt{\left(x+5\right)\left(3x+4\right)}>4\left(x-1\right)$

Bài 3 (4,0 điểm).

1/ Cho x, y là các số không âm thỏa mãn $x^2+y^2\le 2$. Chứng minh rằng: $x\sqrt{3x\left(x+2y\right)}+y\sqrt{3y\left(y+2x\right)}\le 6$

2/ Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho đường tròn (O; R), cát tuyến d cắt đường tròn (O) tại C và D, điểm K di động trên đường thẳng d sao cho điểm K nằm ngoài đường tròn (O) (C nằm giữa K và D). Tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Từ K kẻ tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của AB và OK, H là giao điểm của OM và CD. Chứng minh rằng:

a/ OI.OK = OH.OM

b/ Khi K thay đổi trên đường thẳng d thì đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định.

Bài 5 (2,5 điểm).

Cho ΔABC có các đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau $\left(M\in AC,N\in AB\right)$. Chứng minh rằng: $\cot B+\cot C\ge \frac{2}{3}$.

------------------ HẾT------------------

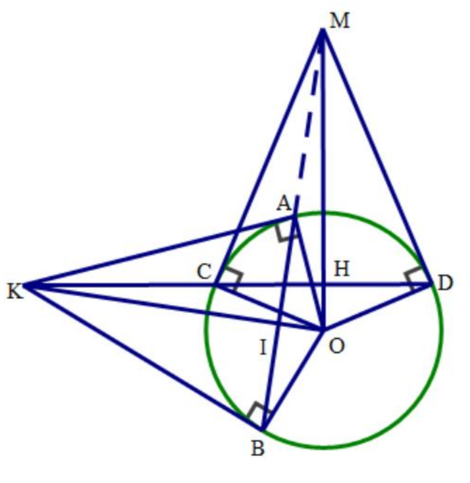
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÙ CÁT

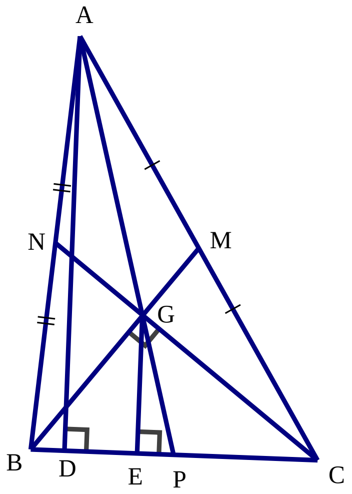
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
KHÓA NGÀY 07/10/2023

Hướng dẫn chấm đề thi học sinh giỏi Toán 9 *(HDC gồm 04 trang)*

Bài	Nội dung	Điểm
1 (4,5 điểm)	a/ $A=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}\quad\left(x\ge 0;x\ne 9\right)$ $=\dfrac{x\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\dfrac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$	0,5
	$=\dfrac{x\sqrt{x}-3-2\left(\sqrt{x}-3\right)^2-\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,5
	$=\dfrac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$	0,5
	$=...=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	b/ Ta có: $x=14-6\sqrt{5}=\left(3-\sqrt{5}\right)^2\;\left(1\right)$	0,5
	Thay (1) vào biểu thức A ta được: $A=\dfrac{14-6\sqrt{5}+8}{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}+1}=\dfrac{22-6\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}+1}=\dfrac{22-6\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\dfrac{58-2\sqrt{5}}{11}$ Vậy $A=\dfrac{58-2\sqrt{5}}{11}$ với $x=14-6\sqrt{5}$	0,5
	c/ Điều kiện: $x\ge 0;x\ne 9$ Ta có: $A=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+9}{\sqrt{x}+1}$ $=\sqrt{x}-1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với hai số không âm $\sqrt{x}+1$ và $\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}$ ta được: $\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}}=2.3=6$ Do đó $A\ge 4$	0,5
	Dấu “=” xảy ra	

	$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\frac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)^2=9\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow x=4\left(TM\right)$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi x = 4.	0,5
2 (4,0 điểm)	a/ Điều kiện: $x\ge -3$ $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$ $\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+3\right)\left(x+5\right)}-3\sqrt{x+3}=2\sqrt{x+5}-6$	0,5
	$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+5}-3\right)=2\left(\sqrt{x+5}-3\right)$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}-3=0\\\sqrt{x+3}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=3\\\sqrt{x+3}=2\end{array}\right.$	0,5
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+5=9\\x+3=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.\ \left(TM\right)$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{4;1\right\}$	0,5
	$b/\sqrt{\left(x+5\right)\left(3x+4\right)}>4\left(x-1\right)\ \left(1\right)$ $TH1: x<1$ $\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x+5\right)\left(3x+4\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -5\\x\ge\frac{-4}{3}\end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện ta được $x\le -5$ hoặc $\frac{-4}{3}\le x<1$	1,0
	$TH2: x\ge 1$ $\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x+5\right)\left(3x+4\right)>16\left(x^2-2x+1\right)$ $\Leftrightarrow...\Leftrightarrow 13x^2-51x-4<0\Leftrightarrow\frac{-1}{13}<x<4$ Kết hợp với điều kiện ta được $1\le x<4$ Kết hợp cả hai trường hợp ta được $x\le -5$ hoặc $\frac{-4}{3}\le x<4$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{x\,/\,x\le -5\text{ hoặc }\frac{-4}{3}\le x<4\right\}$	1,0
3	a/ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với 2 số không âm 3x; x + 2y ta được: $x\sqrt{3x\left(x+2y\right)}\le x\frac{3x+x+2y}{2}=x\left(2x+y\right)=2x^2+xy\ \left(1\right)$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với 2 số không âm 3y; y + 2x ta được: $y\sqrt{3y\left(y+2x\right)}\le y\frac{3y+y+2x}{2}=y\left(2y+x\right)=2y^2+xy\ \left(2\right)$	0,5
	Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:	

(4,0 điểm)	$x\sqrt{3x(x+2y)}+y\sqrt{3y(y+2x)}\le 2(x^2+y^2)+2xy\le 4+2xy\le 4+x^2+y^2\le 6$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$	1,0
	b/ Ta có: $8=x^2+y^2+x^2+y^2-2xy=x^2+y^2+(x-y)^2\ge x^2+y^2=P$ Do đó $P\le 8$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\\x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\pm 2$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 8 khi $x=y=2$ hoặc $x=y=-2$	0,5
	Mặc khác: $8=2(x^2+y^2)-2xy=3(x^2+y^2)-(x+y)^2\le 3(x^2+y^2)=3P$ Do đó $P\ge\frac{8}{3}$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\3x^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y\\x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{\sqrt{3}},y=\frac{-2}{\sqrt{3}}\\x=\frac{-2}{\sqrt{3}},y=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{3}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt{3}},y=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x=\frac{-2}{\sqrt{3}},y=\frac{2}{\sqrt{3}}$	0,5
4 (5,0 điểm)	 Vẽ hình đúng	0,5
	a/ C/m: OI.OK = OH.OM Ta có: +) KA = KB; OA = OB $\Rightarrow$OK là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow OK\perp AB$	0,5
	+) ΔAKO vuông tại A, đường cao AI $\Rightarrow OI.OK=OA^2=R^2$ (1)	0,5
	+) MC = MD; OC = OD $\Rightarrow$OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD $\Rightarrow OM\perp CD$	0,5
	+) ΔCOM vuông tại C, đường cao CH $\Rightarrow OH.OM=OC^2=R^2$ (1) Từ (1) và (2) suy ra OI.OK = OH.OM	0,5
	b/ C/m: AB đi qua điểm cố định. Ta có: OI.OK = OH.OM $\Rightarrow\frac{OI}{OH}=\frac{OM}{OK}$ ΔOIM và ΔOHK có: KOM chung; $\frac{OI}{OH}=\frac{OM}{OK}$	

	$\Rightarrow \Delta OIM \backsim \Delta OHK$ (c.g.c)	1,0
	$\Rightarrow MIO = KHO = 90^0$ (vì 2 góc tương ứng) $\Rightarrow MI \perp OI$ hay $MI \perp OK$ mà $AB \perp OK$ hay $AI \perp OK$ nên M, I, A thẳng hàng $\Rightarrow$M, A, B thẳng hàng	1,0
	Vì C, D, O cố định nên M cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định M khi K thay đổi trên đường thẳng d.	0,5
5 (2,5 điểm)	 Gọi G là giao điểm của BM và CN, P là giao điểm của AG và BC. ΔABC có G là giao điểm của hai đường trung tuyến BM, CN nên G là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow \frac{GP}{AP} = \frac{1}{3}; \; PB = PC$	0,5
	Vẽ $AD \perp BC$ tại D, $GE \perp BC$ tại E $\Rightarrow GE//AD$	0,5
	+) ΔPAD, có GE // AD $\Rightarrow \frac{GE}{AD} = \frac{GP}{AP} = \frac{1}{3}$ (theo hệ quả của định lí Talet) $\Rightarrow AD = 3GE$ +) ΔGBC vuông tại G có GP là đường trung tuyến $\Rightarrow GP = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2GP$	0,5
	+) $GE \leq GP$ (vì GE là cạnh góc vuông của tam giác vuông GEP) $\Rightarrow \frac{GP}{GE} \geq 1$ +) ΔDAB vuông tại D, có $\cot B = \frac{BD}{AD}$ +) ΔDAC vuông tại D có $\cot C = \frac{DC}{AD}$	0,5
	Do đó ta có: $\cot B + \cot C = \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2GP}{3GE} \geq \frac{2}{3}$ Vậy $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$	0,5

Ghi chú: Mọi cách giải khác đúng, lập luận chặt chẽ đều cho điểm tối đa theo biểu điểm từng câu, từng bài của hướng dẫn chấm.

PHÒNG GD&ĐT TP PHÚC YÊN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2023-2024
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $xy+yz+zx=1$. Rút gọn biểu thức:

$$P=x\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}}+y\cdot\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}}+z\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+z^2}}$$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=(m-1)x-2m+1$.

a) Tìm tọa độ điểm cố định mà (d) luôn đi qua.

b) Tìm m để (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Câu 3. Đa thức $f(x)$ với các hệ số là số nguyên thỏa mãn

$(x-2023)f(x+1)=(2024-x)f(x)\forall x\in\mathbb{R}$ Chứng minh rằng $f(0)=2025n, n\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Cho phương trình $\left(x^2+mx+2\right)\left(x^2+2x+m\right)=0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+2y=2y^2+2x\\ y\sqrt{x-y+1}+x=2\end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R}$

Câu 6. Nhân ngày Tết Trung thu một rạp chiếu phim phục vụ khán giả một bộ phim hoạt hình với quy định về giá bán vé như sau:

+ Loại I (dành cho trẻ từ 6 đến 13 tuổi): 50.000đ một vé.
+ Loại II (dành cho người trên 13 tuổi): 100.000đ một vé.

Lãnh đạo rạp chiếu phim tính được rằng: Để không phải bù lỗ số tiền bán vé thu được phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hết thời gian bán vé, nhân viên báo cáo với lãnh đạo tổng số vé bán được là 500 vé. Lãnh đạo rạp chiếu phim khẳng định ngay là không phải bù lỗ. Em hãy giải thích khẳng định đó? Số tiền lãi rạp thu được tối thiểu là bao nhiêu, biết rằng mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm.

Câu 7. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng (O nằm giữa A và B). Kẻ 2 tia Ax, By cùng vuông góc và cùng phía với AB. Dựng góc vuông uOv, tia Ou cắt Ax tại C, tia Ov cắt By tại D. Cho $OA=a, OB=b$, $OC=2a$. Tính theo a, b diện tích hình thang $ABDC$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC, E là điểm thuộc cạnh AC và không trùng với A, K là trung điểm của AE. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với AB tại F cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với BC tại D.

a) Chứng minh $BCKF$ là hình thang cân.

b) Tìm vị trí của E sao cho đoạn KD ngắn nhất.

Câu 9. Trong một hình vuông cạnh $1m$ có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}m$.

Câu 10. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của k sao cho bất đẳng thức $(x+1)(x+2)^2(x+3)\geq k$ đúng với mọi giá trị của x.

--------Hết-------

PHÒNG GD&ĐT TP PHÚC YÊN

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 9
NĂM HỌC 2023 – 2024
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(Hướng dẫn chấm gồm 07 trang)

Câu 1. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $xy + yz + zx = 1$. Rút gọn biểu thức:

$$P = x\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}} + y\cdot\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}} + z\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+z^2}}$$

Lời giải

Từ $xy + yz + zx = 1$ ta có: $1 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = x(x+y) + z(x+y) = (x+y)(x+z)$

Tương tự:

$$1 + y^2 = xy + yz + zx + y^2 = y(x+y) + z(x+y) = (x+y)(y+z)$$

$$1 + z^2 = xy + yz + zx + z^2 = z(x+z) + y(x+z) = (x+z)(y+z)$$

Suy ra

$$x\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} = x\left(y+z\right) = xy + xz$$

Chứng minh tương tự ta được

$$y\cdot\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}} = y\left(x+z\right) = xy + yz$$

$$z\cdot\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+z^2}} = z\left(y+x\right) = yz + xz$$

Do đó $P = 2(xy + yz + zx) = 2$

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\left(d\right): y = \left(m-1\right)x - 2m + 1$.

a) Tìm tọa độ điểm cố định mà $\left(d\right)$ luôn đi qua.

b) Tìm m để $\left(d\right)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải

a) Tìm tọa độ điểm cố định mà (d) luôn đi qua.

Giả sử (d) đi qua điểm cố định $A(x_0\ ; y_0\ )$.

