SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH BÌNH

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Bài thi môn chuyên: TOÁN

(Ban hành kèm theo Công văn số 1276 /SGDĐT-QLCL, ngày 20/8/2024 của Sở GDĐT Ninh Bình)

1. Thời gian làm bài: 150 phút.

2. Điểm toàn bài: 10,0 điểm.

3. Hình thức: Tự luận.

4. Phạm vi kiến thức: Trong phạm vi Chương trình GDPT 2006 do Bộ GDĐT ban hành, tập trung chủ yếu ở lớp 9 THCS và công văn số 1313/SGDĐT-GDTrH ngày 15/10/2021 của Sở GDĐT Ninh Bình về việc hướng dẫn nội dung, chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi cấp THCS từ năm học 2021-2022. Nội dung như sau:

CẤU TRÚC ĐỀ

Câu	Nội dung	Điểm
1	**Biến đổi đại số:** a) Rút gọn, tính giá trị biểu thức nhiều biến trong đó có điều kiện liên hệ giữa các biến. b) Phương trình, hệ phương trình; bất phương trình.	2,0 điểm
2	**Đa thức và bất đẳng thức:** a) Đa thức. - Nghiệm của đa thức, định lí Viète, định lí Bezout, … - Giá trị đa thức, hệ số của đa thức, bậc của đa thức... - Phép toán đa thức, phương trình hàm đa thức... - Đa thức có hệ số nguyên, đa thức nhận giá trị nguyên... b) Bất đẳng thức; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức. - Ứng dụng của bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz, … - Kĩ thuật chuẩn hóa, Dirichlet - Bất đẳng thức nhiều biến và quy nạp. - Ứng dụng vào giải phương trình và hệ phương trình.	2,0 điểm
3	**Số học (02 ý nhỏ):** - Quan hệ chia hết, số nguyên tố, đồng dư, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất, thuật toán Euclide. - Các định lí Fermat nhỏ, Wilson, … - Số chính phương, số lập phương. - Phần nguyên, phương trình nghiệm nguyên.	1,5 điểm
4	**Hình học phẳng:** - Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp, hai tam giác bằng nhau, hai tam giác đồng dạng, ba điểm thẳng hàng. - Các định lí hình học cổ điển: Menelaus, Ceva, Ptolemy, định lí con bướm, đường thẳng Simson, Steiner, đường tròn Euler, đường thẳng Euler, định lí bốn điểm, …	3,0 điểm
5	**Tổ hợp (02 ý nhỏ):**	1,5 điểm

Câu	Nội dung	Điểm
	- Bài toán đếm. - Nguyên lí Dirichlet, nguyên lí cực trị. - Đại lượng bất biến. - Phương pháp phản chứng, qui nạp, xây dựng cấu hình. - Trò chơi.	

Ghi chú:

- Trong một câu **không nhất thiết** phải ra hết các nội dung quy định.

PHỤ LỤC
CÁC KẾT QUẢ ĐƯỢC PHÉP SỬ DỤNG KHÔNG CẦN CHỨNG MINH

Ngoài các nội dung kiến thức, kết quả đã được đề cập trong chương trình GDPT 2018 và công văn số 1313/SGDĐT-GDTrH ngày 15/10/2021 của Sở GDĐT Ninh Bình, cũng như các bộ sách giáo khoa tương ứng, học sinh được phép sử dụng các kết quả sau trong quá trình làm bài mà không cần chứng minh.

1. Biến đổi đại số

Một số đẳng thức 3 biến

1. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

2. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$.

3. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$.

4. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$.

5. $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

6. $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.

7. $(a+b)(b+c)(c+a)-8abc = a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$.

8. $ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

9. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c)$.

10. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

2. Đa thức

- Định lí Bezout và các hệ quả.
- Số nghiệm của một đa thức (khác đa thức không) không vượt quá bậc của nó.
- Định lí Viète cho đa phương trình bậc hai, bậc ba.
- Công thức nhị thức Newton.

3. Bất đẳng thức

- Các bất đẳng thức cổ điển: AM-GM, Cauchy-Schwarz, Minkowski, Chebyshev.
- Một số kết quả thường gặp

- Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức: Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ và các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Ta có $\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+...+\frac{x_n^2}{a_n} \ge \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = ... = \frac{x_n}{a_n}$.

