SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÀO CAI	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: **TOÁN** Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi thứ nhất: **26/9/2024** *(Đề thi gồm 01 trang, có 04 câu)*

Câu 1 (5,0 điểm). Với n là số nguyên dương, xét phương trình $x^n - nx + 3 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n \ge 5$, phương trình đã cho có một nghiệm $a_n \in (0,1)$ và một nghiệm $b_n \in (1, +\infty)$.

b) Chứng minh dãy số (a_n) và dãy số (b_n) có giới hạn hữu hạn, tìm các giới hạn đó.

Câu 2 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức có hệ số thực, bậc n với n là số tự nhiên. Chứng minh rằng $\max\limits_{0 \le i \le n+1} \left|3^i - P(i)\right| \ge 1$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AD cắt BC tại E, AB cắt CD tại F, AC cắt BD tại I. Đường tròn (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF lần lượt tại G, H $(G \ne A, H \ne C)$.

a) Chứng minh rằng G, H, I thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ECD và đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC cắt nhau tại điểm thứ hai là điểm M $(M \ne C)$. Chứng minh rằng bốn điểm G, O, H, M cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (5,0 điểm). Tại một Festival quốc tế, có 2024 thiếu niên đến từ k quốc gia tham gia một hoạt động tập thể. Tất cả các thiếu niên được chia thành các đội chơi; để tăng cường tính giao lưu thì trong mỗi đội chơi, mỗi nước chỉ có tối đa một thiếu niên tham gia; mỗi thiếu niên tham gia đúng một đội chơi. Ban tổ chức cho các đội chơi báo cáo về thành phần thiếu niên của đội mình. Thư kí so sánh kết quả báo cáo của từng cặp đội chơi và viết số quốc gia cùng có thiếu niên trong cả hai đội lên bảng. Biết rằng hai đội bất kỳ đều được so sánh và viết lên bảng đúng một lần. Gọi tổng các số được viết lên bảng là T. Tìm giá trị nhỏ nhất của T nếu:

a) $k = 88$.

b) $k = 89$.

---------------------------------HẾT---------------------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: **27/9/2024**
(Đề thi gồm 01 trang, có 03 câu)

Câu 5 (6,0 điểm). Xét hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x}{x-y}\right)+f\left(xf\left(y\right)\right)=f\left(xf\left(x\right)\right),\ \forall x>y>0.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)\le\frac{1}{x},\forall x>0.$

b) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 6 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB>BC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm D khác B,C. Dựng các hình bình hành $ADBA'$, $ADCB'$, $BDCC'$. Biết tam giác $A'B'C'$ nội tiếp đường tròn (O').

a) Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn (O').

b) Gọi Q là giao điểm của AC và BH, đường tròn đường kính HQ cắt $C'H$ tại điểm thứ hai là $K\left(K\neq H\right)$. Gọi S là giao điểm của AA' và HB'. Chứng minh K, Q, S thẳng hàng.

Câu 7 (7,0 điểm). Cho n,a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $a>b>1$, b lẻ và $b^n\left|\left(a^n-1\right)\right.$. Gọi p là ước nguyên tố bất kỳ của b. Chứng minh rằng $p^n<a^p.p^{v_p(n)}$ *(trong đó $v_p(n)$ là số nguyên không âm k lớn nhất sao cho $p^k|n$).*

--------------------------------HẾT--------------------------------