DỰ THẢO CẤU TRÚC
ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2025 – 2026

MÔN: TOÁN (Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)
Thời gian làm bài: 150 phút.

Câu 1. (2,0 điểm) Bao gồm hai trong các nội dung sau:

- Bài toán về chứng minh đẳng thức, đẳng thức có điều kiện;
- Bài toán về tính giá trị các biểu thức;
- Bài toán liên quan đa thức một biến;
- Hàm số và đồ thị.

Câu 2. (2,0 điểm) Bao gồm hai trong các nội dung sau:

- Bài toán về phương trình nghiệm nguyên;
- Bài toán số chính phương;
- Bài toán về chia hết trên tập hợp số nguyên;
- Bài toán số nguyên tố - hợp số;
- Bài toán liên quan đến phần nguyên.

Câu 3. (2,0 điểm) Bao gồm hai trong các nội dung sau:

- Phương trình bậc hai và định lý Vi-et;
- Phương trình bậc cao;
- Phương trình vô tỷ;
- Hệ phương trình.

Câu 4. (3,0 điểm) Bao gồm ba trong các nội dung sau:

- Chứng minh đặc tính hình học;
- Chứng minh điểm cố định hoặc đường cố định hoặc đại lượng không đổi;
- Chứng minh thẳng hàng, đồng quy;
- Tìm cực trị hình học.

Câu 5. (1,0 điểm) Bao gồm một trong các nội dung sau:

- Chứng minh bất đẳng thức;
- Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đại số.
- Tổ hợp.

Lưu ý: ***Những nội dung được phép sử dụng (không phải chứng minh):***

+) Số học: Định lý Fermat; định lý Wilson; các tính chất về đồng dư thức.

+) Đại số: Bất đẳng thức Cauchy; bất đẳng thức Cauchy-Schwarz; định lý Bezout; nguyên lý Dirichlet; nguyên lý bù trừ; nguyên lý cực hạn.

+) Hình học: Định lý Menelaus; định lý Ceva; định lý Ptolemy.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **PHÚ THỌ** **ĐỀ THAM KHẢO**	**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10** **TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG** **NĂM HỌC 2025 - 2026** **Môn: Toán** (Dành cho thí sinh thi chuyên Toán) *Thời gian làm bài: **150** phút, không kể thời gian giao đề* *Đề thi có **01** trang*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho số $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a^3+a^2-8a+4}{a^3-3a^2+17}$.

b) Tìm điểm cố định mà đường thẳng $(d): y=(2m-3)x+3m-1$ luôn đi qua với mọi m.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{3}$.

b) Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn $p>n+1$. Biết rằng $(-1)^n.(p-n-1)!-1$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $n^{p-1}+n!$ cũng chia hết cho p.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình $x^2-(m+2)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2+(m+2)x_2=12$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^4+1=25y^2-2x^2 \\ x^2+y^2+1=y\left(18-x^2\right) \end{cases}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định. Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H trên các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC. Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại B, C cắt nhau tại P, AP cắt $(O;R)$ ở Q khác A.

a) Chứng minh rằng MN là trung trực của EF.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AP, MN, EF đồng quy.

c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho bảng hình vuông kích thước 7×7. Trên mỗi hình vuông đơn vị của bảng, người ta viết một số thực khác 0 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

i) Tích các số trên mỗi hình vuông 4×4 bằng tích các số trên mỗi hình vuông 3×3.

ii) Tổng tất cả các số trên hình vuông kích thước 7×7 bằng 2025.

Chứng minh rằng tồn tại một cách viết thỏa mãn yêu cầu bài toán.

......................Hết.....................

Họ và tên thí sinh:……………………………………………**Số báo danh:**.......................

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ **ĐỀ THAM KHẢO**	HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN ĐỀ THI TS VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026 (Dành cho thí sinh thi chuyên toán) (HDC có: 05 trang)