- Với a,b là hai số thực bất kì, ta luôn có: $a^2+b^2\ge 2ab$; $(a+b)^2\ge 4ab$; $2(a^2+b^2)\ge (a+b)^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

- Với a,b,c là ba số thực bất kì, ta luôn có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$, $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$, $3(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

- Với a,b là hai số thực dương bất kì, ta kí hiệu $Q=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, $A=\dfrac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$, $H=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ lần lượt là *trung bình bình phương, trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa* của hai số đó. Ta luôn có $Q\ge A\ge G\ge H$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

- Với a,b,c là ba số thực dương bất kì, ta kí hiệu $Q=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $A=\dfrac{a+b+c}{3}$, $G=\sqrt[3]{abc}$, $H=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ lần lượt là *trung bình bình phương, trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa* của ba số đó. Ta luôn có $Q\ge A\ge G\ge H$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4. Hình học

- Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC và một điểm H nằm trên cạnh BC. Đặt $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $BH=c'$, $CH=b'$, $AH=h$. Khi đó:

- Nếu tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH thì $b^2=ab'$, $c^2=ac'$, $ah=bc$, $b'c'=h^2$, $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

- Nếu tam giác ABC vuông tại A và ta có một trong các hệ thức $b^2=ab'$, $c^2=ac'$, $ah=bc$, $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ thì $AH\perp BC$.

- Nếu $AH\perp BC$ và ta có một trong các hệ thức $b^2=ab'$, $c^2=ac'$, $ah=bc$, $b'c'=h^2$, $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ thì tam giác ABC vuông tại A.

- Các hệ thức lượng cho tam giác nhọn: định lí côsin, định lí sin, các công thức tính diện tích tam giác.
- Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây; liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây; tính chất của đường tròn nội tiếp, ngoại tếp, bàng tiếp tam giác; tính chất của tiếp tuyến chung của hai đường tròn; liên hệ giữa cung và dây; tính chất của một số loại

góc với đường tròn như: góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, góc có đỉnh ở bên trong (ngoài) đường tròn; quỹ tích cung chứa góc.

- Các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp: một tứ giác là tứ giác nội tiếp nếu nó thỏa mãn một trong các điều kiện sau:
  - Có tổng hai góc đối bằng 180°;
  - Có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau;
  - Có một góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối diện.
- Hệ thức lượng trong đường tròn (phương tích).
- Định lí từ vuông góc đến song song.
- Các định lí cổ điển: Menelaus, Ceva, Ptolemy, đường thẳng Simson, đường thẳng Steiner, đường thẳng Euler, đường tròn Euler, định lí con bướm, bổ đề hình thang, định lí bốn điểm.

5. Số học

5.1 Quan hệ chia hết trên tập số nguyên

5.1.1 Ước, bội và quan hệ chia hết

Định lí 1.

(i) $1 \mid a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) $a \mid a$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

(iii) Nếu $a \mid b$, $b \mid c$ thì $a \mid c$ với mọi $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

(iv) Nếu $a \mid b$ thì $|a| \le |b|$ với mọi $a,b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

(v) Nếu $a \mid b_i$ với $a, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,2,\ldots,n$ thì $a \mid \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ với $x_i \in \mathbb{Z}$.

(vi) Nếu $a \mid b$ và $b \mid a$ thì $a = b$ hoặc $a = -b$ với $a,b \in \mathbb{Z}$ và $a,b \neq 0$.

(vii) $a \mid b$ khi và chỉ khi $am \mid bm$, với $a,b,m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

Định lí 2 (Phép chia có dư). Với mỗi cặp số nguyên a, b, $b \neq 0$ tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q, r sao cho $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$.

Định lí 3 (Biểu diễn trong hệ cơ số b-phân). Cho số nguyên dương $b > 1$. Mỗi số nguyên dương a có thể biểu diễn duy nhất thành tổng sau

$$a = a_0 b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_{m-1} b + a_m,$$

trong đó m là một số nguyên không âm và $a_0, \ldots, a_m \in \{0,1,\ldots,b-1\}$, $a_0 \ge 1$.

5.1.2 Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất

Định lí 4 (Định lí Bézout). Cho a và b là hai số nguyên không đồng thời bằng 0, và số nguyên dương d. Khi đó $d = \gcd(a,b)$ khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên x_0, y_0 sao cho $d = ax_0 + by_0$ và d là ước chung của a và b.

Hệ quả 1. Hai số nguyên a, b không đồng thời bằng 0 nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên x, y sao cho $ax + by = 1$.

Đặc biệt, hệ quả này còn có thể phát biểu: Hai số nguyên a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên dương k và ℓ sao cho $ka-\ell b=1$.

Định lí 5.