Khi đó:

$$y_0 = (m-1)x_0 - 2m + 1 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow m\ \ x_0 - 2\ \ = x_0 + y_0 - 1 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy (d) đi qua điểm cố định $A(2;-1)$.

b) Tìm m để tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Nếu $m = 1$ thì (d) là đường thẳng $y = -1$ và không tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Suy ra $m = 1$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 1$; (d) cắt trục hoành tại điểm M và cắt trục tung tại điểm $N\left(0;1-2m\right)$

$$\left(d\right): y = \left(m-1\right)x - 2m + 1$$

Ta có: $OM=\left|\dfrac{2m-1}{m-1}\right|$; $ON=\left|-2m+1\right|$ và diện tích tam giác OMN là:

$S_{OMN}=OM.ON=\left|\dfrac{2m-1}{m-1}\right|.\left|-2m+1\right|=\dfrac{(2m-1)^2}{|m-1|}$. Ta có phương trình

$\dfrac{(2m-1)^2}{2|m-1|}=1\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=|2m-2|$ (1)

+) Nếu $m>1:(1)\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=2m-2\Leftrightarrow 4m^2-6m+3=0$ (Vô nghiệm)

+) Nếu $m<1:(1)\Leftrightarrow 4m^2-4m+1=2-2m\Leftrightarrow 4m^2-2m-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \\ m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}\text{(Thỏa mãn điều kiện } m<1\text{).} \\ \text{(Không thỏa mãn điều kiện } m<1\text{).}\end{array}$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

Câu 3.

Đa thức $f(x)$ với các hệ số là số nguyên thỏa mãn $(x-2023)f(x+1)=(2024-x)f(x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(0)=2025n, n\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Với $x=2023$ ta có: $0.f(2024)=1.f(2023)\Leftrightarrow f(2023)=0\Rightarrow f(x)\vdots(x-2023)$

Với $x=2024$ ta có: $f(2025)=0.f(2024)\Rightarrow f(2025)=0\Rightarrow f(x)\vdots(x-2025)$

Suy ra $f(x)$ có dạng: $f(x)=(x-2023)(x-2025).g(x)$ với $g(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Ta có: $f(0)=2023.2025.g(0).$

Do $g(x)$ là đa thức với hệ số nguyên nên $g(0)\in Z$

Vậy $f(0)=2025.n \quad (n\in Z)$

Câu 4. Cho phương trình $(x^2+mx+2)(x^2+2x+m)=0$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Ta có: $(x^2+mx+2)(x^2+2x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2+mx+2=0 \ \ (1) \\ x^2+2x+m=0 \ \ (2)\end{array}\right.$

Yêu cầu đề bài thỏa mãn nếu (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

(1) Có nghiệm khi $m^2-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>2\sqrt{2} \\ m<-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

(2) Có nghiệm khi $1-m>0\Leftrightarrow m<1$

Suy ra: Để (1) và (2) đều có hai nghiệm phân biệt thì $m<-2\sqrt{2}$

Câu 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+2y=2y^2+2x \\ y\sqrt{x-y+1}+x=2\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

ĐK: $x-y+1>0$.

$$x^2+xy+2y=2y^2+2x \Leftrightarrow x^2-y^2+xy-y^2+2y-2x=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+2y-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-2y+2 \end{array}\right.$$

+) Nếu $x=y$. Ta có $x\sqrt{x-x+1}+x=2 \Leftrightarrow x=y=1$ (Thỏa mãn)

+) Nếu $x=-2y+2$ Ta có $y\sqrt{-2y+2-y+1}-2y+2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{-1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $S=\left\{(2;0);\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{1}{3}\right);(1;1)\right\}$

Câu 6. Nhân ngày Tết Trung thu một rạp chiếu phim phục vụ khán giả một bộ phim hoạt hình với quy định về giá bán vé như sau:

+ Loại I (dành cho trẻ từ 6 đến 13 tuổi): 50.000đ một vé.

+ Loại II (dành cho người trên 13 tuổi): 100.000đ một vé.

Lãnh đạo rạp chiếu phim tính được rằng: Để không phải bù lỗ số tiền bán vé thu được phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng. Hết thời gian bán vé, nhân viên báo cáo với lãnh đạo tổng số vé bán được là 500 vé. Lãnh đạo rạp chiếu phim khẳng định ngay là không phải bù lỗ. Em hãy giải thích khẳng định đó? Số tiền lãi rạp thu được tối thiểu là bao nhiêu, biết rằng mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm.

Lời giải

Gọi x, y tương ứng là số vé loại I, loại II đã bán được $\left(x, y \in N^*\right)$

Tổng số tiền bán vé thu được là: $50000x+100000y$ (đồng)

Giả sử rạp chiếu phim phải bù lỗ, nghĩa là $50000x+100000y<20000000$

Hay: $x+2y<400\,(1)$

Mặt khác: $x+y=500 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $500-y+2y<400 \Leftrightarrow y<-100$ (Vô lí, do $y \in N^*$

)Vậy rạp chiếu phim không phải bù lỗ.

Do mỗi trẻ em phải có ít nhất một người lớn đi kèm nên $x \le y$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $y \ge 250$

Tổng số tiền bán vé thu được là:

$T=50000x+100000y=50000(x+y)+50000y$

$=50000.500+50000y^{3}50000.500+50000.250=37500000$

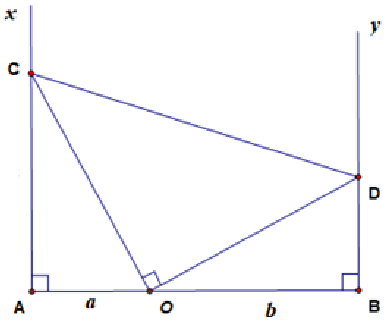
Hay $Tmin=37500000 \Leftrightarrow x=y=250$

Vậy số tiền lãi tối thiểu mà rạp chiếu phim thu được là:

$37500000-20000000 \;=17500000(đ)$.

Câu 7. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng (O nằm giữa A và B). Kẻ 2 tia Ax, By cùng vuông góc và cùng phía với AB. Dựng góc vuông uOv, tia Ou cắt Ax tại C, tia Ov cắt By tại D. Cho $OA=a, OB=b$, $OC=2a$. Tính theo a, b diện tích hình thang $ABDC$.

Lời giải



Trong ΔAOC vuông, ta có:

$$\cos AOC = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AOC = 60^0$$

$$COD{=}90^0 \Rightarrow BOD = 30^0$$

Trong tam giác vuông BOD có:

$$\tan BOD = \frac{BD}{OB} \Rightarrow BD = OB.\tan BOD = b.\tan 30^0 = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Hình thang $ABDC$ có $AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = a\sqrt{3};\ BD = \frac{b}{\sqrt{3}};\ AB = a + b$

Diện tích cần tìm là $\frac{AC+BD}{2}.AB = \frac{a\sqrt{3}+\frac{b}{\sqrt{3}}}{2}\ a+b\ = \frac{\sqrt{3}\ 3a+b}{6}\ a+b$

Câu 8. Cho tam giác đều ABC, E là điểm thuộc cạnh AC và không trùng với A, K là trung điểm của AE. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với AB tại F cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với BC tại D.

a) Chứng minh $BCKF$ là hình thang cân.

b) Tìm vị trí của E sao cho đoạn KD ngắn nhất.

Lời giải

a) Chứng minh BCKF là hình thang cân

Trong ΔAFE có:

$A = 90^0 \Rightarrow AEF = 30^0; KF = KE \quad (do FAE = 60^0)$

ΔAFK là tam giác đều (do $AFK = FAK = 60^0$)

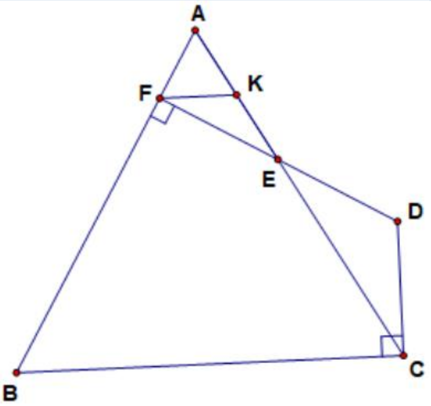
$\Rightarrow AF = AK$

Ta có $BF = AB - AF;\ CK = AC - AK$ Do

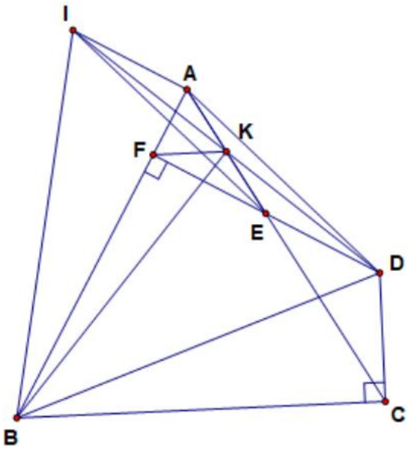
$AB = AC;\ AF = AK \Rightarrow BF = CK$ (1)

Do $AFK = 60^0 = ABC \Rightarrow FK // BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BCFK$ là hình thang cân (Đpcm)



b) Tìm vị trí E sao cho AD ngắn nhất



Xét ΔDEC có $DEC=\mathrm{KEF}=30^0$,

$DCE=DCB-ECB=90^0-60^0=30^0$ suy ra

ΔDEC là tam giác cân tại D $\Rightarrow DE=DC$

Dựng hình bình hành $ADEI$ ta có: $IAB=90^0$ (do $EI//AD$)
và $AI=ED=DC$
Xét $\Delta AIB;\Delta CDB$ có $AB=CD$ (do ΔABC)
$AI=DC$ (Chứng minh trên)

Suy ra $\Delta AIB=\Delta CDB\Rightarrow\begin{cases}BI=DC\\IBA=DBC\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}IBD=IBA+ABD\\ABC=ABD+DBC\end{cases}\Rightarrow IBD=ACB=60^0$

ΔIBD cân đỉnh B và $IBD=60^0$ nên ΔIBD là tam giác đều (3)
$ADEI$ là hình bình hành và K là trung điểm của AE nên K là trung điểm của ID (4)

Từ (3) và (4) suy ra $KD=\frac{1}{2}DI=\frac{1}{2}BD\geq\frac{1}{2}BC$

Vậy KD ngắn nhất khi $C\equiv D$ hay $E\equiv A$,

Câu 9. Trong một hình vuông cạnh $1m$ có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}m$.

Lời giải

Chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ có kích thước bằng nhau với kích thước $\frac{1}{5}m$

Vì có 51 điểm và được xếp vào 25 hình vuông nên theo nguyên lý Dirichle phải có một hình vuông nhỏ chứa 3 điểm.

Giả sử hình ABCD chứa 3 điểm đó. Dễ tính được $AC=\frac{\sqrt{2}}{5}m$

Bán kính hình tròn tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD bằng $\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{1}{\sqrt{50}}<\frac{1}{\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$

Vậy ba điểm nói trên phải nằm trong đường tròn tâm O, bán kính bằng $\frac{1}{7}m$

Câu 10. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của k sao cho bất đẳng thức $(x+1)(x+2)^2(x+3)\geq k$ đúng với mọi giá trị của x.

Lời giải

Đặt $P=(x+1)(x+2)^2(x+3)\Rightarrow P=(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)$

Đặt $y=x^2+4x+3$

Ta có

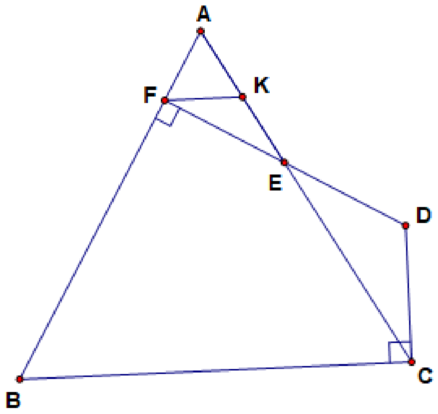
$$P=y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4}.\ P=-\frac{1}{4}\ Khi\ y=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2+4x+3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

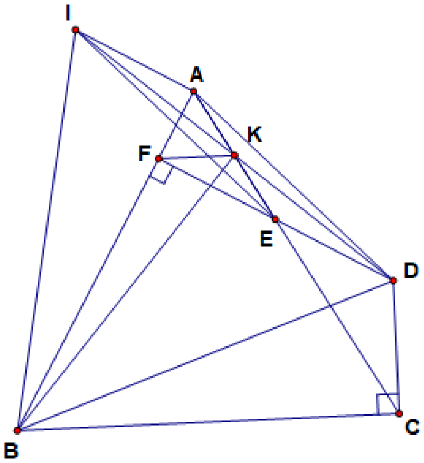
Ta có $P_{\min}=-\frac{1}{4}$. Để $P\geq k$ với mọi x thì $k\leq-\frac{1}{4}$

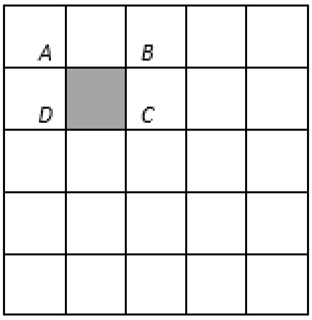
Vậy giá trị nguyên lớn nhất của k cần tìm là $k=-1$

7	**Cho ba điểm *A, O, B* thẳng hàng (*O* nằm giữa *A* và *B*). Kẻ 2 tia *Ax, By* cùng vuông góc và cùng phía với *AB*. Dựng góc vuông *uOv*, tia *Ou* cắt *Ax* tại *C*, tia *Ov* cắt *By* tại *D*. Cho *OA = a ; OB = b ; OC = 2a*. Tính theo *a, b* diện tích hình thang *ABDC*.**	**2,0**
	2a ℕ)	
	Trong tam giác vuông *AOC* có: $\cos AOC = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AOC = 60^0$. ℕ	0,5
	Do $COD = 90^0 \Rightarrow BOD = 30^0$	0,25

