PHÒNG GD&ĐT QUỲNH LƯU

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi có* ***01*** *trang*)

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI SƠ TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian thi: ***150 phút*** (*Không kể thời gian giao đề*)

Câu 1: *(2,0 điểm)*

a. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c}$

Chứng minh $a^2+4b^2+9c^2$ là số chính phương.

b. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$$3(x^2+y^2)-5(x+y)=0$$

Câu 2: *(6,0 điểm)*

a. Giải phương trình:

$$(x^2+1)^2+(3x+2)x^2+3x=0$$

b. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x^2+4y^2=20-2xy\\(x-y)(4x^2+5y^2-20)=1\end{cases}$$

Câu 3: *(2,0 điểm)*

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}\geq 4$$

Câu 4: *(7,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là điểm trên cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0$ (M không trùng B và C). AM cắt DC tại I. BD cắt AM tại E.

a. Chứng minh $\cos^2\widehat{CAN}+\frac{AB^2}{AI^2}=1$

b. Chứng minh $AB^2+DN^2=2AE^2$

c. Gọi P là giao điểm của OM và BI. Chứng minh các đường thẳng AB, DM và CP đồng quy.

Câu 5: *(2,0 điểm)*

Trong một chiếc hộp có 100 tấm thẻ giống nhau, được đánh số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 109. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố sau:

a. A: Rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là một số chính phương.

b. B: Rút được tấm thẻ mà ghi số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của số 7^{2026}.

Câu 6: *(1,0 điểm)*

Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nửa đều (tam giác vuông có một góc 60^0) có cạnh huyền bằng 2025 và 3 đỉnh được tô cùng màu.

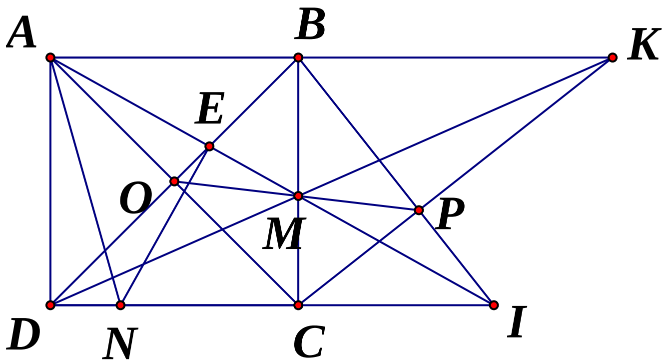
----------------HẾT---------------

Họ tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

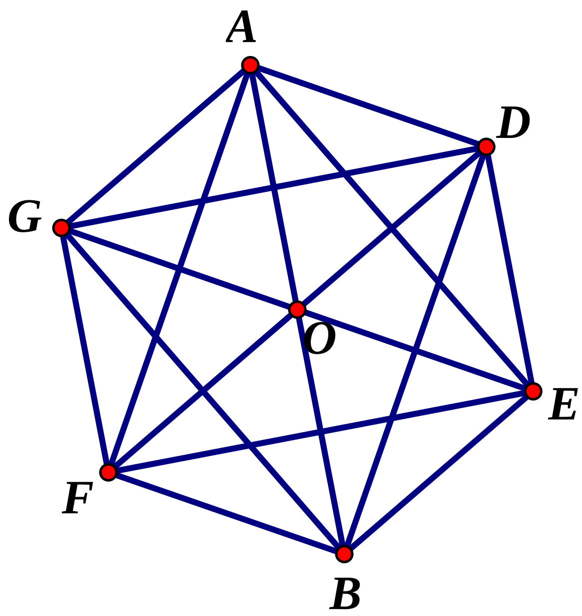
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
LỚP 9 NĂM HỌC 2024-2025
Môn: **TOÁN**
(Hội đồng chấm thi có hướng dẫn chấm chi tiết riêng sau khi thống nhất)