(i) Nếu $d>0$ là ước chung của a, b thì $d=\gcd(a,b)$ khi và chỉ khi $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

(ii) Nếu c là ước chung của a và b thì $c\mid \gcd(a,b)$.

(iii) $(ma,mb)=m\cdot\gcd(a,b)$ với mọi m nguyên dương.

(iv) $\gcd\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\gcd(a,b)}{c}$ với c là ước chung dương của a và b.

(v) Nếu $c\mid ab$ và $\gcd(b,c)=1$ thì $c\mid a$.

(vi) Nếu $\gcd(a,c)=1$ thì $\gcd(a,bc)=\gcd(a,b)$.

(vii) Nếu $\gcd(a,b)=\gcd(a,c)=1$ thì $\gcd(a,bc)=1$.

(viii) Nếu $a=bq+r$ thì $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$, với a, b nguyên không đồng thời bằng 0 (tính chất này còn phát biểu dưới dạng: Nếu $a\equiv r\pmod b$ thì $\gcd(a,b)=\gcd(r,b)$).

Định lí 6. Cho các số nguyên a_1, a_2, …, a_n, $n\ge 2$, không đồng thời bằng 0. Khi đó

(i) Số nguyên $d=\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ khi và chỉ khi d là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tồn tại các số nguyên $x_1,x_2,...,x_n$ để $d=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i$.

(ii) $\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$ khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên $x_1,x_2,...,x_n$ để $\sum_{i=1}^{m}x_ia_i=1$.

(iii) Số nguyên dương $d=\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ khi và chỉ khi $d>0$, d là ước chung của các a_i và d chia hết cho mọi ước chung của các a_i, $i=1,2,\ldots,n$.

(iv) $\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\gcd(\gcd(a_1,a_2),a_3,\ldots,a_n)=\gcd(\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}),a_n)$.

(v) $\gcd(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)=k\cdot\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, với k nguyên dương.

Định lí 7 (Thuật toán Euclide). Cho $a,b\in\square$, $b>0$. Thực hiện liên tiếp các phép chia có dư ta có

$$\begin{aligned}
&a=q_0b+r_1, 0<r_1<b,\\
&b=q_1r_1+r_2, 0<r_2<r_1,\\
&r_1=q_2r_2+r_3, 0<r_3<r_2,\\
&\ldots\\
&r_{n-2}=q_{n-1}r_{n-1}+r_n, 0<r_n<r_{n-1},\\
&r_{n-1}=q_nr_n, q_n>1.
\end{aligned}$$

Khi đó $\gcd(a,b)=r_n$.

Định lí 8. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0. Khi đó ta có

(i) $m=\operatorname{lcm}(a,b)$ khi và chỉ khi m là bội chung dương của a, b và $m| c$, với mọi c là bội chung của a, b.

(ii) $m=\operatorname{lcm}(a,b)$ khi và chỉ khi m là bội chung dương của a, b và $\gcd\left(\frac{m}{|a|},\frac{m}{|b|}\right)=1$.

(iii) $\operatorname{lcm}(ka,kb)=k\cdot\operatorname{lcm}(a,b)$ với k nguyên dương.

(iv) $\operatorname{lcm}(a,b,c)=\operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(a,b),c)$.

Định lí 9. Cho hai số nguyên a, b khác 0. Khi đó $\gcd(a,b)\cdot\operatorname{lcm}(a,b)=|ab|$.

5.1.3 Số nguyên tố, hợp số

Định lí 10. Cho a, b là hai số nguyên và p là số nguyên tố. Nếu $p| ab$ thì hoặc $p| a$ hoặc $p| b$.

Định lí 11 (Định lí cơ bản của Số học). Mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 đều viết được dưới dạng tích của các số nguyên tố. Biểu diễn này là duy nhất nếu không kể đến thứ tự của các thừa số.

Hệ quả 2. Theo Định lí cơ bản của số học, mọi số nguyên dương $n>1$ đều viết được duy nhất dưới dạng

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s},$$

ở đó p_i là các số nguyên tố phân biệt, a_i là các số nguyên dương với $i=1,2,\ldots,s$. Biểu diễn trên được gọi là phân tích tiêu chuẩn của n.