	Trong tam giác vuông *BOD* có: $\tan BOD = \frac{BD}{OB} \Rightarrow BD = OB.\tan BOD = b.\tan 30^0 = \frac{b}{3}$.	0,5
	Hình thang *ABDC* có: $AC = \ OC^2 - OA^2 = a\ \ 3$; $BD = \frac{b}{3}$; $AB = a + b$;	0,25
	Diện tích cần tìm là : $\frac{AC+BD}{2} AB = \frac{a\ 3 + \frac{b}{3}}{2}(a+b) = \frac{3(3a+b)}{6}(a+b)$	0,5
8	**Cho tam giác đều *ABC, E* là điểm thuộc cạnh *AC* và không trùng với *A, K* là trung điểm của *AE*. Đường thẳng đi qua *E* và vuông góc với *AB* tại *F* cắt đường thẳng đi qua *C* và vuông góc với *BC* tại *D*.** **a) Chứng minh *BCKF* là hình thang cân.** **b) Tìm vị trí của *E* sao cho đoạn *KD* ngắn nhất.**	**4,0**
		
	a) Chứng minh *BCKF* là hình thang cân. Trong tam giác vuông *AFE* có: $AEF = 30^0$; $KF = KE$ (do $FAE = 60^0$)	0,25
	Tam giác *KEF* là tam giác cân $\Rightarrow KEF = AEF = KFE = 30^0 \Rightarrow AFK = 90^0 - KFE = 60^0$	0,5
	Tam giác *AFK* là tam giác đều (do $AFK = FAK = 60^0$) $\Rightarrow AF = AK$	0,25
	Ta có: *BF = AB – AF; CK = AC – AK*. Do *AB = AC; AF = AK* nên *BF = CK* (1)	0,5
	Do $AFK = 60^0 = ABC$ nên *FK//BC* (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra *BCKF* là hình thanh cân (ĐPCM)	0,25

b) Tìm vị trí của *E* sao cho đoạn *KD* ngắn nhất.



	Xét tam giác *DEC* có $DEC = KEF = 30^0$; $DCE = DCB - ECB = 90^0 - 60^0 = 30^0$ Suy ra *DEC* là tam giác cân $\Rightarrow DE = DC$	0,25
	Dựng hình bình hành *ADEI,* ta có: $IAB = 90^0$ (do *AI//ED)* và $AI = ED = DC$	0,5
	Xét hai tam giác vuông *AIB* và *CDB* có *AB* = *CB* (do tam giác *ABC* đều) *AI* = *DC* (Chứng minh trên) Suy ra $\Delta AIB = \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} BI = BD \\ IBA = DBC \end{cases}$	0,25
	Ta có: $\begin{cases} IBD = IBA + ABD \\ ABC = ABD + DBC \end{cases} \Rightarrow IBD = ABC = 60^0$	0,25
	Tam giác *IBD* cân đỉnh *B* và $IBD = 60^0$ nên *IBD* là tam giác đều (3) *ADEI* là hình bình hành và *K* là trung điểm của *AE* nên *K* là trung điểm của *ID* (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $KD = \frac{1}{2}DI = \frac{1}{2}BD \geq \frac{1}{2}BC$	0,25
	Vậy *KD* ngắn nhất khi *D* trùng với *C* hay *E* trùng với *C*	0,25
9	**Trong một hình vuông cạnh 1*m* có 51 điểm phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}m$.**	**1,0**
	 Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông nhỏ bằng nhau với kích thước $\frac{1}{5}m$	0,25
	Vì có 51 điểm và được xếp vào 25 hình vuông nên theo nguyên lý Đirichlet phải có một hình vuông nhỏ chứa 3 điểm.	0,25
	Giả sử hình vuông *ABCD* chứa 3 điểm đó. Dễ tính được $AC = \frac{\sqrt{2}}{5}m$	0,25
	Bán kính đường tròn tâm *O* ngoại tiếp hình vuông *ABCD* bằng $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{49} = \frac{1}{7}$ Vậy ba điểm nói trên phải nằm trong hình tròn tâm *O*, bán kính bằng $\frac{1}{7}m$	0,25

10	**Tìm giá trị nguyên lớn nhất của *k* sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi giá trị của *x*:** $(x+1)(x+2)^2(x+3) \ge k$	**1,0**
	Đặt $P=(x+1)(x+2)^2(x+3)$ $P=(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)$	0,25
	Đặt $y=x^2+4x+3$ Ta có: $P=y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4}$; $P=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$	0,25
	$y=-\frac{1}{2}\Rightarrow x^2+4x+3=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\\x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$	0,25
	Ta có: $P_{\min}=-\frac{1}{4}$. Để $P\ge k\ \forall x$ thì $k\le-\frac{1}{4}$ Vậy giá trị nguyên lớn nhất của k cần tìm là $k=-1$	0,25

-----------HẾT------------

UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có: 04 trang

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm). Chọn đáp án đúng

Câu 1. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có nghĩa $M = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + \sqrt{x - 3}} + \frac{1}{\sqrt{-4x + 16}}$

A. $3 < x \leq 4$. **B.** $3 < x < 4$. **C.** $3 \leq x \leq 4$. **D.** $3 \leq x < 4$.

Câu 2. Cho biểu thức $P = \frac{2x}{\sqrt{x} - 3}\left(x \geq 0; x \neq 9\right)$. Tổng các giá trị của x để $P^2 - 20P = 0$ là

A. 10. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 20.

Câu 3. Gọi $I\left(x_0; y_0\right)$ là điểm cố định mà các đường thẳng $y = \left(m - 3\right)x + 1 - 2m$ (m là tham số) đi qua. Giá trị của $x_0.y_0$ là

A. 3. **B.** 10. **C.** –10. **D.** 5.

Câu 4. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $y = \frac{-1}{2}x + 1$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** 2.

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\left(x; y\right)$ thỏa mãn $2x - 3y = m + 4$. Khi đó tổng các giá trị của m tìm được là

A. –7. **B.** –8. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 6. Điều kiện của tham số m và n để Parabol $\left(P\right): y = x^2$ không có điểm chung với đường thẳng $\left(d\right): y = mx + n$ là

A. $m^2 + 4n < 0$. **B.** $m^2 + 4n \geq 0$. **C.** $m^2 + 2n < 0$. **D.** $m^2 + 2n \geq 0$.

Câu 7. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 2 = 0$ giá trị của biểu thức $\left|x_1 - x_2\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 1 **D.** –3.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là các số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 9. Cho hình thoi $ABCD$ có $DAB = 120^\circ$, M là một điểm trên cạnh AB sao cho $AM = 16cm,$ hai đường thẳng DM và BC cắt nhau tại $N.$ Biết độ dài đoạn thẳng $CN = 25cm,$ độ dài đoạn AC bằng

A. $20cm.$ **B.** $20\sqrt{2}cm.$ **C.** $\frac{25}{\sqrt{2}}cm.$ **D.** $30cm.$

Câu 10. Cho hình thang $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ có hai đường chéo cắt nhau tại $O,$ đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại $M, N.$ Biết $AB = 6cm, CD = 10cm,$ độ dài cạnh MN là

A. $7cm.$ **B.** $7,5cm.$ **C.** $8cm.$ **D.** $8,5cm.$

Câu 11. Một lọ thuốc hình trụ được đặt khít trong một hộp giấy hình chữ nhật. Hỏi thể tích của hộp thuốc bằng bao nhiêu phần trăm thể tích của hộp giấy? *(lấy $\pi \approx 3,14$)*

A. $62,8\%$. **B.** $94,2\%$. **C.** $86,4\%$. **D.** $78,5\%$.

Câu 12. Bạn Trang có tầm mắt cao $1,52m$ đứng gần một tòa nhà cao tầng thì thấy đỉnh của tòa nhà với góc nhìn so với phương nằm ngang là $30°$. Trang đi về phía tòa nhà $50m$ thì nhìn thấy đỉnh của tòa nhà với góc nhìn so với phương nằm ngang là $60°$. Hỏi chiều cao của tòa nhà là bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).*

A. $43,48m$. **B.** $43,3m$. **C.** $45,48m$. **D.** $44,82m$.

Câu 13. Cho tam giác ABC với góc A nhọn $\left(A=\alpha\right), AB=c, BC=a, CA=b.$ Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha.$ **B.** $a^2=b^2+c^2+2bc.\cos\alpha.$

C. $a^2=b^2+c^2-bc.\cos\alpha.$ **D.** $a^2=b^2+c^2+bc.\cos\alpha.$

Câu 14. Một tam giác đều cạnh a. Diện tích hình tròn nội tiếp tam giác đó bằng

A. $\frac{\pi a^2}{12}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **C.** $\frac{\pi a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{3\pi a^2}{16}$.

Câu 15. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, điểm C di chuyển trên nửa đường tròn, khi đó tổng hai dây cung $CA+CB$ lớn nhất là bao nhiêu?

A. $3\sqrt{2}R$. **B.** $2\sqrt{2}R$. **C.** $2R$. **D.** $\sqrt{3}R$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh $80dm^2$, chiều cao bằng $8dm$. Để hình hộp chữ nhật so thể tích lớn nhất thì các kích thước của đáy bể là

A. $3dm; 2dm$. **B.** $2dm; 2dm$. **C.** $2,5dm; 2,5dm$. **D.** $5dm; 5dm$.

II. TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=x^{2023}+y^{2023}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CH.CE=BC^2$.

b) Chứng minh $BH=AC.\cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2023.$$

--------- HẾT ---------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2023 - 2024
Môn: TOÁN
HDC gồm có: 04 trang

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm). Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đáp án	**D**	**C**	**C**	**C**	**B**	**A**	**B**	**A**	**A**	**B**	**D**	**D**	**A**	**A**	**B**	**C**

II. TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0.$

b) Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

Nội dung	**Điểm**
a) Biến đổi phương trình về dạng $(x-y+1)^2+(y-2)^2=4=0^2+2^2$.	0,5
+ TH1: $\begin{cases}x-y+1=0\\ y-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}.$ + TH2: $\begin{cases}x-y+1=0\\ y-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}.$ + TH3: $\begin{cases}x-y+1=2\\ y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}.$ + TH4: $\begin{cases}x-y+1=-2\\ y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}.$	0,75
Từ đó tìm được $(x;y)\in\{(3;4),(-1;0),(3;2),(-1;2)\}$.	0,25
b) Giả sử tồn tại 3 số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điêu kiện: $a^b+2011=c$ Khi đó ta có: $c>2011\Rightarrow c$ là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow a^b$ chẵn $\Rightarrow a=2$	0,5
Nếu $b=2$ thì $c=2^2+2011=2015\,\vdots\,5\Rightarrow c$ là hợp số (loại) Nếu $b\geq 3$ thì là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow b=2k+1$ (với $k\in N^*$) $\Rightarrow a^b=2^{2k+1}=2^{2k}.2$ Vì $2^{2k}\equiv 1(\bmod 3)$ và $2\equiv -1(\bmod 3)\Rightarrow a^b=2^{2k}.2\equiv -1(\bmod 3)$	0,5
Lại có: $2011\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow c=a^b+2011\equiv 0(\bmod 3)\Rightarrow c$ là hợp số (loại) Vậy không tồn tại các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=x^{2023}+y^{2023}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$

Nội dung	Điểm
a) Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$ (1) Nhân hai vế của (1) với $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ ta được: $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow\left[x^2-\left(x^2+5\right)\right]\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow -5\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5}$ (2) Tương tự nhân 2 vế của (1) với $\left(y+\sqrt{y^2+5}\right)$ ta được: $x-\sqrt{x^2+5}=-y-\sqrt{y^2+5}$ (3) Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được: $y-\sqrt{y^2+5}+x-\sqrt{x^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5}-y-\sqrt{y^2+5}$ $\Leftrightarrow 2x+2y=0\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow x=-y$ Vậy $M=x^{2023}+y^{2023}=0$	0,5 0,5 0,5 0,5
b) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (1) ĐKXĐ: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$ Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+\left(3x^2-14x-9\right)=0$ $\Leftrightarrow\frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1-\left(6-x\right)}{1+\sqrt{6-x}}+\left(3x+1\right)\left(x-5\right)=0$ $\Leftrightarrow\frac{3\left(x-5\right)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+\left(3x+1\right)\left(x-5\right)=0$ $\Leftrightarrow\left(x-5\right)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$	0,25 0,5 0,25 0,5

$\Leftrightarrow (x-5)=0$ Vì: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0\ \forall\ -\frac{1}{3}\le x\le 6$ $\Leftrightarrow x=5(TM)$. Vậy phương trình có nghiệm là: $x=5$.	0,5

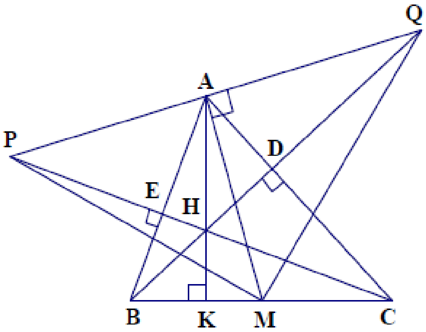
Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH\,.\,BD\ +\ CH.CE=\ BC^2$.

b) Chứng minh $BH=AC\,.\cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng $MP=MQ$.