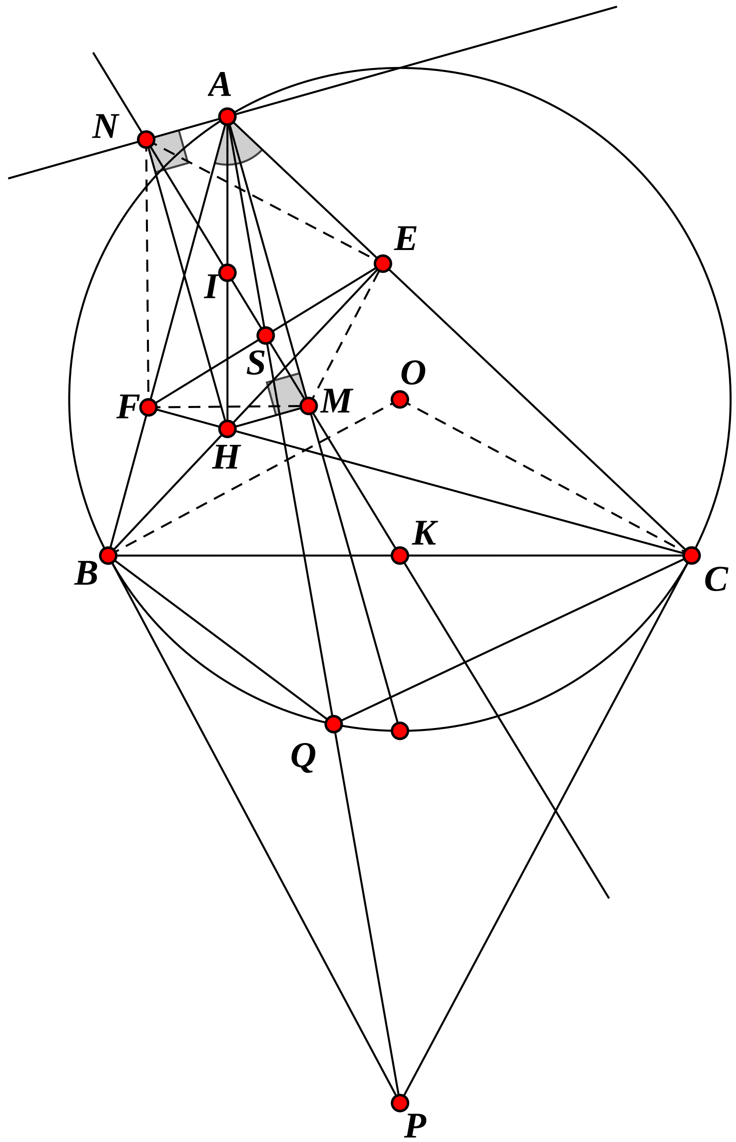
Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

Nội dung trình bày	Điểm
Câu 1. (2,0 điểm) a) Cho số $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a^3+a^2-8a+4}{a^3-3a^2+17}$. b) Tìm điểm cố định mà đường thẳng $(d): y=(2m-3)x+3m-1$ luôn đi qua với mọi m.	**2,0**
a) Cho số $a=\sqrt{3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{a^3+a^2-8a+4}{a^3-3a^2+17}$.	**1,0**
Ta có $a^2=3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}+3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}+2\sqrt{\left(3+\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}$ $\Leftrightarrow a^2=6+2\sqrt{9-\left(5+2\sqrt{3}\right)}\Leftrightarrow a^2=6+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}\Leftrightarrow a^2=6+2\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=6+2\left(\sqrt{3}-1\right)$	0,25
$\Leftrightarrow a^2=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2\Rightarrow a=\sqrt{3}+1\,(a>0)\Rightarrow(a-1)^2=3\Leftrightarrow a^2-2a-2=0$	0,25
Mặt khác $T=\dfrac{a^3+a^2-8a+4}{a^3-3a^2+17}=\dfrac{a\left(a^2-2a-2\right)+3\left(a^2-2a-2\right)+10}{a\left(a^2-2a-2\right)-\left(a^2-2a-2\right)+15}$	0,25
Vì $a^2-2a-2=0$ nên $T=\dfrac{0+0+10}{0+0+15}=\dfrac{2}{3}$.	0,25
b) Tìm điểm cố định mà đường thẳng $(d): y=(2m-3)x+3m-1$ luôn đi qua với mọi m.	**1,0**
Giả sử $A(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m	0,25
Suy ra $y_0=(2m-3)x_0+3m-1$ đúng với mọi m	0,25
Hay $(2x_0+3)m-3x_0-y_0-1=0$ nhận mọi m là nghiệm	0,25
Suy ra $\begin{cases}2x_0+3=0\\-3x_0-y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-\dfrac{3}{2}\\y_0=\dfrac{7}{2}\end{cases}$ Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $A\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.	0,25
Câu 2. (2,0 điểm)	**2,0**

a) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{3}$. b) Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn $p>n+1$. Biết rằng $(-1)^n.(p-n-1)!-1$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $n^{p-1}+n!$ cũng chia hết cho p.	
a) Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{3}$.	**1,0**
ĐK: $x\neq 1; y\neq -2$ Khi đó $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \dfrac{y+2-2x+2}{(x-1)(y+2)}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow (x-1)(y+2)=3(y-2x+4)\Leftrightarrow xy-y+2x-2=3y-6x+12$	0,25
$\Leftrightarrow xy+8x-4y=14$ $\Leftrightarrow x(y+8)-4(y+8)=-18$ $\Leftrightarrow (x-4)(y+8)=-18$	0,25
Vì $x,y\in \square$ nên $x-4; y+8\in Ư(18)$ $\Rightarrow x-4; y+8\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm9;\pm18\}$	0,25
Từ đó tìm được $(x;y)\in\left\{\begin{matrix}(5;-26);(3;10);(6;-17);(2;1);(7;-14);(1;-2);(10;-11);\\(-2;-5);(13;-10);(-5;-6);(22;-9);(-14;-7)\end{matrix}\right\}$	0,25
b) Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn $p>n+1$. Biết rằng $(-1)^n.(p-n-1)!-1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n^{p-1}+n!$ cũng chia hết cho p .	**1,0**
Theo ĐL Wilson $\left[(p-1)!+1\right]\vdots p\Leftrightarrow\left[1.2.3...(p-n-1)(p-n)(p-n+1)...(p-2)(p-1)+1\right]\vdots p$	0,25
$\Leftrightarrow\left[1.2.3...(p-n-1)(-n)(-n+1)...(-2)(-1)+1\right]\vdots p$ $\Leftrightarrow\left[(-1)^n.n!(p-n-1)!+1\right]\vdots p\,(1)$	0,25
Mặt khác $\left[(-1)^n.(p-n-1)!-1\right]\vdots p\Rightarrow(-1)^n.(p-n-1)!-1=k.p\left(k\in\square^*\right)(2)$ Từ $(1),(2)\Rightarrow\left[(kp+1).n!+1\right]\vdots p\Leftrightarrow(n!+1)\vdots p\,(3)$ Ta lại có $n^{p-1}+n!=\left(n^{p-1}-1\right)+(n!+1)$	0,25
Vì số nguyên tố p thỏa mãn $p>n+1$ nên $(n,p)=1$. Theo định lý Fermat ta có $n^{p-1}\equiv 1(\bmod p)\Leftrightarrow\left(n^{p-1}-1\right)\vdots p\,(4)$ Từ $(3),(4)\Rightarrow\left(n^{p-1}+n!\right)\vdots p\Rightarrow$ đpcm.	0,25
Câu 3. (2,0 điểm) a) Tìm m để phương trình $x^2-(m+2)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1^2+(m+2)x_2=12$. b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+y^4+1=25y^2-2x^2\\x^2+y^2+1=y\left(18-x^2\right)\end{cases}$.	**2,0**

a) Tìm m để phương trình $x^2-(m+2)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1^2+(m+2)x_2=12$.	**1,0**
Phương trình $x^2-(m+2)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=(m+2)^2-8m>0 \Leftrightarrow (m-2)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 2$	0,25
Khi đó theo ĐL Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m+2\\ x_1x_2=2m\end{cases}$ Mặt khác $x_1^2+(m+2)x_2=12 \Rightarrow x_1^2+(x_1+x_2)x_2=12 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1x_2-12=0$	0,25
$\Rightarrow (m+2)^2-2m-12=0 \Leftrightarrow m^2+2m-8=0 \Leftrightarrow (m-2)(m+4)=0$	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-4\\ m=2\end{array}\right. \Rightarrow m=-4$. Vậy $m=-4$ là giá trị cần tìm.	0,25
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+y^4+1=25y^2-2x^2\\ x^2+y^2+1=y(18-x^2)\end{cases}$	**1,0**
Hệ đã cho viết lại như sau $\begin{cases}x^4+y^4+2x^2+1=25y^2\\ x^2+y^2+x^2y+1=18y\end{cases}$ TH 1: $y=0 \Rightarrow$ Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}x^4+2x^2+1=0\\ x^2+1=0\end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm	0,25
TH 2: $y\neq 0 \Rightarrow$ Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^4}{y^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}+2.\dfrac{x^2}{y^2}=25\\ \dfrac{x^2}{y}+y+\dfrac{1}{y}+x^2=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{x^2+1}{y}+y\right)^2-2x^2=27\\ \left(\dfrac{x^2+1}{y}+y\right)+x^2=18\end{cases}$	0,25
Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{x^2+1}{y}+y\\ v=x^2\end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases}u^2-2v=27\\ u+v=18\end{cases}$. Giải hệ ta được $(u;v)\in\{(7;11);(-9;27)\}$.	0,25
Với $(u;v)=(7;11)\Rightarrow (x;y)\in\left\{\left(\pm\sqrt{11};4\right);\left(\pm\sqrt{11};3\right)\right\}$ Với $(u;v)=(-9;27)\Rightarrow$ vô nghiệm Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\left\{\left(\pm\sqrt{11};4\right);\left(\pm\sqrt{11};3\right)\right\}$.	0,25
Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có dây BC cố định. Hai đường cao BE,CF cắt nhau tại H. Gọi M,N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H trên các đường phân giác trong và đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC. Các tiếp tuyến của $(O;R)$ tại B,C cắt nhau tại P, AP cắt $(O;R)$ ở Q khác A. a) Chứng minh rằng MN là trung trực của EF. b) Chứng minh rằng các đường thẳng AP,MN,EF đồng quy.	**3,0**

c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.	
	
