UBND THỊ XÃ KINH MÔN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024-2025
MÔN: TOÁN – LỚP 9
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề bài gồm có 06 câu 01 trang)

Câu 1 *(2,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0; x\neq 1; x\neq \frac{1}{4}$.

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 thoả mãn $P(-2)=0$ và

$P(x)-P(x-2)=x(x+2)(3x+1)$

Xác định đa thức $P(x)$.

Câu 2 *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x^2+5x+1=4\sqrt{x}(x+1)$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$.

Câu 3 *(2,0 điểm)*

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn phương trình:

$$3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0.$$

2) Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

Câu 4 *(2,5 điểm)*

1) Cho tam giác ABC không cân, có $BC=a; CA=b; AB=c$. I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. D là hình chiếu vuông góc của I lên BC. Chứng minh rằng: $ID=\frac{a}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$ và $(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0$.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thay đổi trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{NAD}$, P và Q lần lượt là các giao điểm của AN và AM với BD, I là giao điểm của MP và QN.

a) Chứng minh $AI\perp MN$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M,N thay đổi trên BC và CD

Câu 5 *(0,5 điểm)* Trong hộp có chứa 2024 viên bi màu (mỗi viên bi chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bi màu đỏ, 657 viên bi màu xanh, 675 viên bi màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bi vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bi bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Câu 6 *(1,0 điểm)* Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn thỏa mãn:

$a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$. Chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 3.$$

----------------- *Hết* ---------------

UBND THỊ XÃ KINH MÔN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2024 – 2025

MÔN: TOÁN – LỚP 9

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

(Đề bài gồm có 06 câu 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

1) Rút gọn biểu thức $P=\left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq \dfrac{1}{4}$.

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn thỏa mãn $P(-2)=0$ và $P(x)-P(x-2)=x(x+2)(3x+1)$. Xác định đa thức $P(x)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

1) Giải phương trình $x^2+5x+1=4\sqrt{x}(x+1)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn phương trình $3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0$.

2) Cho a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

Câu 4 (2,5 điểm).

1) Cho tam giác ABC không cân, có $BC=a, CA=b, AB=c$. I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. D là hình chiếu vuông góc của I lên BC. Chứng minh rằng

$$ID=\dfrac{a}{\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}} \text{ và } (a-b)\cot\dfrac{C}{2}+(b-c)\cot\dfrac{A}{2}+(c-a)\cot\dfrac{B}{2}=0.$$

2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N là các điểm thay đổi trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{NAD}$, P và Q lần lượt là các giao điểm của AN và AM với BD, I là giao điểm của MP và QN.

a) Chứng minh $AI \perp MN$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi trên BC và CD.

Câu 5 (0,5 điểm). Trong hộp có chứa 2024 viên bị màu (mỗi viên bị chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bị màu đỏ, 657 viên bị màu xanh, 675 viên bị màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bị vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bị bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Câu 6 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3.$$

——— **HẾT** ———

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{4}$.

2) Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn thỏa mãn $P(-2) = 0$ và $P(x) - P(x-2) = x(x+2)(3x+1)$. Xác định đa thức $P(x)$.

Giải

1) Ta có

$$P = \left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P = \left[\dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]\cdot\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$$

$$P = \left[\dfrac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right]\cdot\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

$$P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}.$$

$$P = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $P = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \dfrac{1}{4}$.

2) Xét $x = 0$, ta có $P(0) - P(-2) = 0$ hay $P(0) = P(-2) = 0$.

Xét $x = -2$, ta có $P(-2) - P(-4) = 0$ hay $P(-4) = P(-2) = 0$.

Từ đó, ta thấy $P(x)$ nhận $x = 0, x = -2$ và $x = -4$ là nghiệm.

Vì $P(x)$ là đa thức bậc bốn, do đó, $P(x) = x(x+2)(x+4)(ax+b) \qquad (*)$.

Xét $x = 1$ thì $P(1) - P(-1) = 12$, thay vào (*), ta có:

$$15(a+b) + 3(-a+b) = 12 \text{ hay } 12a + 18b = 12 \text{ hay } 2a + 3b = 2 \qquad (1)$$

Xét $x = 2$ thì $P(2) - P(0) = 56$, thay vào (*), ta có:

$$48(2a+b) = 56 \text{ hay } 2a + b = \dfrac{7}{6} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \dfrac{3}{8}, b = \dfrac{5}{12}$.

Vậy $P(x) = x(x+2)(x+4)\left(\dfrac{3}{8}a + \dfrac{5}{12}\right)$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1)$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$

Giải

1) $x^2 + 5x + 1 = 4\sqrt{x}(x+1) \qquad (1)$.

Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Cách 1:

Với điều kiện $x \geq 0$ thì hai vế của phương trình (1) không âm, do đó phương trình (1) tương đương

$$x^4 + 25x^2 + 1 + 10x^3 + 10x + 2x^2 = 16x^3 + 32x^2 + 16x$$

$$x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad (2)$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (2), chia cả hai vế của phương trình (2) cho x^2, ta được

$$x^2 - 6x - 5 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t$ thì $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, phương trình trên trở thành

$$t^2 - 2 - 6t - 5 = 0 \text{ hay } t^2 - 6t - 7 = 0$$

Suy ra $t = -1$ hoặc $t = 7$.

Xét $t = -1$, tức là $x + \dfrac{1}{x} = -1$ hay $x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Với $t = 7$, tức là $x + \dfrac{1}{x} = 7$ hay $x^2 - 7x + 1 = 0$, suy ra $x = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2:

Phương trình (1) tương đương với

$$(x+1)^2 + 3x = 4\sqrt{x}(x+1)$$

Đặt $x+1 = a, \sqrt{x} = b\,(a > 0, b \geq 0)$, phương trình trên trở thành

$$a^2 + 3b^2 = 4ab$$
$$(a-b)(a-3b) = 0$$

Suy ra $a = b$ hoặc $a = 3b$.

Với $a = b$, tức là $x + 1 = \sqrt{x}$ hay $x - \sqrt{x} + 1 = 0$ hay $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ (vô nghiệm)

Với $a = 3b$, tức là $x + 1 = 3\sqrt{x}$, bình phương hai vế, ta có

$$x^2 - 7x + 1 = 0, \text{ suy ra } x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

2) $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$

Lấy (1) + 3.(2), ta được

$$x^3 + 3xy^2 + 3\left(x^2 - 8xy + y^2\right) = -49 + 3(8y - 17x)$$
$$(x+1)^3 + 3y^2(x+1) - 24y(x+1) + 48(x+1) = 0$$
$$(x+1)\left[(x+1)^2 + 3y^2 - 24y + 48\right] = 0$$
$$(x+1)\left[(x+1)^2 + 3(y-4)^2\right] = 0$$
$$x + 1 = 0 \text{ hoặc } (x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$$

Với $x + 1 = 0$ thì $x = -1$, thay vào (1) ta được $y = \pm 4$ (thỏa mãn)

Với $(x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$ thì $x = -1, y = 4$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \left\{(-1; 4); (-1; -4)\right\}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

Giải

1) $3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0$.

$2x^2+(x-2y)^2+2(y-2)^2=11$

Vì $2x^2,(x-2y)^2,2(y-2)^2 \geq 0$ nên $0<2x^2<11$ và $2x^2$ là số chẵn nên $2x^2 \in \left\{0;2;4;6;10\right\}$

$\Rightarrow x^2 \in \left\{0;1;2;3;4;5\right\}$

Vì x^2 là số chính phương nên $x^2 \in \left\{0;1;4\right\}$ nên $x \in \left\{-2;-1;0;1;2\right\}$.

Xét các trường hợp của x, ta tìm được các cặp số thỏa mãn là $(1;0),(1;2),(-1;0)$.

Vậy $(x;y) \in \left\{(1;0),(1;2),(-1;0)\right\}$.

2) Ta có $3c^2=ab+bc+ca$, suy ra $(2c)^2=(c+b)(c+a)$.

Đặt $\left(c+a;c+b\right)=d\,(d \in \mathbb{N}*)$ suy ra $c+a \,\vdots\, d, c+b \,\vdots\, d$.

$\Rightarrow a-b \,\vdots\, d$

Mà $a-b$ là số nguyên tố nên $d=1$ hoặc $d=a-b$.

- **Trường hợp 1:** $d=1$ thì $(c+a;c+b)=1$ và $(c+a)(c+b)=(2c)^2$ là số chính phương nên $c+a$ và $c+b$ đều là số chính phương.

  Đặt $c+a=m^2, c+b=n^2\,(m,n \in \mathbb{N})$ thì $(2c)^2=(mn)^2$ hay $2c=mn \qquad (1)$.

  Lại có $m^2-n^2=(m+n)(m-n)=a-b$ là số nguyên tố và $m-n<m+n$ nên $m-n=1$ hay $m=n+1 \qquad (2)$

  Từ (1) và (2) suy ra $2c=n(n+1)$ hay $8c+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ là số chính phương.