Nội dung	**Điểm**
	
a) Xét tam giác: ΔBHK đồng dạng ΔBCD có: góc KBH chung; $BKH=BDC=90^\circ$. $\Rightarrow \Delta BHK$ đồng dạng ΔBCD(g.g) nên $\frac{BH}{BC}=\frac{BK}{BD}$ $\Rightarrow BH\cdot BD=BCBK$ Tương tự: ΔCHK đồng dạng ΔCBE nên $\frac{CH}{BC}=\frac{KC}{CE}\Rightarrow CH\cdot CE=BC\cdot KC$ Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được: $BH\cdot BD+CH.CE=BCBK+BC\cdot KC$ hay $BH\cdot BD+CH\cdot CE=BC(BK+KC)=BC^2$	0,5 0,5 0,5
b) Chứng minh ΔBEH đồng dạng $\Delta CEA(g\cdot g)\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}$ Xét ΔBEC vuông tại $E\Rightarrow\cot ABC=\frac{BE}{CE}\Rightarrow\frac{BH}{CA}=\cot ABC$ $\Rightarrow BH=AC\cdot\cot ABC$	0,5 0,5 0,5
c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$. Chứng minh ΔPAH đồng dạng ΔAMB $(g.g)\Rightarrow\frac{PA}{AM}=\frac{AH}{MB}$ Chứng minh: ΔQAH đồng dạng $\Delta AMC\,(g.g)\Rightarrow\frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}$	0,5

Do $MB = MC\,(\text{gt}) \Rightarrow \dfrac{QA}{AM} = \dfrac{PA}{AM}$ $\Rightarrow PA = QA \Rightarrow \Delta QMP$ cân tại $M \Rightarrow MP = MQ$	0,5

Câu 4 (1,0 điểm).

Cho số thực x thỏa mãn $0 < x < 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \dfrac{4}{2-x} + \dfrac{100}{x} + 2023$.

Nội dung	Điểm
Ta có : $A = \dfrac{4}{2-x} + \dfrac{100}{x} + 2023 = \left[\dfrac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] + \left(\dfrac{100}{x} + 36x\right) + 1951$. Mà $0 < x < 2$ suy ra : $2 - x > 0$. Áp dụng BĐT : $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ với $a, b \ge 0,$ ta có: $\left(\dfrac{100}{x} + 36x\right) \ge 120$ dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{5}{3}$. $\left[\dfrac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] \ge 24$ dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{5}{3}$.	0,5
Suy ra $A = \dfrac{4}{2-x} + \dfrac{100}{x} + 2023 = \left[\dfrac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] + \left(\dfrac{100}{x} + 36x\right) + 1951 \ge 2095$.	0,5
Vậy MinA =2095 khi và chi khi $x = \dfrac{5}{3}$.	0,5

HẾT

PHÒNG GD&ĐT TIÊN LỮ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN 9
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 23/11/2023
(Đề thi có 01 trang)

Bài 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x\in\mathbb{R}$, $x<-5$.

b) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=1$.

Bài 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$.

b) Cho hàm số $y=x-2m-1$ với m là tham số. Tính theo m toạ độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Xác định giá trị của m để $OH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. (2,0 điểm).

a) Cho $A=\dfrac{9\sqrt{x}+12}{3\sqrt{x}+2}$ (với $x\geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

b) Cho 2 số nguyên a, b thoả mãn $a^2+b^2+1=2\ \ ab+a+b$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 4. (3,0 điểm).

Cho nửa đường tròn $O;R$ đường kính AB. Gọi H là một điểm thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn O tại C. Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt đường thẳng xy tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh $MC\perp OC$.

b) Chứng minh $KH.AB=CH.AO$ và K là trung điểm của CH.

c) Xác định vị trí của H để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 5 (1,0 điểm).

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

--------------------- Hết ---------------------

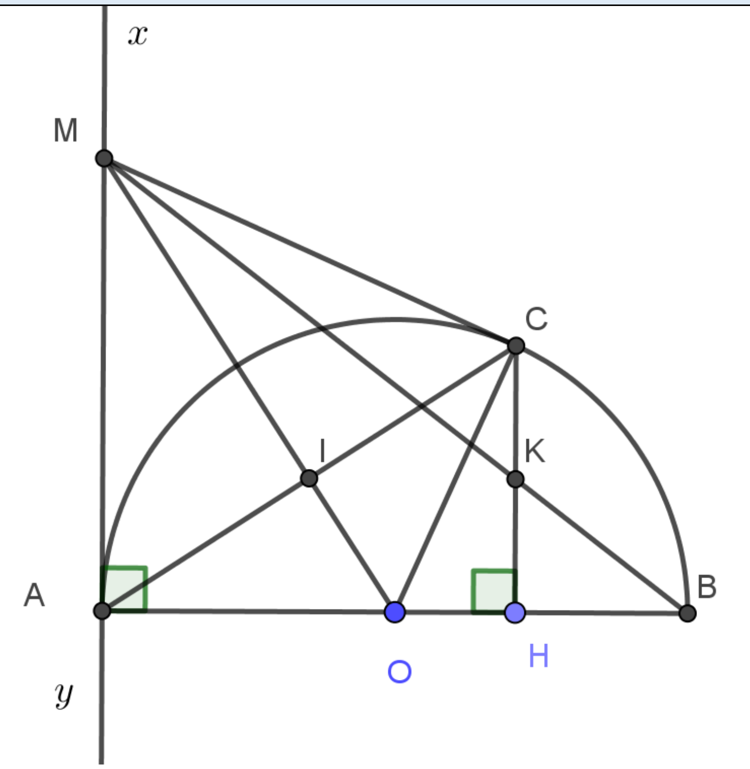
Họ và tên thí sinh:...SBD:.................
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHÒNG GD&ĐT TIÊN LỮ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán
HƯỚNG DẪN CHẤM CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Ý	Đáp án	Điểm	
Bài 1 **2,0 Điểm**	a	Rút gọn biểu thức $A=\frac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x\in\mathbb{R}$, $x<-5$.		
		với $x\in\mathbb{R}$, $x<-5$ ta có: $A=\frac{-\ \sqrt{-\ x+5}^{\ 2}+2\sqrt{-\ x+5\ \ 5-x}}{2\ 5-x\ -\sqrt{-\ x+5\ \ 5-x}}$	0,5	**1,0**
		$A=\frac{\sqrt{-\ x+5}\left[2\sqrt{5-x}-\sqrt{-\ x+5}\right]}{\sqrt{5-x}\left[2\sqrt{5-x}-\sqrt{-\ x+5}\right]}$	0,25	
		$A=\frac{\sqrt{-\ x+5}}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$	0,25	
	b	Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=1$.		
		VT $=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{5-\sqrt{3-\sqrt{\ \sqrt{20}-3\ }^{\,2}}}$ $=\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$	0,5	**1,0**
		$=\sqrt{5}-\sqrt{\ \sqrt{5}-1\ ^{2}}=\sqrt{5}-\ \ \sqrt{5}-1\ \ =1$	0,5	
Bài 2 **2,0** **Điểm**	a	Giải phương trình $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$		
		ĐK: $x\ge 0$. Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x ta có: $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0\Leftrightarrow x-2-\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}=0$ $\Leftrightarrow\left(x+\frac{4}{x}\right)-\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)-2=0$	0,25	**1,0**
		Đặt $\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=t>0\Leftrightarrow t^2=x+4+\frac{4}{x}\Leftrightarrow x+\frac{4}{x}=t^2-4$ Khi đó ta có : $t^2-4\ -t-2=0\Leftrightarrow t^2-t-6=0\Leftrightarrow\ t-3\ \ t+2\ =0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.$	0,25	
		Đối chiếu điều kiện	0,25	

		$\Rightarrow t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=3 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0$ $\Leftrightarrow \ \sqrt{x}-2\ \ \sqrt{x}-1\ =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1\end{array}\right.$		
		Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=4$	0,25	
	b	Cho hàm số $y=x-2m-1$ với m là tham số. Tính theo m toạ độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Xác định giá trị của m để $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$.		
		Giao điểm A của đồ thị hàm số với trục Ox là $A\ \ 2m+1;0$	0,25	1,0
		Giao điểm B của đồ thị hàm số với trục Oy là $B\ \ 0;-2m-1$	0,25	
		Ta có: ΔAOB vuông tại O và có OH là đường cao nên: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ hay $2=\frac{1}{x_A^2}+\frac{1}{y_B^2} \Leftrightarrow 2=\frac{2}{2m+1\ ^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-1\end{array}\right.$	0,5	
Bài 3 **2,0** **Điểm**	a	Cho $A=\frac{9\sqrt{x}+12}{3\sqrt{x}+2}$ (với $x\geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.		
		Với $x\geq 0$ ta có $A=\frac{3\ \ 3\sqrt{x}+2\ \ +6}{3\sqrt{x}+2}=3+\frac{6}{3\sqrt{x}+2}$	0,25	1,0
		Với $x\geq 0$, ta có $3<A\leq 6$ Theo bài, $A\in\mathbb{Z}$ nên $A\in\ \ 4;5;6$	0,5	
		Với $A=4$ suy ra $x=\frac{16}{9}$ Với $A=5$ suy ra $x=\frac{1}{9}$ Với $A=6$ suy ra $x=0$ Vậy $x\in\left\{0;\frac{1}{9};\frac{16}{9}\right\}$ thì A nhận giá trị nguyên.	0,25	
		Cho nửa đường tròn $\ O;R\ $ đường kính AB. Gọi H là một điểm	**1,0**	

Bài 4 **3,0** **điểm**		thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn O tại C. Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt đường thẳng xy tại M, MB cắt CH tại K.		
		 Vẽ hình	0,25	**0,25**
	a	**Chứng minh:** $MC \perp OC$		
		- Chứng minh $\angle AOM = \angle COM$ - Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$ - Chứng minh $MC \perp CO$	0,25 0,25 0,25	**0,75**
	b	**Chứng minh** $KH.AB = CH.AO$ **và** K **là trung điểm của** CH		
		ΔMAB có $KH \parallel MA$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{KH}{AM} = \dfrac{HB}{AB} \Rightarrow KH.AB = AM.HB \quad 1$	0,25	**1,0**
		Chứng minh ΔMAO đồng dạng với ΔCHB $\Rightarrow \dfrac{MA}{CH} = \dfrac{AO}{HB} \Rightarrow CH.AO = AM.HB \quad 2$	0,25	
		Từ 1 và 2 suy ra $KH.AB = CH.AO$	0,25	
		Khi đó $KH = CH \cdot \dfrac{AO}{AB} = CH \cdot \dfrac{R}{2R} = \dfrac{CH}{2}$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của CH	0,25	
	c	**Xác định vị trí của** H **để chu vi** ΔACB **đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.**		
		Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$ Chứng minh $AC + CB\ ^{2} \le 2\ AC^{2} + CB2^{2}$	0,5	**1,0**
		$\Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2\ AC^{2} + CB^{2}} \Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2AB^{2}} = 2R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi $AC = CB \Leftrightarrow H$ là trung điểm của AB	0,25	

		Suy ra $P_{ACB} \le 2R + 2R\sqrt{2} = 2R\ \ 1+\sqrt{2}$, dấu " = " xảy ra khi H là trung điểm của AB. Vậy $\max P_{ACB} = 2R\ \ 1+\sqrt{2}$ đạt được khi H là trung điểm của AB	0,25	
Bài 5 **1,0** **điểm**		***Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$.*** ***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.***		
		Vì x, y, z dương. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: +) $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y+z}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{y+z}\cdot\dfrac{y+z}{4}} = x \quad 1$ Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y+z}=\dfrac{y+z}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = \ y+z\ ^2 \Leftrightarrow 2x = y+z$	0,25	**1,0**
		+) $\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z+x}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{y^2}{z+x}\cdot\dfrac{z+x}{4}} = y \quad 2$ Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{z+x}=\dfrac{z+x}{4} \Leftrightarrow 4y^2 = \ z+x\ ^2 \Leftrightarrow 2y = z+x$	0,25	
		+) $\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{z^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{4}} = z \quad 3$ Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{z^2}{x+y}=\dfrac{x+y}{4} \Leftrightarrow 4z^2 = \ x+y\ ^2 \Leftrightarrow 2z = z+y$	0,25	
		Cộng theo 3 vế bất đẳng thức cùng chiều 1 , 2 , 3 ta có: $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{y+z}{4}+\dfrac{z+x}{4}+\dfrac{x+y}{4} \ge x+y+z$ $\Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \ge \dfrac{x+y+z}{2} = 1$ Dâu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y+z \\ 2y = z+x \\ 2z = x+y \\ x+y+z = 2 \\ x;y;z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{2}{3}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $x = y = z = \dfrac{2}{3}$	0,25	

..........................Hết.........................

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian phát đề*)

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - \sqrt{720}}}$

b) Cho hàm số $f(x) = \left(x^3 + 12x - 33\right)^{2022}$. Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 8x + 15} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+5} - 6$

b) Cho $a \geq 4$. Chứng minh: $a^2 + \dfrac{18}{\sqrt{a}} \geq 25$.

Câu 4: (4,0 điểm)

a) Cho ΔABC nhọn, hai đường cao BD và CE. Biết $S_{ADE} = \dfrac{3}{4} S_{ABC}$. Tính số đo góc A.

b) Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$ (cố định, không đổi), M là một điểm di động trên đường chéo AC. Kẻ ME vuông góc với AB (E thuộc AB) và MF vuông góc với BC (F thuộc BC). Xác định vị trí của điểm M trên AC sao cho diện tích tam giác DEF nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 5: (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM, $ABM = 15^0$ và diện tích tam giác ABC bằng 16 cm^2. Tính độ dài đoạn thẳng BM.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi M là trung điểm của BC.