Khi phân tích hai số nguyên dương m, n ở dạng phân tích tiêu chuẩn, có thừa số nguyên tố p là ước của m nhưng không là ước của n, ta có thể bổ sung vào phân tích của n thừa số p^0 (và ngược lại). Khi đó ta luôn viết được

$$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s} \text{ và } n=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_s^{b_s},$$

trong đó p_i là các số nguyên tố phân biệt, a_i, b_i là các số tự nhiên với $i=1,2,\ldots,s$. Khi đó

$$\gcd(m,n)=p_1^{\min(a_1,b_1)}p_2^{\min(a_2,b_2)}\cdots p_s^{\min(a_s,b_s)},$$
$$\operatorname{lcm}(m,n)=p_1^{\max(a_1,b_1)}p_2^{\max(a_2,b_2)}\cdots p_s^{\max(a_s,b_s)}.$$

Định lí 12 (Euclide). Tồn tại vô hạn số nguyên tố.

5.2. Đồng dư

5.2.1 Đồng dư thức

Định lí 13.

(i) Nếu $a_i\equiv b_i \pmod m$, $i=1,2,\ldots,n$ thì $\sum_{i=1}^{n}a_i\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i \pmod m$.

(ii) Nếu $a\equiv b+c \pmod m$ thì $a-c\equiv b \pmod m$.

(iii) Nếu $a\equiv b \pmod m$ thì $a+tm\equiv b \pmod m$ với mọi t nguyên.

(iv) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $ac \equiv bc \pmod{m}$ và $ac \equiv bc \pmod{|c|m}$ với mọi c nguyên khác 0.

(v) Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ thì $\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i \pmod{m}$.

(vi) Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ và $x \equiv y \pmod{m}$ thì $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i y^i \pmod{m}$. Từ đó suy ra nếu $f(x)$ là một đa thức hệ số nguyên bậc dương và $x \equiv y \pmod{m}$ thì $f(x) \equiv f(y) \pmod{m}$.

(vii) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$, d là ước chung của a và b, $\gcd(d, m) = 1$ thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

(viii) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung dương của a, b, m thì $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$

(ix) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$.

(x) $ax \equiv ay \pmod{m} \Leftrightarrow x \equiv y \left(\bmod \dfrac{m}{\gcd(a, m)}\right)$.

(xi) $x \equiv y \pmod{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\operatorname{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$.

Định lí 14 (Một số dấu hiệu chia hết). Cho số nguyên dương $n = \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}$. Khi đó

(i) $n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_0 \pmod{3}$ và $n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_0 \pmod{9}$.

(ii) $n \equiv \overline{a_1 a_0} \equiv 2a_1 + a_0 \pmod{4}$.

(iii) $n \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_0} \pmod{5^k}$. Đặc biệt $n \equiv a_0 \pmod{5}$.

(iv) $n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \pmod{11}$.

5.2.2 Định lí Fermat nhỏ, định lí Wilson

Định lí 15 (Fermat nhỏ). Cho số nguyên tố p. Nếu số nguyên a nguyên tố với p thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Hệ quả 3. Cho số nguyên tố p. Với mọi số nguyên a ta đều có $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Định lí 16 (Wilson). Cho số nguyên dương $p > 1$. Khi đó p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

5.3. Số chính phương, số lập phương

Định lí 17. Cho x là một số nguyên. Khi đó

(i) $x^2 \equiv 0,1 \pmod{3}$. (ii) $x^2 \equiv 0,1 \pmod{4}$.

(iii) $x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5$.

(iv) $x^2 \equiv 0,1,2,4 \pmod 7$.

(v) $x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 8$.

(vi) $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ với mọi x lẻ.

(vii) $x^2 \equiv 0,1,4,5,6,9 \pmod{10}$.

(viii) $x^3 \equiv -1,0,1 \pmod 7$.

(ix) $x^3 \equiv -1,0,1 \pmod 9$.

Định lí 18. Nếu $n^2 < k < (n+1)^2$ với n là một số nguyên nào đó thì k không là số chính phương.

Định lí 19. Nếu hai số nguyên dương a và b nguyên tố cùng nhau thỏa mãn ab là một số chính phương thì a và b cũng là các số chính phương. Tổng quát hơn, nếu ab là số chính phương thì $a = du^2$ và $b = dv^2$, với $d = \gcd(a,b)$.

Định lí 20. Cho số nguyên tố lẻ p. Khi đó tồn tại số nguyên x sao cho $p \mid x^2 + 1$ khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 4$.

Định lí 21. Cho số nguyên tố p sao cho $p \equiv 3 \pmod 4$. Khi đó $p \mid a^2 + b^2$ khi và chỉ khi $p \mid a$ và $p \mid b$.

5.4. Phần nguyên.

Định lí 22.

(i) $\lfloor x \rfloor = x$ khi và chỉ khi $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$.