a) Chứng minh rằng MN là trung trực của EF.	**1,0**
Chỉ ra N, A, E, M, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH	0,25
Ta có $\begin{cases} NAF = 90^0 - \dfrac{ABC}{2} \\ NHE + NAC = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NAF = 90^0 - \dfrac{ABC}{2} \\ NHE + 90^0 - \dfrac{ABC}{2} + ABC = 180^0 \end{cases}$	0,25
$\Rightarrow NAF = NHE = 90^0 - \dfrac{ABC}{2} \Rightarrow NE = NF\,(1)$	0,25
Ta có $EAM = FAM = \dfrac{1}{2}ABC \Rightarrow EM = FM\,(2)$. Từ $(1),(2) \Rightarrow MN$ là trung trực của EF	0,25
b) Chứng minh rằng các đường thẳng AP, MN, EF đồng quy.	**1,0**
Gọi S là trung điểm của EF; Giả sử AP cắt EF tại S'	0,25
Chỉ ra: $\Delta AFS'$ đồng dạng $\Delta AQB \Rightarrow \dfrac{FS'}{AS'} = \dfrac{BQ}{BA}\,(3)$ $\Delta AES'$ đồng dạng $\Delta AQC \Rightarrow \dfrac{ES'}{AS'} = \dfrac{QC}{AC}\,(4)$	0,25

<table>
<tr><td>Mặt khác theo tính chất phân giác $\frac{BQ}{BA}=\frac{QC}{AC}(5)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Từ $(3),(4),(5)\Rightarrow FS'=ES'\Rightarrow S'\equiv S$. Do đó các đường thẳng AP, MN, EF đồng quy.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Gọi I là trung điểm của $AH \Rightarrow I$ là tâm của đường tròn đi qua các điểm $N,A,E,M,H,F \Rightarrow IE=IF$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Gọi K là trung điểm của BC $\Rightarrow KE=KF$ (tính chất tam giác vuông)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow$ IK là đường trung trực của FE ;</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Mà MN cũng là đường trung trực của FE nên đường thẳng MN đi qua K cố định.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Câu 5. (1,0 điểm) Cho bảng hình vuông kích thước 7×7. Trên mỗi hình vuông đơn vị của bảng, người ta viết một số thực khác 0 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:
i) Tích các số trên mỗi hình vuông 4×4 bằng tích các số trên mỗi hình vuông 3×3.
ii) Tổng tất cả các số trên hình vuông kích thước 7×7 bằng 2025.
Chứng minh rằng tồn tại một cách viết thỏa mãn yêu cầu bài toán.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Trên hình vuông kích thước 7×7 ta viết các số thực $a;b;1\ (a,b\neq0)$ vào các hình vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây.
<table>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td><td>b</td><td>a</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Từ hình trên ta thấy:
+ Mỗi hình vuông 3×3 đều chứa 3 số a, 3 số b và 3 số 1
$\Rightarrow$ Tích các số trên mỗi hình vuông 3×3 bằng a^3b^3
+ Mỗi hình vuông 4×4 đều chứa 4 số a, 4 số b và 8 số 1 hoặc 6 số a, 6 số b và 4 số 1
$\Rightarrow$ Tích các số trên mỗi hình vuông 4×4 bằng a^4b^4 hoặc a^6b^6.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Chọn $ab=1(1)\Rightarrow$ Tích các số trên mỗi hình vuông kích thước 4×4 bằng tích các số trên mỗi hình vuông kích thước 3×3.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Mặt khác tổng tất cả các số trên hình vuông kích thước 7×7 bằng 2025 nên
$18a+17b+14=2025\Leftrightarrow18a+17b=2011(2)$
Từ $(1),(2)\Rightarrow 18a+17.\frac{1}{a}=2011\Leftrightarrow18a^2-2011a+17=0\Leftrightarrow a=\frac{2011\pm\sqrt{4042897}}{36}$
Do đó có thể viết các số $a;b;1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán chẳng hạn
$(a;b)=\left(\frac{2011+\sqrt{4042897}}{36};\frac{2011-\sqrt{4042897}}{34}\right)\Rightarrow$ đpcm.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

…………HẾT………