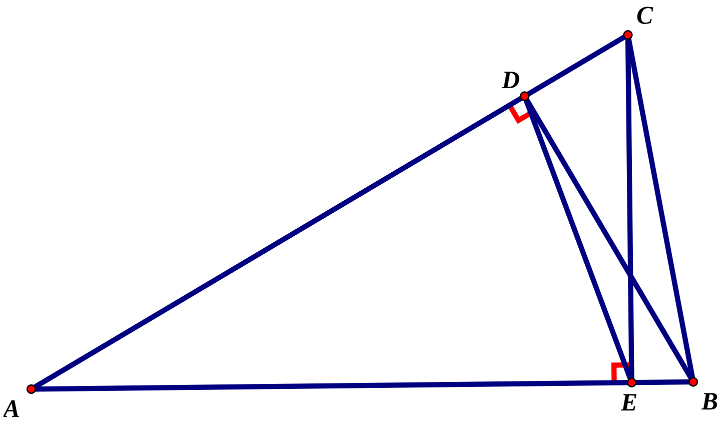
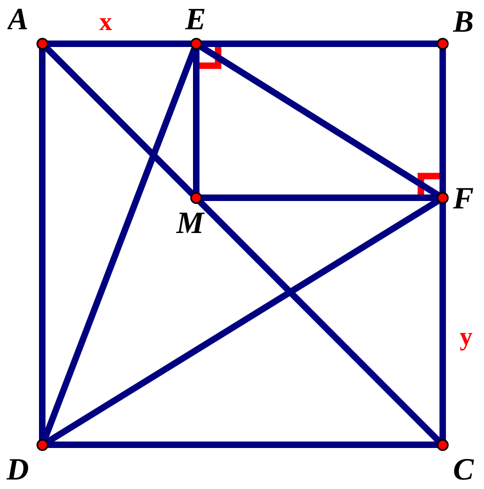
Chứng minh $EF \perp AM$ và $2S = \dfrac{AH^4}{HE.HF}$ (biết S là diện tích tam giác ABC).

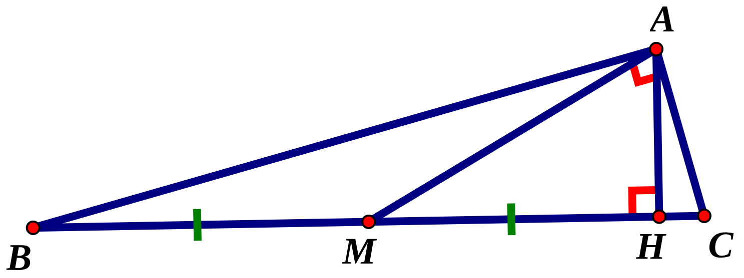
---------- Hết ----------

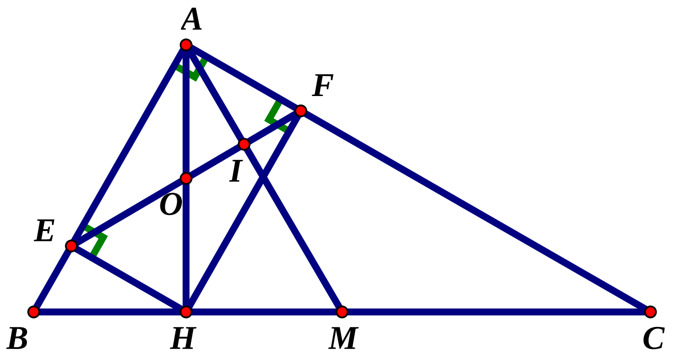
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

	Nội dung cần đạt	**Điểm**
Câu 1: **(4,0 điểm)**	a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì n^3+2n chia hết cho 3.	***2,0***
	Khi $n=1$ thì $1^3+2.1=3\vdots 3$: đúng.	0,5
	Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, k nguyên dương tức là $k^3+2k\vdots 3$	0,5
	Khi $n=k+1$, ta có: $(k+1)^3+2(k+1)=k^3+2k+3(k^2+2k+1)\vdots 3$ (vì $k^3+2k\vdots 3$ và $3(k^2+2k+1)\vdots 3$)	0,75
	Vậy: n^3+2n chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.	0,25
	b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-xy+y^2-4=0$.	***2,0***
	Ta có $x^2-xy+y^2-4=0$ $\Leftrightarrow 4x^2-4xy+4y^2=16$ $\Leftrightarrow (2x-y)^2+3y^2=16$ $\Leftrightarrow (2x-y)^2=16-3y^2$	0,5
	Vì $(2x-y)^2\geq 0$ nên $16-3y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 5\Rightarrow y^2\in\{0;1;4\}$	0,25
	Nếu $y^2=0$ thì $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.	0,25
	Nếu $y^2=1$ thì $(2x-y)^2\geq 13$ không là số chính phương nên loại $y^2=1$.	0,25
	Nếu $y^2=4$ thì $\Leftrightarrow y=\pm 2$.	0,25
	+ Khi $y=2$ thì $x=0$ hoặc $x=2$. + Khi $y=-2$ thì $x=0$ hoặc $x=-2$.	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-2;0);(2;0);(0;2);$ $(2;2);(0;-2);(-2;-2)\}$.	0,25
Câu 2: **(4,0 điểm)**	a) Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-\sqrt{720}}}$	***2,0***
	$A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(\sqrt{20}-3\right)^2}}$	0,5
	$A=\sqrt{5}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$	0,5
	$A=\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)$	0,5
	$A=1$	0,5

	b) Cho hàm số $f(x)=\left(x^3+12x-33\right)^{2022}$. Tính $f(a)$ tại $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$.	***2,0***
	Ta có: $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$ $\Leftrightarrow a^3=32+3\sqrt[3]{\left(16-8\sqrt{5}\right)\left(16+8\sqrt{5}\right)}\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}\right)$	0,5
	$\Rightarrow a^3=32+3.(-4).a$	0,5
	$\Leftrightarrow a^3+12a-33=-1$	0,5
	Vậy: $f(a)=\left(a^3+12a-33\right)^{2022}=(-1)^{2022}=1$	0,5
Câu 3: **(4,0 điểm)**	a) Giải phương trình $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$	***2,0***
	ĐKXĐ: $x\ge -3$	0,25
	Ta có: $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+5)}-3\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+5}+6=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+5}-3\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt{x+5}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+3=4\\ x+5=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ)	0,5
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x_1=1$; $x_2=4$.	0,25
	b) Cho $a\ge 4$. Chứng minh: $a^2+\frac{18}{\sqrt{a}}\ge 25$.	***2,0***
	Ta có: $a^2+\frac{18}{\sqrt{a}}=\left(a^2+16\right)+\frac{18}{\sqrt{a}}-16\ge 8a+\frac{18}{\sqrt{a}}-16$ (vì $a^2+16\ge 2\sqrt{a^2.16}=8a$)	0,75
	Mặt khác: $8a+\frac{18}{\sqrt{a}}=9\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{a}{8}\right)+\frac{55a}{8}\ge 9.3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{a}{8}}+\frac{55}{8}.4=41$	0,75
	Suy ra: $8a+\frac{18}{\sqrt{a}}-16\ge 25$	0,25
	Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $a=4$.	0,25
Câu 4:	a) Cho ΔABC nhọn, hai đường cao BD và CE. Biết $S_{ADE}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. Tính số đo góc A.	***2,0***

(4,0 điểm)		
	Ta có: $\Delta ABD \backsim \Delta ACE\ (g.g)$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$ hay $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$	0,5
	Nên $\Delta ADE \backsim \Delta ABC\ (c.g.c)$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2$	0,5
	$\Rightarrow \dfrac{3}{4}=\cos^2 A \qquad \Rightarrow \cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Vậy: $A\ =30^0$	0,5
	b) Cho hình vuông $ABCD$ có $AB=a$ (cố định, không đổi), M là một điểm di động trên đường chéo AC. Kẻ ME vuông góc với AB (E thuộc AB) và MF vuông góc với BC (F thuộc BC). Xác định vị trí của điểm M trên AC sao cho diện tích tam giác DEF nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.	***2,0***
		
	Đặt $AE=x,\ CF=y.$ Suy ra: $MF=CF=BE=y$. Suy ra: $x+y=a$.	0,5

	$S_{DEF}=S_{ABCD}-S_{DAE}-S_{DCF}-S_{BEF}=a^2-\frac{ax}{2}-\frac{ay}{2}-\frac{xy}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{xy}{2}$	0,25
	Ta có: S_{DEF} nhỏ nhất $\Leftrightarrow xy$ lớn nhất	0,25
	$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}\Rightarrow\max(xy)=\frac{a^2}{4}$ khi $x=y=\frac{a}{2}$	0,5
	Lúc đó M là trung điểm của AC.	0,25
	$\min S_{DEF}=\frac{3a^2}{8}$.	0,25
Câu 5: **(4,0 điểm)**	a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM, $ABM=15^0$ và diện tích tam giác ABC bằng 16 cm^2. Tính độ dài đoạn thẳng BM.	***2,0***
		
	Kẻ $AH\perp BC$ $(H\in BC)$. Ta có: $AMH=2.ABM=30^0$	0,5
	ΔAMH vuông tại H có $AMH=30^0\Rightarrow AH=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{4}BC$ (1)	0,25
	Ta có: $AH.BC=AB.AC$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $BC^2=4AB.AC$	0,25
	Suy ra: $AB.AC=BM^2=2S_{ABC}=32$	0,25
	Suy ra: $BM=4\sqrt{2}\ (cm)$	0,5
	b) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $EF\perp AM$ và $2S=\frac{AH^4}{HE.HF}$ (biết S là diện tích tam giác ABC).	***2,0***

		
	Gọi I là giao điểm của AM và EF. Ta có: $A = E = F = 90^0$ (gt) Nên tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OAF = OFA$ (tính chất đường chéo) (1)	0,25
	ΔABC vuông tại A, có AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM = MC$ Nên ΔAMC cân tại M. $\Rightarrow MAC = MCA$ (hai góc ở đáy tam giác cân) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $MAC + OFA = MCA + OAF = 90^0$ Suy ra: ΔIAF vuông tại I. Vậy: $EF \perp AM$ tại I.	0,5
	Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB, AHC Ta có: $AF.AC = AE.AB = AH^2$	0,25
	$\Rightarrow AH^4 = AF.AE.AC.AB = HE.HF.AB.AC$ (vì $HE = AF$, $HF = AE$) $\Rightarrow AB.AC = \dfrac{AH^4}{HE.HF}$ (3)	0,25
	Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC$ (vì ΔABC vuông tại A) $\Rightarrow AB.AC = 2S_{ABC}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $2S_{ABC} = \dfrac{AH^4}{HE.HF}$.	0,25

Lưu ý: Mọi cách giải khác nếu đúng vẫn đạt điểm tối đa.

---------- Hết ----------

UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có: 04 trang

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm). Chọn đáp án đúng

Câu 1. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có nghĩa $M=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+\sqrt{x-3}}+\dfrac{1}{\sqrt{-4x+16}}$

A. $3<x\le 4.$ **B.** $3<x<4.$ **C.** $3\le x\le 4.$ **D.** $3\le x<4.$

Câu 2. Cho biểu thức $P=\dfrac{2x}{\sqrt{x}-3}\left(x\ge 0; x\ne 9\right)$. Tổng các giá trị của x để $P^2-20P=0$ là

A. 10. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 20.

Câu 3. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà các đường thẳng $y=\left(m-3\right)x+1-2m$ (m là tham số) đi qua. Giá trị của $x_0.y_0$ là

A. 3. **B.** 10. **C.** –10. **D.** 5.

Câu 4. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $y=\dfrac{-1}{2}x+1$ bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$ **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$ **D.** 2.

Câu 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $2x-3y=m+4.$ Khi đó tổng các giá trị của m tìm được là

A. –7. **B.** –8. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 6. Điều kiện của tham số m và n để Parabol $\left(P\right): y=x^2$ không có điểm chung với đường thẳng $\left(d\right): y=mx+n$ là

A. $m^2+4n<0.$ **B.** $m^2+4n\ge 0.$ **C.** $m^2+2n<0.$ **D.** $m^2+2n\ge 0.$

Câu 7. Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-2=0$ giá trị của biểu thức $\left|x_1-x_2\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}.$ **B.** 3. **C.** 1 **D.** –3.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2mx-2m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt là các số nguyên?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 9. Cho hình thoi $ABCD$ có $DAB=120^\circ$, M là một điểm trên cạnh AB sao cho $AM=16cm,$ hai đường thẳng DM và BC cắt nhau tại $N.$ Biết độ dài đoạn thẳng $CN=25cm,$ độ dài đoạn AC bằng

A. $20cm.$ **B.** $20\sqrt{2}cm.$ **C.** $\dfrac{25}{\sqrt{2}}cm.$ **D.** $30cm.$

Câu 10. Cho hình thang $ABCD\left(AB\parallel CD\right)$ có hai đường chéo cắt nhau tại $O,$ đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt hai cạnh bên AD,BC lần lượt tại $M,N.$ Biết $AB=6cm, CD=10cm,$ độ dài cạnh MN là

A. $7cm.$ **B.** $7,5cm.$ **C.** $8cm.$ **D.** $8,5cm.$

Câu 11. Một lọ thuốc hình trụ được đặt khít trong một hộp giấy hình chữ nhật. Hỏi thể tích của hộp thuốc bằng bao nhiêu phần trăm thể tích của hộp giấy? *(lấy $\pi\approx 3,14$)*

A. $62,8\%$. **B.** $94,2\%$. **C.** $86,4\%$. **D.** $78,5\%$.

Câu 12. Bạn Trang có tầm mắt cao $1,52m$ đứng gần một tòa nhà cao tầng thì thấy đỉnh của tòa nhà với góc nhìn so với phương nằm ngang là $30°$. Trang đi về phía tòa nhà $50m$ thì nhìn thấy đỉnh của tòa nhà với góc nhìn so với phương nằm ngang là $60°$. Hỏi chiều cao của tòa nhà là bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).*

A. $43,48m$. **B.** $43,3m$. **C.** $45,48m$. **D.** $44,82m$.

Câu 13. Cho tam giác ABC với góc A nhọn $\left(A=\alpha\right), AB=c, BC=a, CA=b$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha$. **B.** $a^2=b^2+c^2+2bc.\cos\alpha$.