(iii) Nếu $k \in \mathbb{Z}$ thì $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

(iv) $\lfloor x + y \rfloor \ge \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

(v) Số các bội dương không vượt quá số dương x của số nguyên dương n là $\left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$.

(vi) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$ với n nguyên dương.

(vii) Nếu n là số nguyên dương thì $n\lfloor x \rfloor \le \lfloor nx \rfloor \le n\lfloor x \rfloor + n - 1$.

(viii) Với mọi số nguyên n ta có $\lfloor x \rfloor + \lfloor n - x \rfloor = \begin{cases} n-1 & \text{khi } x \notin \mathbb{Z} \\ n & \text{khi } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

(ix) Với n số nguyên dương x_1, x_2, …, x_n ta có $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor + n - 1$.

(x) $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

6. Tổ hợp.

- Các nguyên lí cơ bản: Nguyên lí Dirichlet, cực trị rời rạc, xuống thang.
- Quy tắc đếm: quy tắc cộng, quy tắc nhân.

- Các công thức đếm số các hoán vị của tập có n phần tử, số các tổ hợp và chỉnh hợp chập k của tập có n phần tử.

7. Bảng một số kí hiệu

Kí hiệu	Ý nghĩa
$\Rightarrow$	suy ra, kéo theo
$\Leftrightarrow$	tương đương, khi và chỉ khi
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 a_2 \cdots a_n$
$\sum$	Tổng các hoán vị vòng quanh của một biểu thức. Cụ thể $\sum f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$ Ví dụ: $\sum a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$.
$\triangle ABC \cup \{D\} \backsim \triangle XYZ \cup \{T\}$	Hai tam giác ABC và XYZ đồng dạng với hai điểm tương ứng là D và T hay nói cách khác, hai hình $\triangle ABC \cup \{D\}$ và $\triangle XYZ \cup \{T\}$ là đồng dạng.
$\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	Ước chung lớn nhất của các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $a_1, a_2, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0. Ngoài ra, ta còn kí hiệu là $(a_1, a_2, ..., a_n)$
$\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	Bội chung nhất của các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $a_1, a_2, ..., a_n$ khác 0. Ngoài ra, ta còn kí hiệu là $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI THAM KHẢO

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
Bài thi môn chuyên: Toán
Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)
Đề thi gồm 05 bài trong 01 trang

Bài 1 (2,0 điểm).

a) Cho a,b,c là các số thực khác 0 thỏa mãn $a^2+ab=c^2+cb$ và $a^2+ac=b^2+bc$.

Tính giá trị biểu thức $A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(xy+5)^2+(x+y)^2=24\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Bài 2 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn $xP(x-1)=(x-2)P(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Xét các số thực dương thay đổi a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2+a^3}{2+a+b^3}+\frac{2+b^3}{2+b+c^3}+\frac{2+c^3}{2+c+a^3}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC **(** $AB<AC$ **)** nội tiếp đường tròn tâm O, có đường cao AH. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K. Gọi L là giao điểm của MA và BC. Đường thẳng $A'I$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S.

a) Chứng minh tam giác ANA' là tam giác cân và $MA'\cdot MK=ML\cdot MA$.

b) Chứng minh $MI^2=ML\cdot MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp.

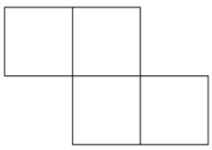
c) Gọi T là trung điểm của cạnh SA, chứng minh ba điểm T,I,K thẳng hàng.

Bài 4 (1,5 điểm).

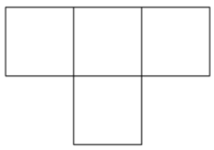
a) Cho ba số nguyên dương a, b, k. Biết rằng với mọi số nguyên dương c khác b thì c^k-a luôn chia hết cho $c-b$. Chứng minh rằng $a=b^k$.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $x^4+2x^2=y^3$.

Bài 5 (1,5 điểm) Cho bảng ô vuông 4×4. Ở mỗi ô vuông của bảng, ta viết một số tự nhiên từ 1 đến 16, mỗi số viết một lần.



Hình 1.



Hình 2.

a) Có hay không cách điền số sao cho tổng của 4 số ở mọi phần của bảng vuông có dạng như hình 1 (có thể xoay về mọi phía) đều chia hết cho 4.

b) Có hay không cách điền số sao cho tổng của 4 số ở mọi phần của bảng vuông có dạng như hình 2 (có thể xoay về mọi phía) đều chia hết cho 4.

-------HẾT-------