Câu		**Nội dung cần đạt**	**Điểm**
Câu 1: **2.0 điểm**	**1.a** **1.0 điểm**	**Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn** $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c}$ **Chứng minh** $a^2+4b^2+9c^2$ **là số chính phương**	
		Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c}$, nên $\frac{2b+a}{2ab}=\frac{1}{3c}$ $6bc+3ac=2ab$ $2ab-6bc-3ac=0$ $2(2ab-6bc-3ac)=0$ $a^2+4b^2+9c^2=a^2+4b^2+9c^2+2(2ab-6bc-3ac)$ $=(a+2b-3c)^2$ Vậy $a^2+4b^2+9c^2$ là số chính phương	0.25 0.25 0.25
	1.b **1.0 điểm**	**Giải phương trình nghiệm nguyên dương** $\mathbf{3(x^2+y^2)-5(x+y)=0}$	
		$3(x^2+y^2)-5(x+y)=0$ $x(3x-5)=y(5-3y)$ - Nếu 3x – 5> 0, thì $5-3y>0$, suy ra $y=1$ (vì y là số nguyên dương) với $y=1$ thì $x=2$ - Nếu $3x-5\le 0$, suy ra $x=1$ vì x nguyên dương với $x=1$ thì $y=2$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(1;2),(2;1)$	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 2: **6.0 điểm**	**2.a** **3.0 điểm**	**Giải phương trình** $\mathbf{(x^2+1)^2+(3x+2)x^2+3x=0}$	
		$(x^2+1)^2+(3x+2)x^2+3x=0$ $(x^2+1)^2+3x(x^2+1)+2x^2=0$ $(x^2+1+x)(x^2+1+2x)=0$ Nếu $x^2+1+x=0$ (phương trình vô nghiệm) Nếu $x^2+2x+1=0$, $x=1$ Vậy nghiệmcủa phương trình là x = 1	0.5 1.0 0.5 1.0
	2.b **3.0 điểm**	**Giải hệ phương trình** $\begin{cases}\mathbf{3x^2+4y^2=20-2xy}\\ \mathbf{(x-y)(4x^2+5y^2-20)=1}\end{cases}$	
		$\begin{cases}3x^2+4y^2=20-2xy & (1)\\ (x-y)(4x^2+5y^2-20)=1 & (2)\end{cases}$ Từ phương trình (1), ta được $3x^2+4y^2+2xy=20$ Thay vào phương trình (2) , $(x-y)(4x^2+5y^2-3x^2-4y^2-2xy)=1$	 0.5

		$(x-y)^3=1$, suy ra $x=y+1$ Thay vào (1), $3(y+1)^2+4y^2+2(y+1)y-20=0$ $9y^2+8y-17=0$ $y=1$ hoặc $y=-\frac{17}{9}$ $y=1$ thì $x=2$ $y=-\frac{17}{9}$ thì $x=-\frac{8}{9}$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(2;1),\left(-\frac{8}{9};-\frac{17}{9}\right)$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 3: **2.0 điểm**	**2.0 điểm**	**Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:** $$\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}\geq 4$$	
		Đặt $P=\frac{3a+b}{2a+c}+\frac{3b+c}{2b+a}+\frac{3c+a}{2c+b}$ $P-3=\frac{3a+b}{2a+c}-1+\frac{3b+c}{2b+a}-1+\frac{3c+a}{2c+b}-1$ $P-3=\frac{a+b-c}{2a+c}+\frac{b+c-a}{2b+a}+\frac{c+a-b}{2c+b}$ $P-3=\frac{(a+b-c)^2}{(2a+c)(a+b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(2b+a)(b+c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(2c+b)(c+a-b)}$ Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ $P-3=\frac{(a+b-c)^2}{(2a+c)(a+b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(2b+a)(b+c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(2c+b)(c+a-b)}$ $P-3\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$ Suy ra $P\geq 4$. Dấu = xảy ra khi $a=b=c$	0.25 0.25 0.5 0.5 0.5
Câu 4: **7.0 điểm**			

