

Câu 1 (2,0 điểm):

1) Phân tích đa thức $x^5 - 5x - 4$ thành tích của một đa thức bậc hai và một đa thức bậc ba với hệ số nguyên. Áp dụng kết quả trên để rút gọn $P = \frac{2}{\sqrt{4 - \sqrt{9\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5\sqrt{5}}}}$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $1 < a < 2 < b < 3 < c < 4$ và

$$(a-1)\sqrt{-b^2+4b-3} + (b-2)\sqrt{-c^2+6c-8} + (c-3)\sqrt{-a^2+2a} = \frac{3}{2}$$

Tính giá trị của biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + 2b + 3c)$

Câu 2 (2,0 điểm):

1) Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2y^2 - 6\sqrt{2}y = -9 \\ \sqrt{2}x^2y + x^2 + 2\sqrt{2}y = 22 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm):

1) Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $101x^3 - 2019xy + 101y^3 = 100$

2) Cho p là một số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

Câu 4 (2,5 điểm):

1) Cho hình vuông ABCD, có độ dài cạnh bằng a . N là một điểm di chuyển trên AB (N khác A, B). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại E, đường thẳng vuông góc với CE tại C cắt đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh: $\frac{1}{CN^2} + \frac{1}{CE^2}$ không đổi và $\cos \widehat{AFC} = \sin \widehat{EFN} \cdot \cos \widehat{FEN} + \sin \widehat{FEN} \cdot \cos \widehat{EFN}$

b) Tìm vị trí của điểm N trên AB để diện tích tứ giác ACFE gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD

2) Cho tam giác ABC nhọn có $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$.

Đặt $M = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$. Chứng minh M không có giá trị nguyên

Câu 5 (1,5 điểm):

1) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2c^3}{a^2(b+c)^3} + \frac{c^2a^3}{b^2(c+a)^3} + \frac{a^2b^3}{c^2(a+b)^3} \geq \frac{9abc}{4(3abc + ab^2 + bc^2 + ca^2)}$$

2) Giả sử mỗi điểm trong mặt phẳng được tô bằng một trong 2 màu đen và trắng. Chứng minh tồn tại một hình chữ nhật có các đỉnh cùng màu.