C. $a^2=b^2+c^2-bc.\cos\alpha$. **D.** $a^2=b^2+c^2+bc.\cos\alpha$.

Câu 14. Một tam giác đều cạnh a. Diện tích hình tròn nội tiếp tam giác đó bằng

A. $\frac{\pi a^2}{12}$. **B.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **C.** $\frac{\pi a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{3\pi a^2}{16}$.

Câu 15. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, điểm C di chuyển trên nửa đường tròn, khi đó tổng hai dây cung $CA+CB$ lớn nhất là bao nhiêu?

A. $3\sqrt{2}R$. **B.** $2\sqrt{2}R$. **C.** $2R$. **D.** $\sqrt{3}R$.

Câu 16. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh $80dm^2$, chiều cao bằng $8dm$. Để hình hộp chữ nhật so thể tích lớn nhất thì các kích thước của đáy bể là

A. $3dm;2dm$. **B.** $2dm;2dm$. **C.** $2,5dm;2,5dm$. **D.** $5dm;5dm$.

II. TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=x^{2023}+y^{2023}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH.BD=BC.BK$ và $BH.BD+CH.CE=BC^2$.

b) Chứng minh $BH=AC.\cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP=MQ$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho số thực x thỏa mãn $0<x<2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\frac{4}{2-x}+\frac{100}{x}+2023.$$

--------- HẾT ---------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2023 - 2024
Môn: TOÁN
HDC gồm có: 04 trang

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm). Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đáp án	**D**	**C**	**C**	**C**	**B**	**A**	**B**	**A**	**A**	**B**	**D**	**D**	**A**	**A**	**B**	**C**

II. TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+1=0.$

b) Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$

Nội dung	**Điểm**
a) Biến đổi phương trình về dạng $(x-y+1)^2+(y-2)^2=4=0^2+2^2$.	0,5
+ TH1: $\begin{cases}x-y+1=0\\y-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}.$ + TH2: $\begin{cases}x-y+1=0\\y-2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}.$ + TH3: $\begin{cases}x-y+1=2\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$ + TH4: $\begin{cases}x-y+1=-2\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}.$	0,75
Từ đó tìm được $(x;y)\in\{(3;4),(-1;0),(3;2),(-1;2)\}$.	0,25
b) Giả sử tồn tại 3 số nguyên tố $\mathrm{a,b,c}$ thỏa mãn điêu kiện: $a^b+2011=c$ Khi đó ta có: $c>2011\Rightarrow c$ là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow a^b$ chẵn $\Rightarrow a=2$ Nếu $b=2$ thì $c=2^2+2011=2015\vdots 5\Rightarrow c$ là hợp số (loại)	0,5
Nếu $b\geq 3$ thì là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow b=2k+1$ (với $k\in N^*$) $\Rightarrow a^b=2^{2k+1}=2^{2k}.2$ Vì $2^{2k}\equiv 1(\bmod 3)$ và $2\equiv -1(\bmod 3)\Rightarrow \mathrm{a}^{\mathrm{b}}=2^{2\mathrm{k}}.2\equiv -1(\bmod 3)$	0,5
Lại có: $2011\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow c=a^b+2011\equiv 0(\bmod 3)\Rightarrow c$ là hợp số (loại) Vậy không tồn tại các số nguyên tố $\mathrm{a,b,c}$ thỏa mãn điều kiện $a^b+2011=c$	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho x và y là hai số thỏa mãn: $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M=x^{2023}+y^{2023}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0.$

Nội dung	Điểm
a) Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5 \quad (1)$ Nhân hai vế của (1) với $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ ta được: $\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow \left[x^2-\left(x^2+5\right)\right]\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow -5\left(y-\sqrt{y^2+5}\right)=5\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)$ $\Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5} \quad (2)$	0,5
Tương tự nhân 2 vế của (1) với $\left(y+\sqrt{y^2+5}\right)$ ta được: $x-\sqrt{x^2+5}=-y-\sqrt{y^2+5} \quad (3)$	0,5
Cộng vế với vế của (2) và (3) ta được: $y-\sqrt{y^2+5}+x-\sqrt{x^2+5}=-x-\sqrt{x^2+5}-y-\sqrt{y^2+5}$ $\Leftrightarrow 2x+2y=0 \Leftrightarrow 2(x+y)=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$	0,5
Vậy $M=x^{2023}+y^{2023}=0$	0,5
b) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \ (1)$ ĐKXĐ: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$	0,25
Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+\left(3x^2-14x-9\right)=0$ $\Leftrightarrow \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1-(6-x)}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$	0,5
$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0$	0,25
	0,5

$\Leftrightarrow (x-5)=0$ Vì: $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0\ \forall\ -\frac{1}{3}\le x\le 6$ $\Leftrightarrow x=5(TM)$. Vậy phương trình có nghiệm là: $x=5$.	0,5

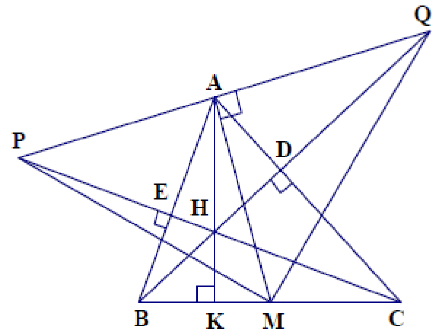
Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, ba đường cao AK, BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $BH\,.\,BD\ +\ CH.CE=\ BC^2$.

b) Chứng minh $BH = AC\,.\cot ABC$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng $MP = MQ$.

Nội dung	**Điểm**
	
a) Xét tam giác: ΔBHK đồng dạng ΔBCD có: góc KBH chung; $BKH = BDC = 90^{\circ}$. $\Rightarrow \Delta BHK$ đồng dạng ΔBCD(g.g) nên $\frac{BH}{BC}=\frac{BK}{BD}$ $\Rightarrow BH\cdot BD = BCBK$ Tương tự: ΔCHK đồng dạng ΔCBE nên $\frac{CH}{BC}=\frac{KC}{CE} \Rightarrow CH\cdot CE = BC\cdot KC$ Cộng vế với vế hai đẳng thức ta được: $BH\cdot BD + CH.CE = BCBK + BC\cdot KC$ hay $BH\cdot BD + CH\cdot CE = BC(BK+KC) = BC^2$	0,5 0,5 0,5
b) Chứng minh ΔBEH đồng dạng $\Delta CEA(g\cdot g) \Rightarrow \frac{BH}{CA}=\frac{BE}{CE}$ Xét ΔBEC vuông tại $E \Rightarrow \cot ABC = \frac{BE}{CE} \Rightarrow \frac{BH}{CA} = \cot ABC$ $\Rightarrow BH = AC\cdot\cot ABC$	0,5 0,5 0,5
c) Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng BD, CE lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng: $MP = MQ$. Chứng minh ΔPAH đồng dạng $\Delta AMB\ (g.g) \Rightarrow \frac{PA}{AM}=\frac{AH}{MB}$ Chứng minh: ΔQAH đồng dạng $\Delta AMC\,(g.g) \Rightarrow \frac{QA}{AM}=\frac{AH}{MC}$	0,5

Do $MB = MC\,(\text{gt}) \Rightarrow \frac{QA}{AM} = \frac{PA}{AM}$ $\Rightarrow PA = QA \Rightarrow \Delta QMP$ cân tại $M \Rightarrow MP = MQ$	0,5

Câu 4 (1,0 điểm).

Cho số thực x thỏa mãn $0 < x < 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4}{2-x} + \frac{100}{x} + 2023$.

Nội dung	Điểm
Ta có : $A = \frac{4}{2-x} + \frac{100}{x} + 2023 = \left[\frac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] + \left(\frac{100}{x} + 36x\right) + 1951$.	0,5
Mà $0 < x < 2$ suy ra : $2 - x > 0$. Áp dụng BĐT : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với $a, b \geq 0,$ ta có: $\left(\frac{100}{x} + 36x\right) \geq 120$ dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{5}{3}$. $\left[\frac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] \geq 24$ dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{5}{3}$.	
Suy ra $A = \frac{4}{2-x} + \frac{100}{x} + 2023 = \left[\frac{4}{2-x} + 36(2-x)\right] + \left(\frac{100}{x} + 36x\right) + 1951 \geq 2095$.	0,5
Vậy MinA =2095 khi và chi khi $x = \frac{5}{3}$.	0,5

HẾT

PHÒNG GD & ĐT QUẬN ĐỐNG ĐA
TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRƯỜNG TỘ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (5.0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+x+2=2\sqrt{x+1}.$
2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b\neq c; a+b\neq c$ và $a^2+b^2=(a+b-c)^2$. Chứng minh $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$

Bài II. (5,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số tự nhiên lẻ n, số $A=7^{2n-1}-7$ luôn chia hết cho 600
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8.$
3. Cho ba số nguyên dương m, n, p thỏa mãn: $(m+n!)(n+m!)=5^p$. Chứng minh rằng mn là số chính phương

Bài III. (3,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2.$

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. Đường thẳng qua I vuông góc với AM, cắt EF tại S.

1. Chứng minh IE vuông góc với ME.
2. Chứng minh SA song song với BC
3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SI với BE, CF. Chứng inh I là trung điểm của PQ.

Bài V. (1,0 điểm)

Cho 2023 điểm phan biệt được phủ lên bởi một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 24. Chứng minh luôn tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm đã cho.

----------- HẾT -----------

Họ và tên thí sinh: ……………………………..…Số báo danh: …………………..

HƯỚNG DẪN

Bài I. (5.0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2+x+2=2\sqrt{x+1}.$
2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $b\neq c; a+b\neq c$ và $a^2+b^2=(a+b-c)^2.$ Chứng minh $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$

Hướng dẫn:

1. ĐKXĐ: $x\geq -1$

   $x^2+x+2=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2+(\sqrt{x+1}-1)^2=0\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

   Vậy x = 0.
2. Từ $a^2+b^2=(a+b-c)^2.$ suy ra $c^2+2ab-2bc-2ca=0\Rightarrow 2(c-a)(c-b)=c^2.$

   $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}\Leftrightarrow\frac{2a(a-c)+c^2}{2b(b-c)+c^2}=\frac{a-c}{b-c}$

   $\Leftrightarrow 2a(a-c)(b-c)+c^2(b-c)=2b(b-c)(a-c)+c^2(a-c)$

   $\Leftrightarrow ac^2+c^2(b-c)=bc^2+c^2(a-c)\Leftrightarrow c^2(a-b)+c^2(b-a)=0$, luôn đúng nên ta có đpcm.

Bài II. (5,0 điểm)

1. Chứng minh với mọi số tự nhiên lẻ n, số $A=7^{2n-1}-7$ luôn chia hết cho 600
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8.$
3. Cho ba số nguyên dương m, n, p thỏa mãn: $(m+n!)(n+m!)=5^p$. Chứng minh rằng mn là số chính phương

Hướng dẫn:

1. Có $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2.$

   Vì n là số tự nhiên lẻ, đặt n = 2k + 1 ($k\in N^*$), khi đó $7^{2n-1}-7=7^{4k+1}-7.$

   Ta có $7^{4k+1}-7\equiv(-1)^{4k+1}-7\equiv 0(\bmod 8)$ nên $A:8.$

   Ta có $7^{4k+1}-7\equiv(1)^{4k+1}-7\equiv 0(\bmod 3)$ nên $A:3.$

   Ta có $7^{4k+1}-7=7\left(49^{2k}-1\right)\equiv 7\left[(-1)^{2k}-1\right]\equiv 0(\bmod 25)$ nên $A:25.$

   Lại có 8; 3; 25 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A:600.$
2. $2x^2+4xy+7y=6y^2+3x+8\Leftrightarrow 2(x-y)(x+3y)-(3x-7y)+8=0.$

   Đặt x – y = a, x + 3y = b ($a,b\in Z$) thì ta được:

   $$2ab-4a+b+8=0\Leftrightarrow(b-2)(2a+1)=-10.$$

   Tới đây ta dễ dàng tìm được a, b và từ đó tìm ra x, y.

3. Không giảm tính tổng quát, giả sử m/geqn.

   Vì $(m+n!)(n+m!)=5^p$ và $m,n,p\in\mathbb{N}^*$ nên tồn tại các số tự nhiên x, y ($y\ge x$) để $m+n!=5^x, n+m!=5^y.$

   Nếu $m\le 4$, thử trực tiếp các trường hợp m = 4; 3; 2; 1 thì chỉ có trường hợp m = 4, n = 1 thỏa mãn. Khi đó mn = 4 là số chính phương.

   Ta có $5^y=n+m!=n(1+1.2\ldots.(n-1)\cdot(n+1)\ldots m).$

   Nếu $m\ge 10$ thì 1.2…(n-1).(n+1)…m chia hết cho 5 nên 1 + 1.2…(n-1).(n+1)…m không chia hết cho 5, mâu thuẫn vì n(1 + 1.2…(n-1).(n+1)…m) = 5^y.

   Với $5\le m\le 9$ thì $m!\vdots 5$, khi đó $n\le 9$ và để ý rằng n + m = 5^y nên $n\vdots 5$ nên n chỉ có thể bằng 5.

   Lại có $n!+m\vdots 5$ nên m = 5.

   Khi đó m.n = 25 là số chính phương.

   Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài III. (3,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2.$

Hướng dẫn:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất:

   Từ điều kiện, sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

   $$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4\Rightarrow 4^2\le(1+1+1)(a+1+b+1+c+1)$$

   Suy ra $a+b+c\ge\dfrac{7}{3}$

   Ta lại có: $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{49}{27}$ nên $P\ge\dfrac{49}{27}$

   Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{7}{9}$. Vậy GTNN của P là $\dfrac{7}{9}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất:

   Vì $a,b,c\ge 0$ và $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=4$ nên $0\le a,b,c\le 3$.

   Với $0\le a\le 3$ ta có bất đẳng thức sau: $a^2\le 9\sqrt{a+1}-9.$

   Thật vậy, $a^2\le 9\sqrt{a+1}-9\Leftrightarrow a^2+9\le 9\sqrt{a+1}\Leftrightarrow a^4+18a^2+81\le 81(a+1)$

   $\Leftrightarrow \mathrm{a}(a-3)\left(a^2+3a+27\right)\le 0$ luôn đúng với mọi số thực a thỏa mãn $0\le a\le 3$

   Tương tự thì ta có $b^2\le 9\sqrt{b+1}-9, c^2\le 9\sqrt{c+1}-9$

   Cộng theo vế ta được $P\le 9.4-9.3=9$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi a = 3, b = c = 0.

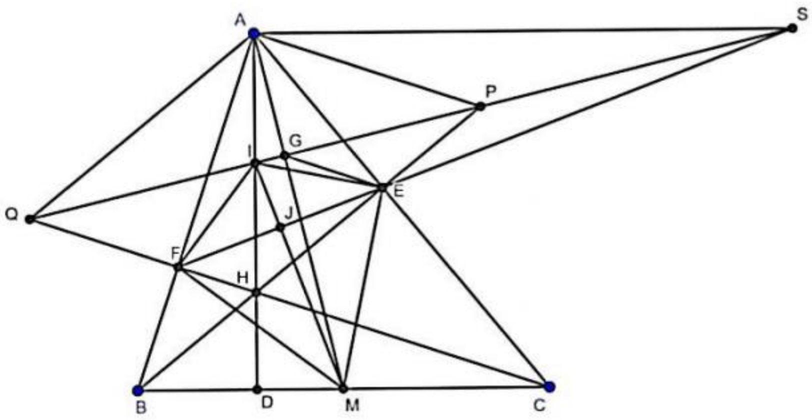
Vậy giá trị lớn nhất của P là 9.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. Đường thẳng qua I vuông góc với AM, cắt EF tại S.

1. Chứng minh IE vuông góc với ME.
2. Chứng minh SA song song với BC
3. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SI với BE, CF. Chứng inh I là trung điểm của PQ.

Hướng dẫn:



1. Vì I, M lần lượt là trung điểm của AH, BC nên ta có IE = IA = IH và EM = MC = MB.

   Dễ dàng suy ra $IEA = IAE = MBE = MEB$, mà $IEA + IEH = 90^0$ nên $MEB + IEH = 90^0$ hay IE vuông góc với ME.
2. Gọi G, J lần lượt là giao điểm của IS với AM và IM với EF.

   Dễ dàng chỉ ra IM là trung trực của EF nên IM ⊥ EF, lại có IG ⊥ AM nên ΔIGM đồng dạng với $\Delta IJS \Rightarrow IG.IM = IJ.IM = IE^2 = IA^2$ từ đây suy ra tam giác IAS vuông tại A với AG là đường cao, suy ra AS song song với BC.
3. Ta sẽ chứng minh APHQ là hình bình hành.

   Để ý tứ giác AGEP có $AGP = AEP = 90^0$ nên dễ dàng suy ra được $PAE = PGE$

   Để ý tứ giác IGEM có $IGM = IEM = 90^0$ nên $PGE = IME$, mà

   $IME = \frac{1}{2}\text{EMF} = ACF$, từ đây suy ra $PGE = ACF$.

   Lại có $ACF + \text{CAF} = 90^0$ nên $PAE + \text{CAF} = 90^0$ suy ra PA ⊥ BA ⇒ PA // HQ.

Tương tự ta chứng minh được QA // HP suy ra APHQ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm PQ.

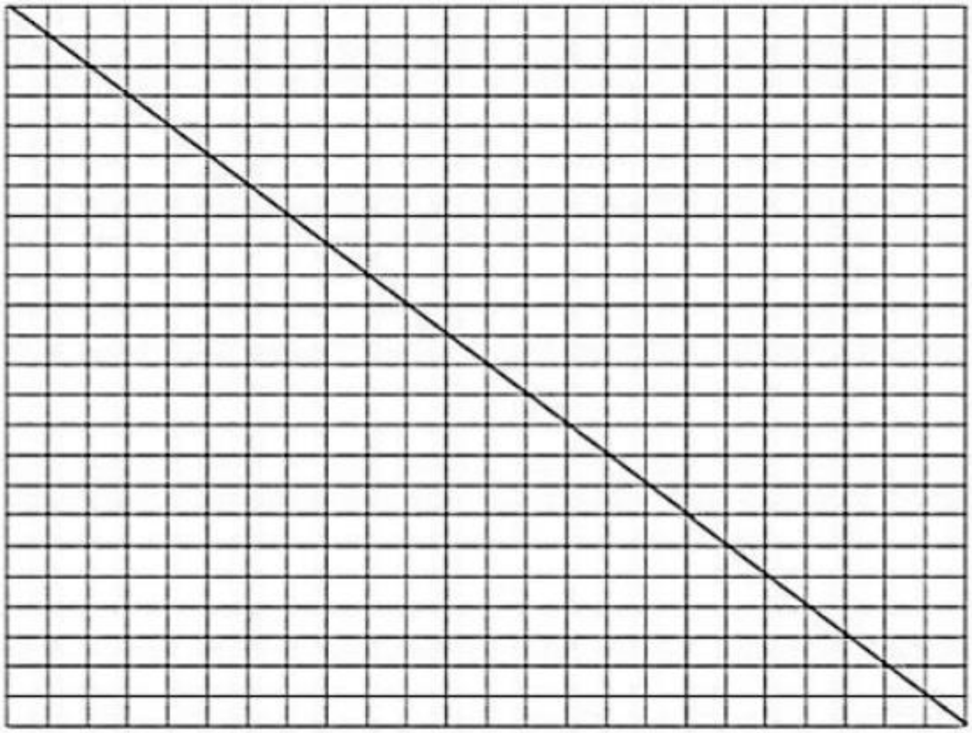
Bài V. (1,0 điểm)

Cho 2023 điểm phan biệt được phủ lên bởi một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 24. Chứng minh luôn tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm đã cho.

Hướng dẫn:

Ta xét hình vuông có cạnh bằng $12\sqrt{2}$ thì hình vuông này có đường chéo bằng 24. Chia hình vuông đó thành 576 ô vuông có cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (đường chéo bằng 1). Ta kẻ đường chéo của hình vuông lớn như hình vẽ (đi qua 24 hình vuông nhỏ) thế thì nửa dưới của hình vuông lớn được bao phủ bởi $\frac{576-24}{2}+24=300$ hình vuông nhỏ. Mỗi hình vuông nhỏ này lại được bao phủ bởi hình tròn có đường kính bằng 1.

Lại có $2023=300.6+223$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một hình tròn có đường kính bằng 1, phủ lên ít nhất 7 điểm trong số 2023 điểm đã cho.



PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

Đề chính thức

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN LỚP 9
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Tìm các số tự nhiên a để giá trị của biểu thức B = $a^5 + a^4 + 1$ là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

Câu 2. *(4,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 - 7x + 12 = \sqrt{(x-3)(x^2 - x - 6)}$

b) Tính giá trị biểu thức $A = 6x^{2021} - 5x^{2022} + 4x^{2023}$

$$\text{với } x = \frac{\sqrt{\sqrt{10}+3} + \sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}} - \sqrt{-2\sqrt{2}+3}.$$

Câu 3. *(3,5 điểm)*

a) Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $\mathrm{P}(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{b+1} + \frac{\sqrt{b}}{c+1} + \frac{\sqrt{c}}{a+1} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 4. *(8,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ và đường cao AH. Hai điểm M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. O là giao điểm của AH và MN.

a) Cho $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và BC = 10 cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$.

b) Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $CFA = CBE$. CO cắt AB tại I.

Chứng minh rằng: $\sqrt{AE}.BC = \sqrt{EC}.AB$ và $\mathrm{AE.IB} + AI.EC = EC.IB$.

c) BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh: $BK \perp KC$.

Câu 5. (1,0 *điểm*)

Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?

……………*Hết*……………

Họ và tên thí sinh……………………………………… *Số báo danh*……………………

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

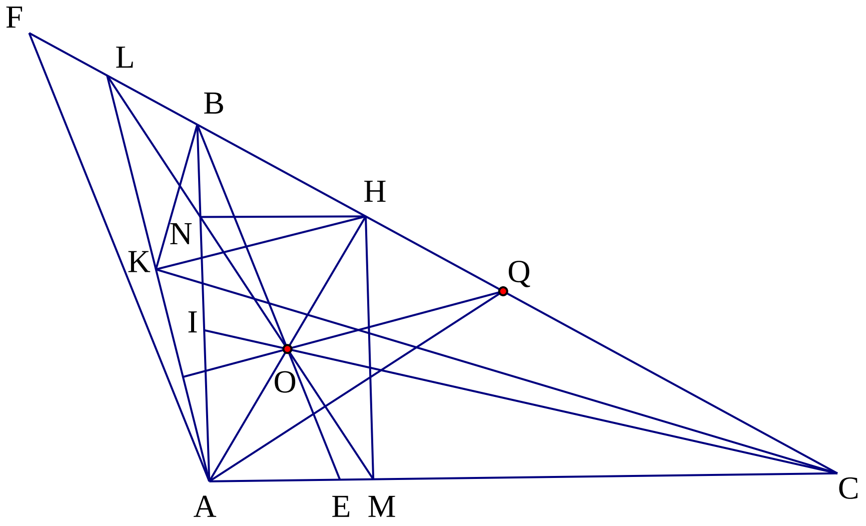
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn thi: TOÁN 9
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Hướng dẫn chấm thi (gồm 4 trang)

Câu	**Ý**	**Nội dung**	**Điểm**
Câu 1 **3 điểm**	**a** **1,5 điểm**	Tìm các số tự nhiên a để giá trị của biểu thức B = a^5+a^4+1 là số nguyên tố.	
		+) Với a = 0 ta có: B = 1 (Loại) +) Với a = 1 ta có : B = 3 (TM)	**0,5**
		+) Với a > 1 ta có : B = $a^5-a^2+a^4-a+(a^2+a+1)$	**0,25**
		B = $a^2(a^3-1)+a(a^3-1)+(a^2+a+1)\ \vdots\ a^2+a+1$ Với a >1 thì $B>a^2+a+1>1$ suy ra B là hợp số (Loại)	**0,5**
		Vậy a = 1 thì B là hợp số.	**0,25**
	b **1, 5 điểm**	1) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn điều kiện: $2x^2+4x=19-3y^2$.	
		$2x^2+4x=19-3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3\left(7-y^2\right)(*)$	**0,5**
		Ta thấy: $2(x+1)^2:2 \Rightarrow 7-y^2:2 \Rightarrow y^2$ là số lẻ. Ta lại có: $7-y^2\ge 0 \Rightarrow y^2\le 7$. Do dó $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$	**0,5**
		Lúc đó: $2(x+1)^2=18 \Rightarrow x+1=\pm 3$ nên $x_1=2; x_2=-4$.	**0,25**
		Ta thấy các cặp số $(2;1),(2;-1),(-4;1),(-4;-1)$ thỏa mãn (*) nên là nghiệm của phương trình.	**0,25**
	a **2,5 điểm**	Giải các phương trình: $x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)\left(x^2-x-6\right)}$	
		$x^2-7x+12=\sqrt{(x-3)\left(x^2-x-6\right)}$ (Điều kiện: $x\ge -2$)	**0,5**
		$\Leftrightarrow (x-3)(x-4)=\sqrt{(x-3)^2(x+2)}$ $\Leftrightarrow (x-3)(x-4)-\lvert x-3\rvert\sqrt{(x+2)}=0\ (1)$	**0,5**
		+ Nếu $x\ge 3$ $(1) \Leftrightarrow (x-3)\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=x-4\ (2)\end{array}\right.$ $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ x+2=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4\ge 0 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7$	**0,75**

Câu 2 **4,5 điểm**		+ Nếu $-2 \le x < 3$ $(1) \Leftrightarrow (x-3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+2}=4-x \ \ (3) \end{array}\right.$ $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \ge 0 \\ x+2=x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$	**0,5**
		Vậy $S=\{2;3;7\}$	**0,25**
	b **2,0 điểm**	Tính giá trị biểu thức $A=6x^{2021}-5x^{2022}+4x^{2023}$ với $x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}-\sqrt{-2\sqrt{2}+3}$.	
		Đặt $A=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}} \Rightarrow A^2=\dfrac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1} \Rightarrow A=\sqrt{2}$	**0,75**
		$x=\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)=1$	**0,75**
		Với $x=1$, ta có: $A=6-5+4=5$	**0,5**
Câu 3 **3,5 điểm**	**a** **2,0 điểm**	Xác định các hệ số *a* và *b* để đa thức $\mathrm{P}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^4-2\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{b}$ là bình phương của một đa thức.	
		Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì: $P(x) = \left(x^2+cx+d\right)^2 = x^4+2cx^3+\left(c^2+2d\right)x^2+2cdx+d^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$ Mà: $P(x) = x^4-2x^3+3x^2+ax+b$	**1,0**
		Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2c=-2 \\ c^2+2d=3 \\ 2cd=a \\ d^2=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ d=1 \\ a=-2 \\ b=1 \end{cases}$	**0,75**
		Vậy: $a=-2, b=1$.	**0,25**
	b **1,5 điểm**	Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{c+1}+\dfrac{\sqrt{c}}{a+1} \ge \dfrac{3}{2}$	
		$\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}=\sqrt{a}-\dfrac{b\sqrt{a}}{b+1} \ge \sqrt{a}-\dfrac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ **(1)** Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{b}}{c+1} \ge \sqrt{b}-\dfrac{\sqrt{bc}}{2}$ **(2)**; $\dfrac{\sqrt{c}}{a+1} \ge \sqrt{c}-\dfrac{\sqrt{ac}}{2}$ **(3)**	**0,5**
		Cộng theo vế **(1), (2), (3)** ta được: $\dfrac{\sqrt{a}}{b+1}+\dfrac{\sqrt{b}}{c+1}+\dfrac{\sqrt{c}}{a+1} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{2}$ **(4)**	**0,25**