	4.a **2.5 điểm**	**Chứng minh $\cos^2\widehat{CAN} + \frac{AB^2}{AI^2} = 1$**	
		Ta có $\widehat{CAN} + \widehat{CAM} = 45^0, \widehat{MAB} + \widehat{CAM} = 45^0$, $\widehat{CAN} = \widehat{MAB}$, $\widehat{MAB} = \widehat{AID}$ (so le trong) $\cos\widehat{CAN} = \cos\widehat{AID} = \frac{DI}{AI}$ $\cos^2\widehat{CAN} = \frac{DI^2}{AI^2}$ $\cos^2\widehat{CAN} + \frac{AB^2}{AI^2} = \frac{DI^2}{AI^2} + \frac{AB^2}{AI^2}$ $= \frac{DI^2 + AB^2}{AI^2} = \frac{DI^2 + AD^2}{AI^2} = 1$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
	4.b **2.5 điểm**	**Chứng minh $AB^2 + DN^2 = 2AE^2$**	
		Chứng minh được: $\Delta ANC \backsim \Delta AEB(g-g)$ $\frac{AN}{AE} = \frac{AC}{AB}$ Chứng minh được: $\Delta ANE \backsim \Delta ACB(c-g-c)$ $\widehat{AEN} = \widehat{ABC} = 90^0$ Tam giác AEN vuông cân tại E $2AE^2 = AN^2 = AD^2 + DN^2 = AB^2 + DN^2$	1.0 0.5 0.5 0.5
	4.c **2.0 điểm**	**Gọi P là giao điểm của OM và BI. Chứng minh các đường thẳng AB, DM và CP đồng quy.**	
		Gọi giao điểm của AB và DM là K Cần c/m:C,P,K thẳng hàng Kẻ CP’ vuông góc với BI tại P’.Cần chứng minh O,M,P’ thẳng hàng Ta có : $\Delta BCP' \backsim \Delta BIC(g-g)$, suy ra $BC^2 = BP'.BI$ Lại có : $\Delta BOC \backsim \Delta BCD(g-g)$, suy ra$BC^2 = BO.BD$ BO.BD = BP’.BI $\Delta BOP' \backsim \Delta BID(c-g-c) => \widehat{BP'O} = \widehat{BDI} = 45^0$ AB//CI suy ra $\frac{AB}{CI} = \frac{BM}{MC}$ hay $\frac{BC}{CI} = \frac{BM}{MC}$ Mà $\Delta BCP' \backsim \Delta BIC(g-g)$, suy ra $\frac{BC}{CI} = \frac{BP'}{CP'} = \frac{BM}{MC}$ $\frac{BP'}{CP'} = \frac{BM}{MC}$ P’M là tia phân giác của $\widehat{BP'C}$ $\widehat{BP'M} = 45^0$ mà $\widehat{BP'O} = 45^0$ suy ra O, M, P' thẳng hàng P’ trùng P suy ra CP vuông góc BI (1)	 0.5 0.5 0.5

		BK // CD, suy ra $\frac{BK}{CD} = \frac{BM}{MC}$ AB // CI, suy ra $\frac{AB}{CI} = \frac{BM}{MC}$ $\frac{BK}{CD} = \frac{AB}{CI} = \frac{BC}{CI} = \frac{BK}{BC}$ $=> \Delta BKC \backsim \Delta CBI (c-g-c)$, suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{CIB}$ Suy ra CK vuông góc Với BI (2) Từ (1) và (2) suy ra : C,P,K thẳng hàng suy ra đpcm	0.5
Câu 5: 2.0 điểm	**5.a 1.0 điểm**	**Tính xác suất của biến cố:** **Rút được tấm thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là một số chính phương**	
		Trong hộp có tất cả (109 – 10) : 1 + 1 = 100 thẻ mà 100 thẻ này giống nhau nên có 100 kết quả có thể xảy ra và chúng đồng khả năng.	0.25
		Có 20 thẻ mà tổng các chữ số trên thẻ đó là số chính phương gồm 10 ; 13 ; 18 ; 22 ; 27 ; 31 ; 36 ; 40 ; 45 ; 54 ; 63 ; 72 ; 79 ; 81; 88;90;97;100;103;108.	0.25
		Xác suất để rút được thẻ có tổng các chữ số trên thẻ là số chính phương là : P(A) = $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	0.5
	5.b 1.0 điểm	**Tính xác suất của biến cố:** **Rút được tấm thẻ mà ghi số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của số 7^{2026}**	
		Ta có $7^4 = 2401$, các số có hai chữ số cuối 01 nâng lên luỹ thừa nào cũng có 2 chữ số tận cùng 01 $7^{2026} = 7^{4.506+2} = 7^{4.506}.7^2$	0.25
		$= 7^{4.56}.49$ có hai chữ số tận cùng là 49 Suy ra số thẻ có số lớn hơn hoặc bằng 49 là (109-49):1+1=61 Suy ra có 61 kết quả thuận lợi cho biến cố B	0.25
		Xác suất để lấy được thẻ có số lớn hơn hoặc bằng hai chữ số tận cùng của 7^{2026}là: $P(B) = \frac{61}{100}$	0.25
Câu 6: 1.0 điểm		**Mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác nửa đều (tam giác vuông có một góc 60^0) có cạnh huyền bằng 2025 và 3 đỉnh được tô cùng màu.**	

	1.0điểm	 - Vẽ tam giác đều ABC cạnh 2025. Ba Điểm A, B, C được tô hai màu nên tồn tại hai điểm được tô cùng một màu. Giả sử hai điểm A, B được tô bởi màu đỏ. - Vẽ hình lục giác đều ADEBFG. - Nếu trong các điểm D, E, F, G có một điểm màu đỏ , giả sử E màu đỏ thì tam giác ABE là tam giác nửa đều cạnh huyền AB =2025 thỏa mãn. - Nếu trong các điểm D, E, F, G không có điểm nào màu đỏ tức là đều màu xanh thì tam giác EFG thỏa mãn	0.25 0.25 0.25 0.25