- **Trường hợp 2:** $d=a-b$, đặt $c+a=(a-b)x, c+b=(a-b)y\,(x,y \in \mathbb{N})$ và giả sử $x>y$.

  Ta có $a-b=(a-b)(x-y)$, suy ra $x-y=1$ hay $x=y+1$.

  Lại có $(2c)^2=(a-b)^2.xy$, suy ra xy là số chính phương.

  Ta có $xy=y(y+1)$ là số chính phương

  Với $y>0$ thì $y^2<y(y+1)<(y+1)^2$ nên $xy=y(y+1)$ không là số chính phương (mâu thuẫn), do đó $y=0$.

Khi đó, $xy=0$ thì $(2c)^2=0$ hay $c=0$, kéo theo $8c+1=1$ là số chính phương.

Câu 4. (2,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC không cân, có $BC=a, CA=b, AB=c$. I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. D là hình chiếu vuông góc của I lên BC. Chứng minh rằng

$$ID=\frac{a}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} \text{ và } (a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0.$$

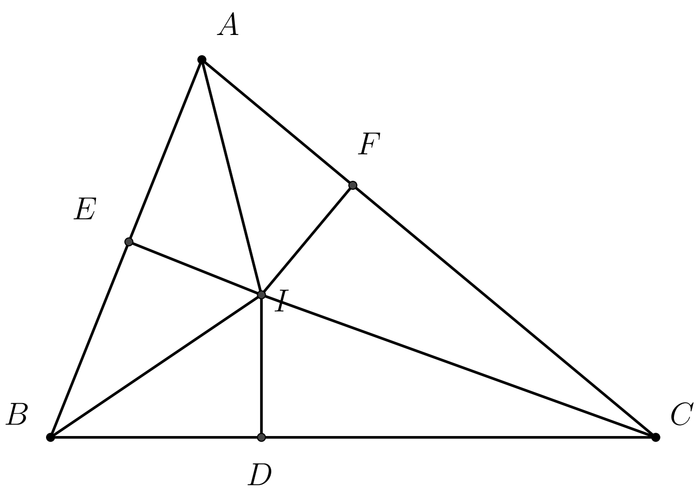
2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thay đổi trên cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{NAD}$, P và Q lần lượt là các giao điểm của AN và AM với BD, I là giao điểm của MP và QN.

a) Chứng minh $AI\perp MN$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi trên BC và CD.

Giải

1) .



Ta có $\cot\frac{B}{2}=\frac{BD}{ID}, \cot\frac{C}{2}=\frac{CD}{ID}$

$\Rightarrow \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{BC}{ID}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\frac{BC}{ID}} = ID$$

Suy ra $a = ID.\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right) = r.\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$

Chứng minh tương tự, $b = r.\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)$

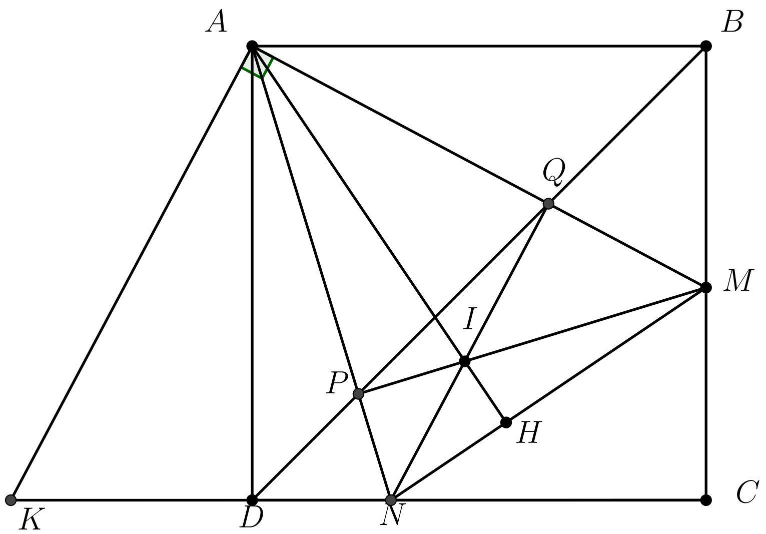
$\Rightarrow (a-b).\cot\frac{C}{2} = r.\left(\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{C}{2}\right)$

Chứng minh tương tự, ta có $(b-c).\cot\frac{A}{2} = r.\left(\cot\frac{C}{2}.\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{A}{2}\right)$

$$(c-a).\cot\frac{B}{2} = r.\left(\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}.\cot\frac{B}{2}\right)$$

Suy ra $(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0$.