		Mặt khác ta có: $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\le\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}$ $=a+b+c=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)$ $\Rightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\le\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{3}=3$ **(5)**	**0,5**
		Từ (4) và (5) suy ra $\frac{\sqrt{a}}{b+1}+\frac{\sqrt{b}}{c+1}+\frac{\sqrt{c}}{a+1}\ge\frac{3}{2}$ Dấu = xảy ra khi a = b = c = 1	**0,25**
Câu 4 **8,0 điểm**		Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB<AC$ và đường cao AH. Hai điểm M,N lần lượt là hình chiếu của H trên AC,AB. O là giao điểm của AH và MN. a) Cho $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và $BC=$ 10 cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$. b) Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $CFA=CBE$. CO cắt AB tại I. Chứng minh rằng: $\sqrt{AE}.BC=\sqrt{EC}.AB$ và AE.IB $+AI.EC=EC.IB$ c) BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh: $BK\perp KC$.	
			
	a **3,5 điểm**	Cho $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ và BC = 10 cm. Tính chu vi tứ giác $AMHN$.	
		Tính được AB = 6cm, AC = 8cm,	**1,0**
		Tính được BH = 3,6cm, CH = 6,4cm.	**1,0**

		Tính được HM = 3,84cm , HN = 2,88cm	**1,0**
		$P_{AMHN} = 13,44\ cm$	**0,5**
	b **3,0 điểm**	Gọi E là giao điểm của BO và AC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho $CFA = CBE$. CO cắt AB tại I.	
		Ta có: $\sqrt{AE}.BC = \sqrt{EC}.AB \Leftrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BH.BC}{BC^2} = \frac{BH}{BC}$	**1,0**
		AMHN là hình chữ nhật nên AO = OH Mà $CFA = CBE \Rightarrow FA//BO$ Suy ra BF = BH	**0,5**
		Mặt khác : FA//BE $\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{BC} = \frac{BH}{BC}$ (đpcm)	**0,5**
		Chứng minh tương tự : $\frac{AI}{IB} = \frac{AC^2}{BC^2}$ Suy ra : $\frac{AE}{EC} + \frac{AI}{IB} = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$ $\Rightarrow AE.IB + AI.EC = EC.IB$	**1,0**
	c **1,5 điểm**	BC cắt MN tại L. K là hình chiếu của H trên AL. Chứng minh rằng $BK \perp KC$	
		Chứng minh đc $\Delta AMN \sim \Delta ABC\ (c.g.c) \Rightarrow AMN = ABC$	**0,5**
		Gọi Q là trung điểm của BC $\Rightarrow \Delta AQC$ cân tại Q $\Rightarrow QAC = ACB$ Do đó $QAC + AMN = ABC + ACB = 90^0 \Rightarrow AQ \perp LM$ Suy ra O là trực tâm của ΔLAQ $\Rightarrow QO \perp AL$	**0,5**
		Xét ΔAKH vuông tại K có AO = OH $\Rightarrow KO = AO\ (= \frac{AH}{2})$ Suy ra OQ là đường trung trực của AK $\Rightarrow QA = QK = QB = QC = \frac{BC}{2}$ Suy ra tam giác BKQ vuông tại K$\Rightarrow BK \perp CK$	**0,5**
Câu 5		Viết 150 số tự nhiên 1, 2, 3,…, 150 lên bảng. Mỗi lần ta xóa đi hai số nào đó và thay bằng tổng hoặc hiệu của chúng. Sau một số lần như vậy thì trên bảng chỉ còn lại một số. Hỏi có khi nào số đó là 100 không?	
1 điểm		Giả sử xóa đi hai số bất kì a, b và thay bằng $a+b$ hoặc $a-b$hoặc b - a	**0,25**

	Gọi tổng của 150 số ban đầu là: $S+a+b=1+2+3+...+150=\frac{(1+150).150}{2}=11325$ Là 1 số lẻ.	
	Ta có tổng mới là: $S+a+b$ hoặc $S+a-b$ hoặc S +b - a	**0,25**
	Tổng của tổng ban đầu và tổng mới là: $(S+a+b)+(S+a+b)=2S+2a+2b$ hoặc $(S+a+b)+(S+a-b)=2S+2a$ hoặc 2S +2b đều là số chẵn nên tổng ban đầu và tổng mới luôn cùng tính chẵn, lẻ mà tổng ban đầu là số lẻ nên tổng mới cũng là số lẻ. Vậy số còn lại không thể là 100.	**0,5**

--- Hết ---

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa*

PHÒNG GD&ĐT VỤ BẢN
TRƯỜNG THCS ĐẠI AN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán lớp 9 (vòng 1)
(Thời gian 150 phút)

Bài 1: *(4 điểm)*

a) Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S=\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}\cdot$

b) Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ thì $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

Bài 2: *(6 điểm)* Giải phương trình

a) $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x)$

b) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$

c) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$.

Bài 3: *(2 điểm)* Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình**:**

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{9}{xyz}=\mathbf{1}$$

Bài 4: *(7 điểm)* Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm O tại hai điểm B,C ((d) không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh $AK.AI=AM^2=AB.AC$

b) Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn

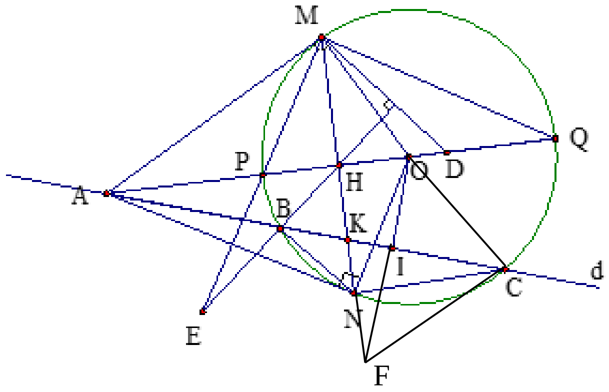
c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Bài 5: *(1 điểm)* Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\geq\frac{3}{2}$.

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung đáp án	Điểm
1	a	Ta có $xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$ Tương tự $yz+x-1=(y-1)(z-1)$ và $zx+y-1=(z-1)(x-1)$ Suy ra $S=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$ $=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{xy+yz+zx}$ Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx=-7$ Suy ra $S=-\frac{1}{7}$	2
	b	Đặt $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=\sqrt{b}>0\\ \sqrt[3]{y}=\sqrt{c}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=b^3\\ y^2=c^3\end{cases}$ Ta có: $\sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt{c^3+bc^2}=a$ Bình phương hai vế được: $b^3+b^2c+c^3+bc^2+2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2}=a^2$ Biến đổi ta được: $(b+c)^3=a^2$ $\Rightarrow\sqrt[3]{a^2}=b+c$ hay $\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$ (đpcm)	2
2	a	a) $4(2x^2+1)+3(x^2-2x)\sqrt{2x-1}=2(x^3+5x)$ Điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$ Phương trình đã cho được viết lại như sau: $2x^3-8x^2+10x-4-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)(2x^2-4x+2)-3x(x-2)\sqrt{2x-1}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)\left[(2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}\right]=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ (2x^2-4x+2)-3x\sqrt{2x-1}=0\end{array}\right.$ Xét phương trình: $2x^2-4x+2-3x\sqrt{2x-1}=0\Leftrightarrow2x^2-4x+2-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$. Tương đương $2x^2-2(2x-1)-3\sqrt{x^2(2x-1)}=0$ Chia cho $x^2>0$ Ta có: $2-2.\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)-3\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}=0$. Đặt $t=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}\geq0$ phương trình mới là: $-2t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ Với $t=\frac{1}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-8x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4+2\sqrt{3}\\ x=4-2\sqrt{3}\end{array}\right.$	2
	b	$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$ Điều kiện: $x\geq7$.	2

		Để đơn giản ta đặt $\sqrt[3]{x}=t\ge\sqrt[3]{7}\Rightarrow x=t^3$ Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t-(t^3-4)\sqrt{t^3-7}-3t^3+28=0\Leftrightarrow 3t^3-t^2+2t-28+(t^3-4)\sqrt{t^3-7}=0$ Nhẩm được $t=2$. Nên ta phân tích phương trình thành: $\Leftrightarrow 4t^3-t^2+2t-32+(t^3-4)\left(\sqrt{t^3-7}-1\right)=0$ $\Leftrightarrow (t-2)\left[\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)\right]=0$ Để ý rằng $4t^2+7t+16>0$ và $t^3\ge 7$ nên ta có $\left(4t^2+7t+16\right)+(t^3-4)\left(\frac{t^2+2t+4}{\sqrt{t^3-7}+1}\right)>0$. Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t=2\Leftrightarrow x=8$.	
	c	$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x-1}}$. Điều kiện $x>\frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{2x-1}\\ b=\sqrt{2x+1}\\ c=\sqrt{x+1}\\ d=\sqrt{3x-1}\end{cases}$ $(a,b,c,d>0)\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$ Từ đó ta có hệ: $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}cd(a+b)=ab(c+d)\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c^2d^2(a+b)^2=a^2b^2(c+d)^2\\ a^2+b^2=c^2+d^2\end{cases}$ Suy ra: $c^2d^2\left(a^2+b^2+2ab\right)=a^2b^2\left(c^2+d^2+2cd\right)$ $\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)\left(a^2b^2-c^2d^2\right)+2abcd(ab-cd)=0$ $\Leftrightarrow(ab-cd)\left[\left(a^2+b^2\right)(ab+cd)+2abcd\right]=0$ $\Leftrightarrow ab=cd$ (do $a,b,c,d>0$) Với $ab=cd$, ta có: $\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3x-1}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ 4x^2-1=(x+1)(3x-1)\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.	2
3		Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình**:** $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{9}{xyz}=\mathbf{1}$	2

		Vai trò của x, y, z như nhau nên không làm mất tính tổng quát giả sử $1 \le x \le y \le z \Rightarrow x^2 \le xy \le xz \le yz \le xyz$ $\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^2}$ $\Leftrightarrow \quad 1 \le \frac{12}{x^2} \Rightarrow x^2 \le 12 \Rightarrow x \in \quad 1, 2,3$ Nếu $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{9}{yz} = 1$ $\Rightarrow z + 1 + y + 9 = yz \Rightarrow yz – z – y + 1 = 11$ $(y- 1) (z - 1) = 11 \Rightarrow y = 2 ; z = 12$ hoặc $z =2 ; y = 12$ Nếu $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{2z} + \frac{9}{2yz} = 1$ $\Rightarrow (2y - 1) (2z-1) = 23 \Rightarrow y = 1; z = 12$ hoặc $y = 12; z = 1$ Nếu $x = 3 \Rightarrow (3y – 1) (3z - 1) = 37$ vô nghiệm Vậy (x, y, z) = (1; 2, 12) và các hoán vị của nó	
	a	 a, Chứng minh $AK.AI = AM^2 = AB.AC$ * Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác của góc MON. Mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$. Ta có ΔAMO vuông tại M có đường cao MH nên suy ra $AH.AO = AM^2$. Ta có ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (vì $AHK = AIO = 90^o$ và OAI chung) nên $AK.AI = AH.AO$. Vậy $AK.AI = AM^2$. (đpcm)	2
	b	b, Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn Gọi F là giao điểm của MN với OI $\Delta OHF \sim \Delta OIA (gg) \left.\begin{matrix} \Rightarrow OI.OF = HO.OA \\ OH.OA = OM^2 = OC^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow OI.OF = OC^2$ $\Rightarrow \Delta OIC \sim \Delta OCF \Rightarrow OCF = OIC = 90^O$ Cmtt ta có $OBF = 90^O$ mà $OHF = 90^O$ Vậy bốn điểm B, C O, H thuộc đường tròn đường kính OF	2

	c	c, Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME. Ta có M thuộc đường tròn (O) nên $PMQ = 90^o$. Xét ΔMHE và ΔQDM có $MEH = DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH = MQD$ (cùng phụ với MPO). Suy ra $\Delta MHE \sim \Delta QDM$. Do đó ta được $\frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$. Tương tự ta có $\Delta PMH \sim \Delta MQH \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$. Suy ra $ME = 2MP$. Vậy P là trung điểm ME. (đpcm).	3
5		Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca} \ge \frac{3}{2}$. **Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{a}{b^3+ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \ge \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \ge \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+1\right)$. Tương tự: $\frac{b}{c^3+bc} \ge \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+1\right); \frac{c}{a^3+ca} \ge \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+1\right)$ Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được: $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca} \ge \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4}$ Bài toán được quy về chứng minh: $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \frac{3}{4} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}+c\right) \ge 3+a+b+c=6$. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{1}{a}+a \ge 2,=;\frac{1}{b}+b \ge 2;\frac{1}{c}+c \ge 2$ Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.	1