2) .



a) Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{MAB}+\widehat{NAD}$ và $\widehat{MAN}+\widehat{MAB}+\widehat{NAD} = 90^\circ$ nên $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{QAN} = \widehat{BDC} = \widehat{QDN}45^\circ$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQND$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AQN}+\widehat{ADN} = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{AQN} = 90^\circ$ hay $NI \perp AM$.

Chứng minh tương tự, $MI \perp AN$

$\Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle AMN$.

$\Rightarrow AI \perp MN$.

b) Kẻ $AK \perp AM\,(K \in DC)$.

Ta có $\widehat{DAK} + \widehat{DAM} = 90^\circ$ và $\widehat{DAM} + \widehat{MAB} = 90^\circ$ nên $\widehat{DAK} = \widehat{MAB}$.

Xét $\triangle DAK$ và $\triangle BAM$, ta có

$$DA = BA,\ \widehat{DAK} = \widehat{MAB} \text{ và } \widehat{ADK} = \widehat{ABM} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle DAK = \triangle BAM$

$\Rightarrow AK = AM$

Ta chứng minh được $\triangle AKN = \triangle AMN$

$\Rightarrow MN = KN = KD + DN = MB + DN.$

Ta chứng minh được $\triangle ADN = \triangle AHN$ và $\triangle ABM = \triangle AHM$ nên $ND = NH$ và $MB = MH$.

Ta có $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}.AH.MN = \dfrac{1}{2}.a.MN$

Do đó, S_{AMN} min $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

Đặt $MB = x, ND = y$, ta có $MN^2 = MC^2 + CN^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$

$\Rightarrow xy = a^2 - a(x+y) \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}.$

$\Rightarrow 4a^2 - 4a(x+y) \leq (x+y)^2$

$\Rightarrow 8a^2 \leq (x+y+2a)^2$

$\Rightarrow x + y \geq 2a\sqrt{2} - 2a = 2a\left(\sqrt{2}-1\right)$

Vậy $S_{AMN\,\min} = \dfrac{1}{2}.a.2a\left(\sqrt{2}-1\right) = a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$ khi $x = y$ hay $\widehat{BAM} = \widehat{DAN} = 22^\circ 30'$

Câu 5. (2,0 điểm)

Trong hộp có chứa 2024 viên bị màu (mỗi viên bị chỉ có đúng một màu) trong đó có 675 viên bị màu đỏ, 657 viên bị màu xanh, 675 viên bị màu tím và 17 viên bi còn lại là các viên bi màu vàng hoặc màu trắng (mỗi màu có ít nhất một viên). Người ta lấy ra từ hộp 123 viên bất kì. Chứng minh rằng, trong số các viên bị vừa lấy ra luôn có ít nhất 36 viên bi cùng màu. Nếu người ta chỉ lấy ra từ hộp 122 viên bị bất kì thì kết luận trên của bài toán còn đúng không?

Giải

- Khi lấy 123 viên bi bất kì: Ta có thể lấy ít nhất $123 - 17 = 106$ viên bi gồm 3 màu đỏ, xanh, tím.

- Với 106 viên bi gồm 3 màu đỏ, xanh, tím, theo nguyên lí dirichlet, tồn tại ít nhất $\left[\dfrac{106}{3}\right]+1=36$ viên bi có cùng 1 màu. Nếu lấy 122 viên bi bất kì, ta lấy được ít nhất 105 viên bi gồm 3 màu đỏ xanh tím. Ta có 1 cách lấy sao cho không có 36 viên bi nào có cùng màu (35 viên bi đỏ, 35 viên bi xanh, 35 viên bi tím).

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\geq 3.$$

Giải

Ta có $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$

$\Rightarrow (a+b-c)^2=ab\leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$

$\Rightarrow (2a+2b-2c)^2\leq (a+b)^2.$

$\Rightarrow a+b\leq 2c$

$\Rightarrow \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\leq 2.$

Đặt $x=\dfrac{a}{c}, y=\dfrac{b}{c}$ $(x, y>0)$ thì $x+y\leq 2.$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq 2$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y} &= \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\left(\frac{1}{2xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)\\ &\geq \frac{4}{(x+y)^2}+2\sqrt{\frac{1}{2xy}.\frac{\sqrt{xy}}{x+y}}\\ &\geq \frac{4}{2^2}+2\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{xy}}.\frac{1}{x+y}}\geq 1+2\sqrt{\frac{1}{x+y}.\frac{1}{x+y}}=1+\frac{2}{x+y}\geq 2\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1\Leftrightarrow a=b=c.$

Lời giải bởi Vũ Đức Huy 10A3 – THCS và THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội